АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

А.А. Усова

В работе рассматривается задача оптимального управления на бесконечном промежутке времени, полученная из модели экономического роста (см. [3], [4] и [5]).

Суть задачи состоит в максимизации функционала $J(\cdot)$

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left(\ln\left(1 - s(t)\right) + \ln\left(1 - r(t)\right) + \ln f(k(t), l(t))\right) dt. \tag{1}$$

на траекториях динамической системы $(k(\cdot), l(\cdot))$

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = s(t) f(k(t), l(t)) - (\delta + \rho) k(t) \\ \dot{l}(t) = b r(t) f(k(t), l(t)) - \rho l(t) \end{cases} \tag{2}$$

с ограничениями на управляющие параметры $s(t)$ и $r(t)$

$$0 \leqslant s(t) \leqslant a_s < 1, \quad 0 \leqslant r(t) \leqslant a_r < 1, \quad 0 \leqslant a_s + a_r < 1. \tag{3}$$

и начальными условиями

$$k(t_0) = k^0, \quad l(t_0) = l^0. \tag{4}$$

Здесь фазовые переменные $k(t)$ и $l(t)$ выражают капитал страны, приходящийся на одного работающего человека, и эффективность труда одного человека в момент времени t. Производственная функция $f(k(t), l(t))$ связывает фазовые переменные $k(t)$ и $l(t)$ с величиной $y(t)$, определяющей ВВП страны, приходящийся на душу работающего населения. Управляющие параметры $s(t)$ и $r(t)$ определяют долю инвестиций в основной и в человеческий капиталы страны. Каждая из управляющих переменных $s(t)$ и $r(t)$ отделены от единицы положительными числами a_s и a_r, выражающими максимальный уровень инвестиций в основной и человеческий капиталы страны соответственно. Положительная постоянная величина λ является дисконтирующим множителем. Константа $\delta > 0$ определяет величину обесценивания капитала. Положительный параметр ρ выражает степень роста численности работающего населения страны. Величина $b > 0$ определяет предельный эффект от инвестиций в человеческий капитал.

Поставленная задача (1-4) может быть решена методами теории оптимального управления для задач с бесконечным горизонтом (см. [1], [2]).

Цель данной работы состоит в следующем: используя нелинейный регулятор, стабилизирующий систему в положении равновесия, численно найти решение задачи оптимального управления.

Построение траектории осуществляется в обратном времени. В качестве начальной позиции берутся точки, фазовые координаты которых лежат в ε-окрестности $O_\varepsilon(k_\varepsilon, l_\varepsilon)$ некоторой точки $(k_\varepsilon, l_\varepsilon)$ с траектории стабилизированной системы; а сопряженные координаты вычисляются из уравнения плоскости, образованной собственными векторами, отвечающими отрицательным собственным значениям матрицы Якоби гамильтоновой системы, вычисленной в стационарной точке. Перебор точек из $O_\varepsilon(k_\varepsilon, l_\varepsilon)$ осуществляется до тех пор, пока построенная траектория не попадет в начальную точку (k^0, l^0) (4).

Список литературы

[1]. *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН, 2007. Т. 257. С. 5–271.

[2]. *Красовский А.А., Тарасьев А.М* Свойства гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач экономического роста. // Труды Математического института им. В.А. Стеклова, 2008. Т. 262, С. 127–145.

[3]. *Arrow K.J.* Application of Control Theory to Economic Growth // Mathematics of the Decision Sciences, 1968. No 2. P. 85–119.

[4]. *Sanderson W.* The SEDIM Model: Version 0.1. //IIASA Interim Report IR-04-041, 2004.

[5]. *Shell K.* Applications of Pontryagin's Maximum Principle to Economics. // Mathematical Systems Theory and Economics, 1969. Vol. 1. P. 241-–292.