Виды и типы циклов семейств отображений с отношением линейной сопряжённости

В.А. Густомесов (РГППУ)

1. Рассматривается вещественное разностное уравнение первого порядка

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

или, более кратко, (одномерное) отображение f.

Теория одномерных отображений в последние десятилетия интенсивно развивается. Важным классом решений отображений являются периодические решения с наименьшим периодом k (k-циклы). Более детальная классификация k-циклов при $k > 2$ проводится по типам, определяемым циклическими подстановками k-го порядка

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k \\ \pi(1) & \pi(2) & ... & \pi(k) \end{pmatrix}$$

множества $\{1, 2, ..., k\}$ [1].

2. Часто изучаются однопараметрические семейства отображений (напр., $kx(1-x)$, x^2+c, $k\sin\pi x$) и выявляются особенности их поведения при изменении параметра. Представляется целесообразным рассмотрение достаточно широких семейств B отображений с отношением линейной сопряжённости (не обязательно однопараметрических). Так как это отношение является отношением эквивалентности, то для исследования различных свойств отображений семейства можно выбирать подходящие отображения рассматриваемого класса эквивалентности, что расширяет возможности изучения семейства.

Введено понятие *вида* циклических подстановок k-го порядка

$$\Pi = \{\pi, \bar{\pi}\},$$

где $\bar{\pi}:\ \bar{\pi}(i) = k+1-\pi(k+1-i)$ —циклическая подстановка, симметричная π. Вид k-циклов является инвариантом отношения линейной сопряжённости.

3. Изучена структура множества T_k циклических подстановок k-го порядка, выявлены связи между циклическими подстановками $\pi, \bar{\pi}, \pi^{-1}$. Полезными инстументами исследования оказываются матрица M_π циклической подстановки и перестановка φ, определяющая порядок обхода точек по циклу. В частности, доказано, что самосимметричные циклические подстановки (со свойством $\pi = \bar{\pi}$) существуют лишь при чётных $k = 2n$. Выявлены следующие критерии (необходимые и достаточные условия) самосимметричности циклической подстановки π :

$$\varphi = (1, \varphi(2), \ldots, \varphi(n), s(1), s(\varphi(2)), \ldots, s(\varphi(n)));$$

$$\pi^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2n \\ 2n & 2n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $s(i) = k+1-i$.

4. Для более глубокой классификации соответствующих k-циклов отображений выбранного класса эквивалентности вводится *нормированный* k-цикл, двумя соседними точками которого являются $1, 0$ [2]. Остальные точки нормированного цикла (метки) вполне характеризуют цикл. Указаны формулы изменения меток при переходе к симметричной циклической подстановке.

5. В конкретных семействах B могут существовать циклы не всех видов. Доказана теорема о том, что в семействах A_m полиномиальных отображений m-й степени ($m > 1$) наблюдаются k-циклы всех возможных типов при $k \leqslant m+1$.

Отмеченные в докладе результаты автор предполагает применить для описания циклов в квадратичных отображениях A_2 и кубических отображениях A_3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоренко В. В., Шарковский А. Н. О сосуществовании гомоклинических и периодических траекторий. //Нелинейная динамика — 2010, т.6, № 12. — С. 207-217.

2. Густомесов В. А. Изучение итераций кубических отображений с позиции линейной сопряжённости.//Вестник Удмуртск. Ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. — 2011, № 1. — С. 20-39.