Семинар Отдела динамических систем
3 декабря 2014 г., 15.00

Устойчивость неавтономных разностных уравнений

А.Ю. Куликов (ПНИПУ)

Используем следуюшие обозначения: $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\Delta_{\mathbb{N}}=\{(n,m)\in\mathbb{N}_0^2 : n\geqslant m\}$, $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$, $\mathbb{C}^r$ — r-мерное комплексное пространство, $\mathbb{C}^{r\times r}$ — пространство комплексных матриц размерности $r\times r$, Θ и E — единичная и нулевая матрицы соответственно; $\mathbf{l}_p$, $1\leqslant p<\infty$, — пространство функций $f\colon \mathbb{N}_0\to\mathbb{C}^r$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|f(n)|^p<\infty$, с нормой $||f||_p=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}|f(n)|^p\right)^{1/p}$; $\mathbf{l}_\infty$ — пространство ограниченных функций $f\colon \mathbb{N}_0\to\mathbb{C}^r$ с нормой $||f||_\infty=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}|f(n)|$.

I. Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1)-x(n)+\sum_{k=0}^{N}A_k(n)x(n-h_k(n))=f(n),\quad n\in\mathbb{N}_0,\tag{1}$$

где $A_k\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{C}^{r\times r}$, $f\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{C}^r$, $h_k\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$.

Матрица-функция $K\colon\Delta_{\mathbb{N}}\to\mathbb{C}^{r\times r}$, являющаяся при каждом фиксированном $m\in\mathbb{N}_0$ решением задачи

$$\begin{cases}K(n+1,m)-K(n,m)+\sum\limits_{k=0}^{N}A_k(n)K(n-h_k(n),m)=0,\quad n\geqslant m,\\ K(m,m)=E,\\ K(n,m)=\Theta,\quad n<m,\end{cases}$$

называется *функцией Коши* уравнения (1).

Положим $a(n)=\sum\limits_{k=0}^{N}|A_k(n)|$ при $n\in\mathbb{N}_0$, $a(n)=0$ при $n\notin\mathbb{N}_0$, $h(n)=\max\limits_k h_k(n)$.

Будем говорить, что выполнено *V–условие*, если $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\sum\limits_{i=n-h(n)}^{n}a(i)<\infty$.

Показано, что если выполнено V–условие, то различные виды устойчивости уравнения (1) (равномерная, асимптотическая, экспоненциальная) эквивалентны соответствующим оценкам сверху нормы функции Коши.

Доказана эквивалентность устойчивости уравнения (1) по правой части, принадлежащей пространству $\mathbf{l}_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, равномерной (при $p=1$) или экспоненциальной (при $1<p\leqslant\infty$ и выполнении V–условия) устойчивости.

II. Для скалярного уравнения

$$x(n+1)-x(n)+\sum_{k=0}^{N}a_k(n)x(n-h_k(n))=0,\quad n\in\mathbb{N}_0,\tag{2}$$

где $a_k\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}_+$, $h_k\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$, получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{i=n-h(n)}^{n}a(i)<3/2.\tag{3}$$

Тогда существуют такие $M,\gamma>0$, что для функции Коши уравнения (2) *справедлива оценка*

$$|K(n,m)|\leqslant M\exp\left(-\gamma\sum_{i=m}^{n-1}a(i)\right),\quad (n,m)\in\Delta_{\mathbb{N}}.\tag{4}$$

Следствие 1. *Пусть выполнено неравенство* (3) *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a(n)=\infty$. *Тогда тривиальное решение уравнения* (2) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 2. *Пусть* $H=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}h(n)<\infty$ *и выполнено неравенство* $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=n-h(n)}^{n}a(i)<\frac{3}{2}+\frac{1}{2H+2}$. *Тогда существуют такие $M,\gamma>0$, что для функции Коши уравнения* (2) *справедлива оценка* (4).

Константы $3/2$ и $\frac{3}{2}+\frac{1}{2H+2}$ являются точными: увеличить их нельзя; более того, знак в соответствующих неравенствах нельзя заменять нестрогим.

Для *полуавтономных* уравнений вида (2): с постоянными коэффициентами $a_k(n)=a_k$ и ограниченными запаздываниями — константу $\frac{3}{2}+\frac{1}{2H+2}$ в условии устойчивости удалось повысить. Неравенстово (4) в этом случае означает экспоненциальную устойчивость.