21.06.2018

# ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СМЕЖНЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ГРАФОВ

В работе изучаются некоторые семейства линейных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) 1-го порядка

$$\dot{x}(t)-(\mathcal{F}x)(t)=b(t).$$

1. В первой главе для решения векторного уравнения пантографа $\dot{x}(t)-A\,x(\mu t)=b(\mu t)$ (и его обобщения $\dot{x}(t)-A(\mu t)*x(\mu t)=b(\mu t)$) построена функциональная алгебра со специальным умножением $*$, в терминах которой получено представление общего решения уравнения:

$$x(t)=X(t)*\Big\{X^{-1}(0)\,x_0+\mu^{-1}\int_0^{\mu t}X^{-1}(s)*b(s)\,ds\Big\}.$$

2. Во второй главе для решения скалярного уравнения $\dot{x}(t)-a\,x(\mu t^q)=b(t)$ (уравнения со степенны́м отклонением аргумента) построена функциональная алгебра со специальным умножением $*$, в терминах которой получено представление общего решения уравнения:

$$x(t)\doteq C(t,0)\,x_0+\int_0^t\frac{\partial}{\partial s}\Big(C(t,\tau)*\int_0^s b(\xi)\,d\xi\Big)\Big|_{s=\tau}d\tau.$$

Доказаны равенства: $C(s,s)\equiv 1,\quad C(t,s)*C(s,\tau)=C(t,\tau),\quad \frac{\partial}{\partial t}C(t,\tau)=a\,C(\mu t^q,\mu\tau^q).$

3. В третьей главе для решения скалярного уравнения пантографа

$$x(t)-\sum_{i=1}^r\lambda_i\int_\alpha^t x(F_i(\cdot))\,dq_i=f(t)\qquad\text{и его обобщения}\qquad x(t)-\int_\alpha^t(dQ*x)=f(t)$$

построена алгебраическая система, состоящая из функциональной алгебры со специальным умножением $*$ и двух бинарных интегральных отношений $u*dv$ и $du*v$ между элементами алгебры. В терминах этой системы получено представление общего решения уравнения:

$$x(t)=C(t,\alpha)*f(\alpha)+\int_\alpha^t\big(C(t,s)*df(s)\big).$$

Доказаны равенства: $C(s,s)\equiv 1,\quad C(t,s)*C(s,\tau)=C(t,\tau),\quad C(t,\tau)-\int_\tau^t\big(dQ(s)*C(s,\tau)\big)\equiv 1.$

При определенных условиях справедливо тождество $C(t,\tau)-\int_\tau^t\big(C(t,s)*dQ(s)\big)\equiv 1.$

4. В четвертой главе построена алгебраическая система, состоящая из алгебры прерывистых функций с присоединенным умножением $\circ$ и бинарного интегрального отношения $x\circ dy$ между элементами алгебры. Бинарное отношение порождает специальный класс присоединенных обобщенных функций, в терминах которых сформулирована постановка импульсной задачи и исследованы вопросы ее разрешимости. Для линейной импульсной системы с постоянными коэффициентами $\dot{x}(t)-A\,\dot{Q}(t)x(t)=\dot{y}(t)$, заданной в терминах присоединенных обобщенных функций, получено представление общего решения:

$$x(t)=e^{AQ^c(t)}\Big[\,h(t)+\int_\alpha^t e^{-AQ^c(\cdot)}\,dy^c\,\Big],$$

где $h$ — специальная вектор-функция скачков. Например, $\dot{x}=x\iff x(t)=h(t)\,e^t.$

5. В пятой главе для постановки и решения импульсной задачи построена альтернативная алгебраическая система, состоящая из алгебры прерывистых функций и бинарного квазиинтегрального отношения $x\Delta y$ между элементами алгебры. Для линейной системы квазиинтегральных уравнений с постоянными коэффициентами $x(t)-\lambda A\int_\alpha^t x\Delta Q=y(t)$ получено представление решения в форме Коши. При определенных условиях справедливо представление:

$$x(t)=C(t,\alpha)\,y(\alpha)+\int_\alpha^t C(t,s)\Delta^*y(s).$$

21.06.2018

Доказаны равенства: $C(s,s)\equiv E,\qquad C(t,s)\,C(s,\tau)=C(t,\tau),$

$$C(t,\tau)-\lambda A\int_\tau^t C(s,\tau)\,\Delta Q(s)\equiv E,\qquad C(t,\tau)-\lambda A\int_\tau^t C(t,s)\,\Delta^*Q(s)\equiv E.$$

(Отношение $x\Delta^* y$ называется двойственным к отношению $x\Delta y$.)

6. В шестой главе получены явные формулы и рекуррентные соотношения в задачах перечисления ациклических и транзитивных ориентированных графов. Формулы и соотношения для ациклических орграфов имеют завершенный вид, причем для хроматической производящей функции для помеченных ациклических орграфов получено описание через ФДУ пантографа. Несмотря на то, что нами получен ряд новых формул и соотношений для транзитивных орграфов, задача их перечисления по-прежнему остается в списке нерешенных задач перечисления графов. Однако успех в случае с ациклическими орграфами позволяет надеяться на какое-то регулярное описание хроматической производящей функции для помеченных транзитивных орграфов. Уместно также отметить, что исследования данной главы во многом предопределили исследования, приведенные в предыдущих главах.