Математические заметки

том 68 выпуск 4 октябрь 2000

УДК 517.518.86+519.147

# ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ УГЛОВОГО КОДОВОГО РАССТОЯНИЯ ДЛЯ 24 И 25 ТОЧЕК НА ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ В $\mathbb{R}^4$

**В. В. Арестов, А. Г. Бабенко**

Данная работа посвящена известной задаче о максимальном числе элементов $\tau_m(s)$ сферического $s$-кода $(-1 \leqslant s < 1)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ размерности $m \geqslant 2$; а точнее, в ней рассматривается функция Дельсарта $w_m(s)$, связанная с величиной $\tau_m(s)$ неравенством $\tau_m(s) \leqslant w_m(s)$. В работе найдено решение уравнения $w_m(s) = N$ при $m = 4$ и $N = 24, 25$. В качестве следствия получено утверждение, что среди любых 25 (24) точек на единичной сфере пространства $\mathbb{R}^4$ всегда найдутся две точки, угловое расстояние между которыми строго меньше $60.5°$ $(61.41°)$.

Библиография: 24 названия.

Данная работа посвящена известной задаче о максимальном числе элементов $\tau_m(s)$ сферического $s$-кода $(-1 \leqslant s < 1)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ размерности $m \geqslant 2$; а точнее, в ней рассматривается функция Дельсарта $w_m(s)$ (см. ниже (0.7)), связанная с величиной $\tau_m(s)$ неравенством $\tau_m(s) \leqslant w_m(s)$. В работе найдено решение уравнения $w_m(s) = N$ при $m = 4$ и $N = 24, 25$. В качестве следствия получены новые оценки сверху максимального значения углового кодового расстояния для 24 и 25 точек на единичной сфере в $\mathbb{R}^4$.

**Введение.** Хорошо известно [1, с. 3378, п. 4] предположение, что среди всех множеств из 24 точек на единичной сфере $\mathbb{S}^3$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ множество, состоящее из 24 точек: $(\pm1,0,0,0)$, $(0,\pm1,0,0)$, $(0,0,\pm1,0)$, $(0,0,0,\pm1)$, $(\pm1/2, \pm1/2, \pm1/2, \pm1/2)$, являющихся вершинами правильного выпуклого многогранника с символом Шлефли $\{3,4,3\}$ (см. [2, гл. 22]), имеет максимально возможное минимальное попарное угловое расстояние между точками, т.е. на нем реализуется максимальное угловое кодовое расстояние.

Другой не менее известной задачей в $\mathbb{R}^4$ является задача нахождения контактного числа $\tau_4$ этого пространства. *Контактным числом* $\tau_m$ пространства $\mathbb{R}^m$ называется максимальное число евклидовых шаров пространства одинакового радиуса (можно считать, единичного радиуса) с непересекающимися внутренностями, касающихся одного такого же шара; оно совпадает с наибольшей мощностью множества точек единичной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00175.

 

сферы $\mathbb{S}^{m-1}$ пространства $\mathbb{R}^m$, угловое расстояние между любыми двумя точками которого не меньше $60^\circ$. Описанное выше множество точек дает оценку $\tau_4 \geqslant 24$. Согласно результатам Одлыжко и Слоэна [3] справедлива оценка $\tau_4 \leqslant 25$. Следовательно, решение задачи о максимуме углового кодового расстояния для 25 точек на $\mathbb{S}^3$ содержит в себе решение задачи о $\tau_4$.

В настоящее время ни одна из перечисленных выше задач не решена. В этой работе показаны возможности классической схемы Дельсарта [4]–[7] для получения оценок сверху минимальных расстояний во множествах из 24 и 25 точек на единичной сфере четырехмерного евклидова пространства. При этом существенно использовалась методика, разработанная в [8].

Пусть $\mathbb{R}^m$ есть вещественное евклидово пространство размерности $m \geqslant 2$, $\mathbb{S}^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ – его единичная сфера, а $\mathbb{B}^m_\rho(y) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x-y| \leqslant \rho\}$ – шар радиуса $\rho > 0$ с центром в точке $y \in \mathbb{R}^m$; здесь $|x| = \sqrt{xx}$ – норма вектора $x \in \mathbb{R}^m$, $xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_my_m$ – скалярное произведение векторов (точек) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ из $\mathbb{R}^m$.

Пусть $-1 \leqslant s < 1$. Множество $W \subset \mathbb{S}^{m-1}$, содержащее не менее двух точек, называется *сферическим $s$-кодом*, если для любых двух точек $x, y \in W$, $x \neq y$, их скалярное произведение $xy$ удовлетворяет условию $(-1 \leqslant)\ xy \leqslant s$; это условие означает, что угловое расстояние (угол) между любыми двумя различными точками множества $W$ больше или равно значения $\arccos s$:

$$\varphi(W) = \min\{\arccos(xy) : x \neq y,\ x, y \in W\} \geqslant \arccos s.$$

Величина $\varphi(W)$ называется *угловым кодовым расстоянием* множества $W$.

Одну из основных задач для сферических кодов можно сформулировать (см., например, [9, гл. 1, § 2, п. 2.3]) следующим образом: для заданных $m \geqslant 2$ и $-1 \leqslant s < 1$ найти сферический $s$-код $W \subset \mathbb{S}^{m-1}$ наибольшей возможной мощности. Мы будем обозначать эту максимальную мощность через $\tau_m(s)$; таким образом,

$$\tau_m(s) = \max\{|W| : W \subset \mathbb{S}^{m-1},\ W \text{ – сферический } s\text{-код}\}, \tag{0.1}$$

где $|W|$ есть мощность (количество точек) множества $W$. Эту задачу можно рассматривать (см. [9, гл. 1, § 2, п. 2.3]) и в двойственной форме: для заданных $m \geqslant 2$ и $N \geqslant 2$ найти сферический код $W \subset \mathbb{S}^{m-1}$, $|W| = N$, с наибольшим угловым кодовым расстоянием $\varphi(W)$, которое мы обозначим через $\varphi_m(N)$, т.е.

$$\varphi_m(N) = \max\{\varphi(W) : W \subset \mathbb{S}^{m-1},\ |W| = N\}. \tag{0.2}$$

Задачи (0.1), (0.2) имеют большую историю; соответствующую информацию и библиографию можно найти в [9]–[11]. Отметим сейчас лишь, что в случае произвольной размерности $m \geqslant 2$ величины $\tau_m(s)$ при $-1 \leqslant s \leqslant 0$ и $\varphi_m(N)$ при $N \leqslant 2m$ нашел Ранкин [12].

Величина $\tau_m(1/2)$ совпадает (см., например, [9, гл. 1, § 2]) с контактным числом $\tau_m$ пространства $\mathbb{R}^m$:

$$\tau_m = \tau_m\Big(\frac{1}{2}\Big), \qquad m \geqslant 2. \tag{0.3}$$

В настоящее время контактные числа $\tau_m$ известны лишь при $m = 2, 3, 8, 24$, а именно: $\tau_2 = 6$, $\tau_3 = 12$, $\tau_8 = 240$, $\tau_{24} = 196560$; для произвольных значений $m$ известны оценки снизу и сверху этих констант (см., например, [9, гл. 1]).

В дальнейшем оценки снизу для (0.1) обсуждаться не будут. Для оценки сверху числа $\tau_m(s)$ часто используется схема Дельсарта, возникшая в его исследованиях [4], [5], а затем успешно развитая и примененная в работах [3], [6], [7], [13]–[19] и в ряде других работ.

Пусть $R_k = R_k^{\alpha,\alpha}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, есть система ультрасферических многочленов (многочленов Гегенбауэра), ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1 - t^2)^\alpha$, $\alpha = (m-3)/2$, нормированных условием $R_k(1) = 1$. Указанная схема базируется на свойстве положительной определенности многочленов $R_k$, а точнее, на свойстве положительной определенности ядер $R_k(xy)$ на декартовом произведении $\mathbb{S}^{m-1} \times \mathbb{S}^{m-1}$ (см., например, [9, гл. 9, § 3, теорема 1]) и приводит к следующей экстремальной задаче [6], [7], которую нам удобно сформулировать в форме близкой к той, которая использовалась в работе авторов [8].

Обозначим через $\mathscr{F}_m(s)$ множество непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций $f$ со следующими свойствами:

1) функция $f$ представляется в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k(t), \tag{0.4}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$f_0 > 0, \qquad f_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \dots, \qquad f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k < \infty; \tag{0.5}$$

2) $f$ – неположительная функция на отрезке $[-1, s]$:

$$f(t) \leqslant 0, \qquad t \in [-1, s]. \tag{0.6}$$

Известно [7], что множество $\mathscr{F}_m(s)$ при каждом $m \geqslant 2$ и $s \in [-1, 1)$ непусто. На этом множестве функций рассмотрим задачу о вычислении величины

$$w_m(s) = \inf\left\{ \frac{f(1)}{f_0} : f \in \mathscr{F}_m(s) \right\}. \tag{0.7}$$

Задачу (0.7) мы будем называть иногда *задачей* $w_m(s)$. Следующее утверждение содержится в работах [6], [7].

**Теорема A.** *Для произвольного $s \in [-1, 1)$ при любом натуральном $m \geqslant 2$ имеет место неравенство*

$$\tau_m(s) \leqslant w_m(s). \tag{0.8}$$

Число $\tau_m(s)$ целое, поэтому величину $w_m(s)$ в правой части (0.8) можно заменить на ее целую часть $[w_m(s)]$ и, следовательно, справедлива оценка

$$\tau_m(s) \leqslant [w_m(s)], \qquad m \geqslant 2, \quad s \in [-1, 1).$$

Как видно из определения (0.7) и утверждения (0.8), любая функция $f \in \mathscr{F}_m(s)$ дает оценку сверху для величины $w_m(s)$, а значит, и для $\tau_m(s)$. На этом пути в [13], [3] были получены, в частности, оценки сверху для $\tau_8$, $\tau_{24}$, которые совпали с известными оценками снизу. Одной из основных целей данной работы является дальнейшее изучение контактного числа $\tau_4$ пространства $\mathbb{R}^4$. Отметим несколько относящихся к этой проблеме результатов. По изложенной только что схеме Дельсарта с помощью конкретной функции (которая на самом деле есть некоторый алгебраический многочлен) Одлыжко и Слоэн [3] получили оценку $\tau_4 \leqslant 25$. В работе авторов [8] решена задача (0.7) в случае $m = 4$, $s = 1/2$. При этом оказалось, что $w_4(1/2) = 25.558429097\ldots$ и решением является многочлен, близкий к выписанному ранее в [3], а затем уточненный в работах [20], [21]. Работы Бойваленкова [20], [21], [18] и работа [19] стали известны авторам уже после выхода их работы [8]. В [20] изучаются свойства экстремальной функции $f$ в задаче (0.7) при $m = 4$, $s = 1/2$ (хотя сама задача в работе не решена). В частности, в [20] доказано, что у экстремальной функции коэффициент $f_6 = 0$, а при некоторых дополнительных предположениях будут выполняться также условия $f_7 = 0$ и $f_8 = 0$.

Нетрудно понять, что функции $\tau_m(s)$ и $w_m(s)$ по $s \in [-1, 1)$ не убывают. Довольно очевидно, что $\tau_m(-1) = w_m(-1) = 2$ [12] и $\tau_m(s)$, а значит, и $w_m(s)$ стремятся к $+\infty$ при $s \to 1$. Рассмотрим задачу, в определенном смысле обратную задаче (0.7). Для значений параметра $w \geqslant 2$ положим

$$s_m(w) = \inf\{s \in [-1, 1) : w_m(s) \geqslant w\}; \tag{0.9}$$

функцию $s_m$ можно интерпретировать, как обратную функции $w_m$. Интерес представляют значения функции (0.9) для натуральных значений аргумента $w = N$.

В настоящей работе будет решена задача (0.9) в случае $m = 4$ для значений аргумента $w$, равных 25 и 24, т.е. будут найдены значения $s_4(25)$ и $s_4(24)$; приближенно эти значения таковы: $s_4(25) = 0.4925150241\ldots$, $s_4(24) = 0.4785451836\ldots$, здесь и в аналогичных ситуациях ниже для применяемых нами величин приведены 10 десятичных знаков (хотя, на самом деле, мы использовали 30 знаков). Из этого результата будет следовать, в частности, такое утверждение.

**Следствие 0.1.** *Среди любых* 25 (24) *точек на сфере* $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ *всегда найдутся две точки, угловое расстояние между которыми строго меньше* $60.5°$ $(61.41°)$.

В работах Левенштейна [13], [16] фактически содержатся (см. [19]) оценки сверху минимальных угловых расстояний $N$ точек на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ для любых натуральных чисел $N \geqslant 2$ и $m \geqslant 2$. В частности, согласно этим результатам среди любых 24 точек на сфере $\mathbb{S}^3$ всегда найдутся две точки, угловое расстояние между которыми строго меньше $61.65°$, а для любых 25 точек на сфере $\mathbb{S}^3$ минимальное попарное угловое расстояние строго меньше $60.79°$, иными словами, для величины (0.2) справедливы неравенства

$$\varphi_4(24) < 61.65°, \qquad \varphi_4(25) < 60.79°; \tag{0.10}$$

на самом деле, из результатов работы [16] следуют оценки $s_4(24) \geqslant 0.4749504898\ldots$, $s_4(25) \geqslant 0.4880762504\ldots$, которые и влекут неравенства (0.10).

В работе [19] в некоторых конкретных случаях для величины (0.9) были указаны более сильные оценки, например следующая оценка, которую в принятых здесь обозначениях можно записать так: $s_4(24) \geqslant 0.47763$. Отсюда вытекает, что среди любых 24 точек на сфере $\mathbb{S}^3$ всегда найдутся две точки, угловое расстояние между которыми строго меньше $61.47°$.

Слоэн, Смит и Хардин [22] построили конкретное множество из 25 точек на единичной сфере $\mathbb{S}^3$ пространства $\mathbb{R}^4$ с минимальным угловым расстоянием, большим либо равным $57.4988826°$. Тем самым, они улучшили результат работы [23, с. 158], в которой утверждается, что $\varphi_4(25) \geqslant 56.5°$. Перечисленные результаты можно записать в виде следующих оценок величин (0.2), (0.9):

$$\begin{gathered} 60° \leqslant \varphi_4(24) < 61.47°, \qquad 57.4988826° \leqslant \varphi_4(25) < 60.79°; \\ 0.47763 \leqslant s_4(24) \leqslant \cos\varphi_4(24) \leqslant 0.5, \\ 0.4880762504 \leqslant s_4(25) \leqslant \cos\varphi_4(25) \leqslant 0.5373161. \end{gathered} \tag{0.11}$$

**1. Вычисление значения $s_4(25)$.** В четырехмерном случае ($m=4$) показатель $\alpha$ равен $1/2$ и многочлены $R_k = R_k^{1/2,1/2}$ являются многочленами Чебышева второго рода, нормированными условием $R_k(1)=1$, т.е. многочленами

$$R_k(t) = \frac{\sin(k+1)\theta}{(k+1)\sin\theta}, \qquad t=\cos\theta, \quad k=0,1,2,\dots. \tag{1.1}$$

Для формулировки основного результата работы нам понадобятся несколько определений и обозначений. Пусть $H$ есть следующий многочлен двадцать восьмой степени:

$$\begin{aligned} H(z) = {} & 1744568320000\,z^{28} + 19824640000\,z^{27} - 11368270848000\,z^{26} \\ & + 299992125440\,z^{25} + 33683617005056\,z^{24} - 1690611799808\,z^{23} \\ & - 59756580346080\,z^{22} + 3740858012128\,z^{21} + 70524254066704\,z^{20} \\ & - 4516619739088\,z^{19} - 58188563861056\,z^{18} + 3200479271680\,z^{17} \\ & + 34328475907496\,z^{16} - 1262955136312\,z^{15} - 14563330120710\,z^{14} \\ & + 172742066070\,z^{13} + 4417415566665\,z^{12} + 76811504675\,z^{11} \\ & - 942777154875\,z^{10} - 46753060057\,z^{9} + 137285137301\,z^{8} \\ & + 11621133345\,z^{7} - 12856584451\,z^{6} - 1594636173\,z^{5} \\ & + 680106134\,z^{4} + 118057108\,z^{3} - 13255560\,z^{2} - 3691008\,z - 186624. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Он имеет четырнадцать вещественных и четырнадцать комплексных корней:

$$\begin{aligned} & z_1 = -1.0416743109\dots, && z_2 = -0.9918041575\dots, && z_3 = -0.8449780198\dots, \\ & z_4 = -0.8175275067\dots, && z_5 = -0.7387597195\dots, && z_6 = -0.5411187835\dots, \\ & z_7 = -0.4069720983\dots, && z_8 = -0.2950901339\dots, && z_9 = -0.2696741063\dots, \\ & z_{10} = -0.1591723800\dots, && z_{11} = -0.0913396135\dots, && z_{12} = 0.4109824855\dots, \\ & z_{13} = 0.4925150241\dots, && z_{14} = 0.6197533558\dots, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
z_{15,16} &= -0.8891104747\ldots \pm i\,0.1829442719\ldots,\\
z_{17,18} &= -0.4736286597\ldots \pm i\,0.0577014541\ldots,\\
z_{19,20} &= 0.4317085516\ldots \pm i\,0.0656750849\ldots,\\
z_{21,22} &= 0.4484454172\ldots \pm i\,0.0031683147\ldots,\\
z_{23,24} &= 0.8021254198\ldots \pm i\,0.3917816767\ldots,\\
z_{25,26} &= 0.9371073469\ldots \pm i\,0.1945583784\ldots,\\
z_{27,28} &= 1.0751005630\ldots \pm i\,0.2302148263\ldots.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Особую роль в дальнейшем будет играть его тринадцатый вещественный корень, условимся обозначать его буквой $d$; таким образом,

$$d = z_{13} = 0.4925150241\ldots. \tag{1.5}$$

Среди всех вещественных корней полинома $H$ только корень $z_{13}$ лежит на том же самом отрезке $[0.4880762504, 0.5373161]$, что и величина $s_4(25)$ (см. (0.11)). Одним из основных результатов данной работы является следующее утверждение, в котором доказано, что, на самом деле, величины $s_4(25)$ и $z_{13}$ совпадают между собой; в этом утверждении использованы обозначения (0.7), (1.5).

**Теорема 1.1.** *На полуинтервале $[-1, 1)$ уравнение $w_4(s) = 25$ имеет единственное решение $s = d$ и, таким образом,*

$$s_4(25) = d = 0.4925150241\ldots. \tag{1.6}$$

Это утверждение будет получено как следствие приводимой ниже теоремы 1.2.

Введем несколько чисел, выражающихся через $d$, и функцию, относительно которой в последствии будет доказано, что она является экстремальной в задаче $w_4(d)$. Рассмотрим кубический полином

$$\begin{aligned}
G(z) = {} & (320\,d^2 + 48\,d - 68)z^3 + (240\,d^3 + 108\,d^2 + 39\,d - 12)z^2\\
& + (160\,d^4 + 48\,d^3 - 166\,d^2 + 16\,d + 42)z\\
& + 80\,d^5 + 12\,d^4 - 113\,d^3 - 4\,d^2 + 21\,d + 4.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Этот полином имеет два комплексных корня

$$\xi_{1,2} = -0.2486667705\ldots \pm i\,0.0422341143\ldots$$

и один вещественный корень, который мы обозначим через $\xi$; его приближенное значение таково

$$\xi = -1.3689346636\ldots. \tag{1.8}$$

Положим

$$\eta = \frac{-13 + 24\,d - 4\,\xi + 30\,d\xi + 24\,d^2\xi + 64\,d^2}{2(17 - 12\,d - 80\,d^2)} = 0.5035865245\ldots, \tag{1.9}$$

$$\zeta = \frac{7 + 6\,d\xi + 6\,\eta + 16\,\xi + 16\,d + 40\,d\eta}{-40} = -0.0468609188\ldots, \tag{1.10}$$

$$q = d + 2\,\xi = -2.2453543031\ldots, \tag{1.11}$$

$$r = 2\,d\xi + d^2 + 3\,\xi^2 - 2\,\eta - 2 = 1.5089025621\ldots. \tag{1.12}$$

Определим многочлен девятой степени

$$f^*(t) = (t - d)(t^3 - \xi t^2 + \eta t - \zeta)^2(t^2 + qt + r). \tag{1.13}$$

Ниже мы покажем, что многочлен $f^*$ неположителен на отрезке $[-1, d]$ и коэффициенты Фурье $f_k^*$ многочлена (1.13) в его разложении

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{9} f_k^* R_k(t) \tag{1.14}$$

по многочленам Чебышева второго рода неотрицательные, причем $f_0^* > 0$, т.е. функция $f^*$ принадлежит классу $\mathscr{F}_4(d)$; более того, эта функция является экстремальной в задаче $w_4(d)$. Точнее, имеет место такое утверждение.

**Теорема 1.2.** *Функция $f^*$, заданная соотношениями* (1.7)–(1.13), *принадлежит множеству $\mathscr{F}_4(d)$ и является единственной* (*с точностью до положительного постоянного множителя*) *экстремальной функцией* (*решением*) *задачи* (0.7) *при* $m = 4$, $s = d$; *при этом справедливы равенства*

$$w_4(d) = \frac{f^*(1)}{f_0^*} = 25. \tag{1.15}$$

Доказательство теоремы 1.2 будет реализовано в виде нескольких вспомогательных утверждений. Оценку сверху для величины $w_4(d)$ дает функция $f^*$. Оценка снизу будет получена с помощью квадратурной формулы (на более широком в сравнении с $\mathscr{F}_4(d)$ классе функций), содержащейся в следующей ниже лемме 1.1.

Пусть $C[-1, 1]$ есть пространство вещественных функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$. Обозначим через $\Phi_4$ множество функций $f \in C[-1, 1]$, представимых рядами по многочленам $R_k = R_k^{1/2,1/2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, с абсолютно суммируемой последовательностью вещественных коэффициентов:

$$\Phi_4 = \left\{ f \in C[-1, 1] : f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k(t),\ f_0, f_1, f_2, \dots \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| < \infty \right\}; \tag{1.16}$$

очевидно, $\mathscr{F}_4(d) \subset \Phi_4$.

Многочлен третьей степени

$$z^3 - \xi z^2 + \eta z - \zeta, \tag{1.17}$$

квадрат которого является одним из сомножителей в правой части (1.13), имеет три вещественных корня:

$$a = -0.8305233622\ldots,\qquad b = -0.3958876231\ldots,\qquad c = -0.1425236781\ldots. \tag{1.18}$$

Эти три числа, обозначения (1.1)–(1.13), (1.16), а также обозначение

$$\Lambda(A,B,C,D) = \frac{1+2(B+C+D+BD+CD+CB+4BCD)}{8(A-1)(A-B)(A-C)(A-D)} \tag{1.19}$$

используются в следующей лемме.

**Лемма 1.1.** *Для каждой функции* $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k(t) \in \Phi_4$ *имеет место квадратурная формула*

$$f_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = L(f) - \sum_{\nu\geqslant 1} L(R_\nu) f_\nu, \tag{1.20}$$

*в которой* $L$ *есть функционал*

$$L(f) = \frac{1}{25}f(1) + \lambda(a)f(a) + \lambda(b)f(b) + \lambda(c)f(c) + \lambda(d)f(d) \tag{1.21}$$

*с коэффициентами*

$$\lambda(a) = \Lambda(a,b,c,d) = 0.123069069\ldots, \tag{1.22}$$

$$\lambda(b) = \Lambda(b,c,d,a) = 0.198093840\ldots, \tag{1.23}$$

$$\lambda(c) = \Lambda(c,d,a,b) = 0.274002556\ldots, \tag{1.24}$$

$$\lambda(d) = \Lambda(d,a,b,c) = \frac{1+2(\xi+\eta+4\zeta)}{8(d-1)(d^3-d^2\xi+d\eta-\zeta)} = 0.364834533\ldots. \tag{1.25}$$

*Функционал* $L$ *обладает свойствами*

$$L(1) = 1,\qquad L(R_\nu) = 0\quad \text{при } \nu = 1,2,3,4,5,9, \tag{1.26}$$

$$L(R_\nu) > 0\quad \text{при } \nu \geqslant 6,\ \nu \neq 9. \tag{1.27}$$

Доказательство. Рассуждения, которые используются для обоснования этой леммы, аналогичны тем, что применялись в работе [8] при доказательстве леммы 4.2, связанной с задачей исследования величины $w_4 = w_4(1/2)$, поэтому мы приведем эти рассуждения довольно кратко.

Вначале найдем достаточные условия на вещественные узлы $-1 \leqslant A < B < C < D < 1$ и коэффициенты $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8$ для существования квадратурной формулы вида

$$f_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \mathscr{L}(f) + \sum_{\nu=6}^{8}\gamma_\nu f_\nu, \tag{1.28}$$

$$\mathscr{L}(f) = \frac{1}{25}f(1) + \lambda_A f(A) + \lambda_B f(B) + \lambda_C f(C) + \lambda_D f(D), \tag{1.29}$$

на множестве всех полиномов девятой степени $f(t) = \sum_{k=0}^{9} f_k R_k(t)$. Большинство из этих условий будут также и необходимыми.

На первом этапе найдем условия, которым должны удовлетворять параметры $A$, $B$, $C$, $D$. Сделаем симметрическую замену

$$U = A + B + C, \qquad V = AB + AC + BC, \qquad W = ABC.$$

Из теоремы Виета следует, что $A, B, C$ являются корнями многочлена

$$\chi(t) = t^3 - Ut^2 + Vt - W. \tag{1.30}$$

Ниже мы получим несколько уравнений с неизвестными $D, U, V, W$, с помощью которых получим одно уравнение с одним неизвестным $D$.

Рассмотрим многочлен пятой степени

$$\sigma(t) = (t-1)(t-D)\chi(t). \tag{1.31}$$

Разложим его вначале по степеням переменной $t$, а затем, применяя известные (см. [24, с. 28, формула (41)]) представления

$$t^k = 2^{-k} \sum_{\nu=0}^{[k/2]} \frac{(k+1-2\nu)^2}{k+1-\nu} \binom{k}{\nu} R_{k-2\nu}(t), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.32}$$

степеней переменной через многочлены Чебышева второго рода, найдем нулевой коэффициент, участвующий в разложении $\sigma(t) = \sum_{k=0}^{5} \sigma_k R_k(t)$ полинома $\sigma$ по многочленам $R_k$

$$\sigma_0 = -\frac{1}{8}(1 + D + U + 8DW + 2DU + 2V + 2DV + 2W).$$

Подставив многочлен $\sigma$ в формулу (1.28), получаем первое необходимое условие существования этой формулы: $\sigma_0 = 0$, которое эквивалентно равенству

$$W = \frac{1 + D + U + 2V + 2DU + 2DV}{-2(1+4D)}. \tag{1.33}$$

Действуя аналогично, с помощью полинома

$$h(t) = (t-D)\chi(t) \tag{1.34}$$

и формулы (1.28) находим еще одно выражение для параметра $W$

$$W = -\frac{1}{40}(7 + 6DU + 6V + 16U + 16D + 40DV). \tag{1.35}$$

Приравняв правые части равенств (1.33), (1.35), получим уравнение, эквивалентное следующему равенству:

$$V = \frac{-13 + 24D - 4U + 30DU + 24D^2U + 64D^2}{2(17 - 12D - 80D^2)}. \tag{1.36}$$

Таким же способом, применяя полиномы

$$\begin{aligned} &h_1(t) = (t-1)(t^3 - Ut^2 + Vt - W), \qquad h_2(t) = (t-1)(t-D)(t-B)(t-C),\\ &h_3(t) = (t-1)(t-D)(t-A)(t-C), \qquad h_4(t) = (t-1)(t-D)(t-A)(t-B), \end{aligned} \tag{1.37}$$

получаем

$$\lambda_D = \frac{1 + 2(4W + U + V)}{8(D-1)(D^3 - D^2U + DV - W)} = \Lambda(D, A, B, C), \tag{1.38}$$

$$\lambda_A = \Lambda(A, B, C, D), \qquad \lambda_B = \Lambda(B, C, D, A), \qquad \lambda_C = \Lambda(C, D, A, B). \tag{1.39}$$

Подставляя в (1.28) многочлены $R_\nu$, $\nu = 6, 7, 8$, получим еще три необходимых условия:

$$\gamma_\nu = -\mathscr{L}(R_\nu) \qquad \text{при } \nu = 6, 7, 8. \tag{1.40}$$

Девять условий (1.33), (1.35), (1.38), (1.39), (1.40) являются необходимыми для существования квадратурной формулы (1.28).

Построим теперь многочлен $\psi(t) = \sum_{k=0}^{9} \psi_k R_k(t)$, на котором зануляются все функционалы, стоящие в правой части формулы (1.28) (с учетом представления (1.29)), кроме значения в точке $t = 1$, т.е. многочлен $\psi$ со свойствами

$$\psi(A) = \psi(B) = \psi(C) = \psi(D) = \psi_6 = \psi_7 = \psi_8 = 0. \tag{1.41}$$

Положим

$$Q = D + 2U, \qquad R = -2 + 2DU + D^2 + 3U^2 - 2V \tag{1.42}$$

и рассмотрим многочлен девятой степени

$$\psi(t) = (t-D)(t^3 - Ut^2 + Vt - W)^2(t^2 + Qt + R). \tag{1.43}$$

Учитывая (1.42), найдем четыре старших и нулевой коэффициенты Фурье в его разложении

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{9} \psi_k R_k(t) \tag{1.44}$$

по многочленам Чебышева второго рода $R_k$

$$\psi_9 = \frac{5}{256}, \qquad \psi_8 = \psi_7 = 0, \tag{1.45}$$

$$\psi_6 = \frac{7}{64}(-2UD^2 - 3DU^2 - 2W + 6VU + 2DV - 4U^3 + 2D - D^3 + 4U), \tag{1.46}$$

$$\begin{aligned} \psi_0 = \frac{1}{64}(&10\,D + 20\,U + 22\,W - 32\,D^2V^2U - 32\,D^2VU + 80\,WV - 16\,WU^2\\ &+ 48\,V^2U + 32\,W^2U - 64\,D^2WU^2 + 32\,DV^3 - 16\,D^3V^2 - 32\,D^3WU\\ &- 16\,D^3V + 42\,DV + 64\,WV^2 - 48\,VU^3 - 64\,D^3W^2 + 64\,DWVU\\ &- 24\,DU^4 - 8\,D^3U^2 - 16\,D^2U^3 + 62\,VU + 128\,DW^2V - 5\,D^3 - 20\,U^3\\ &- 96\,WVU^2 + DU^2 - 128\,D^2W^2U + 128\,DW^2 - 10\,UD^2\\ &+ 64\,DV^2 + 64\,DWU - 32\,DVU^2 - 48\,DV^2U^2 - 96\,DWU^3 - 192\,DW^2U^2). \end{aligned} \tag{1.47}$$

Наложим на параметры $D, U, V, W$ условие $\psi_6 = 0$, т.е.

$$-2UD^2 - 3DU^2 - 2W + 6VU + 2DV - 4U^3 + 2D - D^3 + 4U = 0.$$

Подставим в это уравнение вместо параметра $W$ его выражение (1.35) и, домножив получившееся уравнение на 20, придем к уравнению

$$7 - 40UD^2 - 60DU^2 + 6DU + 6V + 96U + 56D + 80DV + 120VU - 80U^3 - 20D^3 = 0.$$

Выразим отсюда параметр $V$

$$V = \frac{40\,UD^2 + 60\,DU^2 - 7 - 6\,DU - 96\,U - 56\,D + 80\,U^3 + 20\,D^3}{2(3 + 40\,D + 60\,U)}.$$

Из последнего соотношения и (1.36) следует, что

$$F(D, U) = 0, \tag{1.48}$$

где

$$\begin{aligned} F(D, U) = 4 &+ 21D + 42U + 320U^3D^2 + 16DU - 12U^2 + 48U^3D - 113D^3 \\ &- 68U^3 + 39DU^2 + 48UD^3 + 160UD^4 + 108D^2U^2 \\ &+ 240D^3U^2 + 12D^4 + 80D^5 - 166UD^2 - 4D^2. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Сейчас мы получим еще одно уравнение относительно неизвестных $D, U$. Формула (1.28) на функции $\psi$ (в предположении, что выполнены условия (1.41)) принимает вид

$$\psi_0 = \frac{1}{25}\psi(1). \tag{1.50}$$

Используя соотношения (1.47), (1.42), (1.43), равенство (1.50) можно переписать в такой форме

$$\frac{1}{128}F_1(D, U, V, W) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} F_1(D, U, V, W) = 64 &+ 122\,D + 244\,U + 256\,V + 422\,W + 512\,DWV - 672\,D^2V^2U \\ &- 544\,D^2VU + 1616\,WV - 272\,WU^2 + 816\,V^2U + 256\,DW + 672\,W^2U \\ &- 1344\,D^2WU^2 + 672\,DV^3 - 336\,D^3V^2 - 672\,D^3WU - 272\,D^3V + 256\,DU \\ &+ 666\,DV + 1344\,WV^2 - 816\,VU^3 + 128\,U^2 - 384\,WU^3 + 1536\,D^3W^2 \\ &+ 1344\,DWVU - 128\,W^2V - 256\,D^2U^2 - 192\,V^2U^2 - 408\,DU^4 - 136\,D^3U^2 \\ &- 272\,D^2U^3 - 384\,U^3D - 192\,W^2U^2 - 128\,D^3W + 910\,VU + 3072\,DW^2V \\ &- 128\,D^3WV + 256\,DWV^2 - 256\,D^2WVU - 384\,DWVU^2 - 61\,D^3 - 244\,U^3 \\ &- 2016\,WVU^2 + 384\,WU + 89\,DU^2 - 3072\,D^2W^2U - 384\,WU^2D - 320\,V^2 \\ &- 256\,WUD^2 + 3072\,DW^2 - 128\,UD^3 + 64\,W^2 + 512\,WUV + 128\,V^3 \\ &- 512\,DVU - 192\,U^4 - 256\,D^2VU^2 - 384\,DVU^3 - 128\,D^3VU + 1008\,DV^2U^2 \\ &- 122\,UD^2 + 1216\,DV^2 + 1344\,DWU - 544\,DVU^2 \\ &+ 256\,V^2DU + 2016\,DWU^3 - 4608\,DW^2U^2. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение (1.35) для $W$, получаем

$$\frac{1}{50}F_2(D,U,V)=0,$$

где

$$\begin{aligned}
F_2(D,U,V) = {} & 572\,D + 1877\,U - 4141\,V + 95872\,D^2V^2 + 74240\,D^2V + 13992\,VU^2 \\
& + 61056\,D^2V^2U + 86592\,D^2VU - 8192\,D^4 - 12288\,D^5 \\
& + 11604\,V^2U - 30144\,DV^3 + 258912\,D^3V^2 + 131904\,D^3V \\
& + 12475\,DU - 11352\,DV + 1248\,VU^3 - 36000\,D^3U^3 + 6022\,U^2 \\
& - 12744\,U^4D^2 - 16640\,D^4V^2 - 27136\,D^4V - 31080\,D^2U^2 \\
& + 5304\,V^2U^2 - 15216\,DU^4 - 67472\,D^3U^2 - 54316\,D^2U^3 \\
& - 15960\,U^3D + 39680\,D^2V^3 - 5184\,D^3U^4 + 8864\,VU - 241536\,D^3U^2V \\
& - 153216\,D^4VU - 59520\,U^2D^2V^2 + 20294\,D^3 + 632\,U^3 - 69120\,D^3U^3V \\
& - 230400\,D^3U^2V^2 + 12566\,DU^2 - \frac{789}{2} - 3456\,U^3D^4 \\
& - 22608\,U^2D^4 + 12800\,UD^3V^2 - 38784\,UD^4 - 46080\,U^2D^4V \\
& - 153600\,UD^4V^2 - 93888\,U^3D^2V - 23040\,D^5VU - 76800\,D^5V^2 \\
& - 61440\,D^5V + 153600\,D^3V^3 - 6664\,UD^3 - 7472\,V^2 - 3456\,U^4 \\
& - 86544\,D^2VU^2 - 9216\,D^5U - 1728\,D^5U^2 + 2160\,DVU^3 \\
& + 2224\,D^3VU - 3536\,V^3 + 25612\,UD^2 - 37472\,DV^2 + 39368\,DVU^2 \\
& - 4160\,V^2DU + 16896\,D^2 + 12776\,DVU + 45216\,DV^2U^2.
\end{aligned}$$

И наконец, подставив в это уравнение выражение (1.36) для $V$, приходим к соотношению

$$\frac{1250\Upsilon(D,U)}{(80D^2+12D-17)^2}=0, \tag{1.51}$$

в котором

$$\begin{aligned}
\Upsilon(D,U) = {} & 68 + 165\,D + 42\,U - 785\,D^3 - 1280\,D^7 - 196\,U^3 - 640\,D^2 - 262\,D^2U \\
& - 4072\,D^3U^2 + 6512\,D^2U^3 - 2280\,DU^4 + 1528\,DU + 1496\,D^4 \\
& + 1360\,D^5 + 324\,U^2 - 816\,U^4 - 384\,D^6 + 911\,DU^2 - 28160\,D^6U^3 \\
& - 58752\,D^5U^3 - 14080\,D^7U^2 - 34944\,D^6U^2 - 15360\,D^7U - 7168\,D^6U \\
& - 29376\,D^4U^4 + 10752\,D^2U^4 + 22784\,D^3U^3 + 18960\,D^3U^4 \\
& + 12352\,D^4U^2 - 12256\,D^4U^3 + 20928\,D^5U + 2576\,D^5U^2 \\
& - 42240\,D^5U^4 - 1192\,D^2U^2 + 3008\,D^4U - 10216\,D^3U - 2432\,U^3D.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Результант полиномов $F,\Upsilon$ по переменой $U$ (см. (1.49), (1.52)) имеет вид

$$2048H(D)(1-D)(80D^2+12D-17)^3,$$

где полином $H$ определен формулой (1.2). Возьмем в качестве $D$ тринадцатый вещественный корень полинома $H$ (см. (1.5)), т.е. положим $D = d$. Заметим, что полином $F(d,U)$ совпадает с полиномом $G(U)$, определенным формулой (1.7). Полином $\Upsilon(d,U)$ обозначим через $T(U)$. Таким образом, имеем

$$G(U) = F(d,U), \qquad T(U) = \Upsilon(d,U).$$

По построению результант полиномов $G$ и $T$ равен нулю, поэтому у этих полиномов имеется, по крайней мере, один общий корень. Выше (см. (1.7), (1.8)) говорилось, что полином $G$ имеет два комплексных корня $\xi_{1,2} = -0.2486667705\ldots \pm i\,0.0422341143\ldots$ и один вещественный корень $\xi = -1.3689346636\ldots$. Поскольку

$$T(\xi_{1,2}) = 3.2260630885\ldots \pm i\,0.001371204116\ldots \neq 0,$$

то в силу сказанного выше выполняется равенство $T(\xi) = 0$. Таким образом, учитывая, что $80d^2 + 12d - 17 = 8.3158642123\ldots \neq 0$, получаем, что пара

$$D = d, \qquad U = \xi$$

является одним из решений системы двух уравнений (1.48), (1.51) с двумя неизвестными. В этом случае в силу формул (1.35), (1.36), (1.42), (1.9)–(1.12) имеем

$$V = \eta, \qquad W = \zeta, \qquad Q = q, \qquad R = r.$$

Кроме того, полином (1.30) совпадает с полиномом (1.17), поэтому

$$A = a, \qquad B = b, \qquad C = c.$$

Отсюда также следует, что функция $\psi$, заданная формулой (1.43), и функция $f^*$, определенная равенством (1.13), совпадают.

Из формул (1.38), (1.39) вытекает, что коэффициенты $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$ функционала $\mathscr{L}$ (см. (1.29)) совпадают с коэффициентами (1.22)–(1.25) функционала $L$, определенного в (1.21). Следовательно, формула (1.28) с учетом (1.40) примет вид

$$f_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = L(f) - \sum_{\nu=6}^{8} L(R_\nu) f_\nu. \tag{1.53}$$

На данном этапе рассуждений можно утверждать, что формула (1.53) выполняется на многочленах, определенных формулами (1.31), (1.34), (1.37) при выбранных $D, U, V, W, A, B, C$, а также на многочленах $R_6, R_7, R_8$ и $\psi = f^*$. Указанные десять многочленов образуют базис в множестве $\mathscr{P}_9$ многочленов степени не выше девяти. Поэтому квадратурная формула (1.53) выполняется для любого многочлена из $\mathscr{P}_9$. Из нее, в частности, следует, что $L(1) = 1$ и $L(R_\nu) = 0$ при $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 9$, т.е. имеет место (1.26).

Очевидно, формулу (1.53) можно распространить на весь класс функций $\Phi_4$, если записать ее в форме (1.20)–(1.25). Нам осталось проверить неравенства (1.27). Для обоснования этих неравенств воспользуемся следующими двумя свойствами многочленов Чебышева второго рода:

1) $R_\nu(1) = 1$, $\nu \geqslant 0$;
2) многочлены $R_\nu$ на интервале $(-1,1)$ поточечно стремятся к нулю при $\nu \to \infty$.

Как следствие этих свойств имеем $L(R_\nu) \to 1/25 > 0$ при $\nu \to \infty$, в силу чего неравенства (1.27) нужно проверить лишь для конечного числа индексов $\nu$. Подробнее, воспользовавшись формулой (1.1), получим

$$L(R_\nu) = \frac{1}{25} + \lambda(d)\frac{\sin(\nu+1)\theta_0}{(\nu+1)\sin\theta_0} + \lambda(a)\frac{\sin(\nu+1)\theta_1}{(\nu+1)\sin\theta_1} + \lambda(b)\frac{\sin(\nu+1)\theta_2}{(\nu+1)\sin\theta_2} + \lambda(c)\frac{\sin(\nu+1)\theta_3}{(\nu+1)\sin\theta_3},$$

где

$$\theta_0 = \arccos d = 1.0558191061\ldots, \qquad \theta_1 = \arccos a = 2.5508429904\ldots,$$
$$\theta_2 = \arccos b = 1.9778305716\ldots, \qquad \theta_3 = \arccos c = 1.7138069835\ldots.$$

Поэтому для любого $\nu \geqslant 1$ справедлива оценка

$$L(R_\nu) \geqslant \frac{1}{25} - \frac{\lambda(d)+\lambda(a)+\lambda(b)+\lambda(c)}{\nu+1}\max\left\{\frac{1}{\sin\theta_0}, \frac{1}{\sin\theta_1}, \frac{1}{\sin\theta_2}, \frac{1}{\sin\theta_3}\right\} = \frac{1}{25}\left(1 - \frac{24}{(\nu+1)\sin\theta_1}\right).$$

Отсюда легко получить, что $L(R_\nu) > 0$ при $\nu \geqslant 43$. Для $\nu \leqslant 42$ условия (1.27) проверяются непосредственными вычислениями. Лемма 1.1 доказана.

В следующей лемме изучаются свойства функции $f^*$, описанной соотношениями (1.5), (1.7)–(1.14).

**Лемма 1.2.** *Функция $f^*$ принадлежит множеству $\mathscr{F}_4(d)$, и для нее имеет место равенство $f^*(1) = 25f_0^*$.*

Доказательство. Найдем коэффициенты Фурье $f_k^*$ многочлена (1.13) в его разложении (1.14) по многочленам $R_k = R_k^{1/2,1/2}$ Чебышева второго рода. Для этого удобно воспользоваться формулой (1.32). В результате получим для коэффициентов разложения такие выражения:

$$f_9^* = \frac{5}{256}, \qquad f_8^* = f_7^* = f_6^* = 0,$$

$$f_5^* = \frac{9}{16}\eta + \frac{9}{32}r + \frac{3}{8}\zeta\xi + \frac{3}{16}\eta^2 + \frac{9}{32}\xi^2 + \frac{9}{16}d\xi + \frac{3}{8}d\zeta + \frac{81}{256} - \frac{9}{32}qd - \frac{9}{16}q\xi + \frac{3}{8}d\eta\xi - \frac{3}{8}q\eta\xi - \frac{3}{8}qd\eta - \frac{3}{16}qd\xi^2 + \frac{3}{8}rd\xi - \frac{3}{8}q\zeta + \frac{3}{8}r\eta + \frac{3}{16}r\xi^2 = 0.1006597630\ldots,$$

$$f_4^* = -\frac{25}{64}d - \frac{25}{32}\xi - \frac{25}{32}\zeta + \frac{25}{64}q - \frac{5}{16}rd\xi^2 - \frac{5}{8}rd\eta - \frac{5}{8}r\eta\xi + \frac{5}{8}qd\zeta + \frac{5}{8}q\zeta\xi - \frac{25}{32}\eta\xi - \frac{25}{32}d\eta - \frac{5}{8}w\eta - \frac{5}{8}r\zeta + \frac{5}{8}qd\eta\xi + \frac{5}{16}q\eta^2 - \frac{5}{16}d\eta^2 - \frac{5}{8}d\zeta\xi + \frac{25}{32}qd\xi - \frac{25}{64}d\xi^2 + \frac{25}{32}q\eta + \frac{25}{64}q\xi^2 - \frac{25}{64}rd - \frac{25}{32}r\xi = 0.2220776796\ldots,$$

$$
\begin{aligned}
f_3^* &= \frac{7}{8}\eta + \frac{7}{16}r + d\zeta\eta + \frac{3}{8} + \zeta\xi + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}w^2 + \frac{7}{16}\xi^2 + \frac{7}{8}d\xi + d\zeta - \frac{7}{16}qd - \frac{7}{8}q\xi \\
&\quad + rd\eta\xi - \frac{1}{2}qd\eta^2 - q\zeta\eta + r\zeta\xi + rd\zeta - qd\zeta\xi + \frac{1}{2}r\eta^2 + d\eta\xi - q\eta\xi - qd\eta \\
&\quad - \frac{1}{2}qd\xi^2 + rd\xi - q\zeta + r\eta + \frac{1}{2}r\xi^2 = 0.3133127365\ldots, \\
f_2^* &= -\frac{21}{64}d - \frac{21}{32}\xi - \frac{27}{32}\zeta + \frac{21}{64}q - \frac{3}{2}r\zeta\eta - \frac{3}{4}rd\eta^2 - \frac{9}{16}rd\xi^2 - \frac{9}{8}rd\eta - \frac{9}{8}r\eta\xi + \frac{9}{8}qd\zeta \\
&\quad + \frac{9}{8}q\zeta\xi - \frac{27}{32}\eta\xi + \frac{3}{4}q\zeta^2 - \frac{27}{32}d\eta - \frac{9}{8}\zeta\eta - \frac{9}{8}r\zeta + \frac{9}{8}qd\eta\xi + \frac{9}{16}q\eta^2 - \frac{9}{16}d\eta^2 - \frac{9}{8}d\zeta\xi \\
&\quad - \frac{3}{2}rd\zeta\xi + \frac{3}{2}qd\zeta\eta - \frac{3}{4}d\zeta^2 + \frac{27}{32}qdu - \frac{27}{64}d\xi^2 + \frac{27}{32}q\eta + \frac{27}{64}q\xi^2 - \frac{27}{64}rd - \frac{27}{32}r\xi \\
&\quad = 0.2749299247\ldots, \\
f_1^* &= \frac{7}{16}\eta + \frac{7}{32}r - d\zeta^2 q + d\zeta\eta + \frac{5}{8}\zeta\xi + \frac{5}{16}\eta^2 + \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{7}{32}\xi^2 + \frac{7}{16}d\xi + \frac{5}{8}d\zeta + \frac{21}{128} \\
&\quad - \frac{7}{32}qd - \frac{7}{16}q\xi + rdv\xi - \frac{1}{2}qd\eta^2 - q\zeta\eta + ur\zeta + rd\zeta - qd\zeta\xi + \frac{1}{2}r\eta^2 + 2rd\zeta\eta + r\zeta^2 \\
&\quad + \frac{5}{8}d\eta\xi - \frac{5}{8}q\eta\xi - \frac{5}{8}qd\eta - \frac{5}{16}qd\xi^2 + \frac{5}{8}rd\xi - \frac{5}{8}q\zeta + \frac{5}{8}r\eta + \frac{5}{16}r\xi^2 \\
&\quad = 0.1637887936\ldots, \\
f_0^* &= -\frac{7}{128}d - \frac{7}{64}u - \frac{5}{32}\zeta + \frac{7}{128}q - \frac{1}{2}r\zeta\eta - \frac{1}{4}rd\eta^2 - \frac{1}{8}rd\xi^2 - \frac{1}{4}rd\eta - \frac{1}{4}r\eta\xi + \frac{1}{4}qd\zeta \\
&\quad + \frac{1}{4}q\zeta\xi - \frac{5}{32}\eta\xi + \frac{1}{4}q\zeta^2 - \frac{5}{32}d\eta - d\zeta^2 r - \frac{1}{4}\zeta\eta - \frac{1}{4}r\zeta + \frac{1}{4}qd\eta\xi + \frac{1}{8}q\eta^2 - \frac{1}{8}d\eta^2 \\
&\quad - \frac{1}{4}d\zeta\xi - \frac{1}{2}rd\zeta\xi + \frac{1}{2}qd\zeta\eta - \frac{1}{4}d\zeta^2 + \frac{5}{32}qd\xi - \frac{5}{64}d\xi^2 + \frac{5}{32}q\eta + \frac{5}{64}q\xi^2 - \frac{5}{64}rd - \frac{5}{32}r\xi \\
&\quad = 0.0455958394\ldots.
\end{aligned}
\tag{1.54}
$$

Многочлен $f^*$ неположителен на отрезке $[-1, d]$, ибо последний множитель $(t^2+qt+r)$ в его представлении (1.13) имеет положительный минимум на всей действительной оси: $r - (q/2)^2 = 0.248498575\ldots > 0$. Кроме того, из формул (1.54), следует, что все его коэффициенты $f_k^*$ в разложении (1.14) неотрицательны и $f_0^* > 0$. Согласно определению (0.4)–(0.6) полином $f^*$ принадлежит множеству $\mathscr{F}_4(d)$.

В силу (1.13), (1.17), (1.18) и (1.54) для функции $f^*$ выполняются свойства

$$
f^*(d) = f^*(a) = f^*(b) = f^*(c) = f_6^* = f_7^* = f_8^* = 0.
$$

Поэтому на функции $f^*$ формула (1.20) превращается в равенство $f_0^* = f^*(1)/25$. Лемма доказана.

Следующая лемма позволит показать, что $f^*$ является единственной (с точностью до постоянного положительного множителя) экстремальной функцией задачи $w_4(d)$.

**Лемма 1.3.** *Допустим, что $f$ есть полином (не выше) девятой степени со свойствами*:

1) *для $f$ справедливо представление*

$$
f(t) = h(t)g(t), \tag{1.55}
$$

*где* $h(t) = (t-d)(t-a)^2(t-b)^2(t-c)^2 = (t-d)(t^3 - \xi t^2 + \eta t - \zeta)^2$, *а* $g$ *есть некоторый полином второй степени;*

2) *в разложении*

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{9} f_\nu R_\nu(t) \tag{1.56}$$

*полинома* $f$ *по многочленам Чебышева второго рода равны нулю хотя бы два из трех (в частности, все три) коэффициента* $f_6, f_7, f_8$.

*Тогда полином* $f$ *с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией (полиномом)* $f^*$, *т.е.* $f = Cf^*$, *где* $C = \mathrm{const}$; *при этом если* $f \in \mathscr{F}_4(d)$, *то* $C > 0$.

Доказательство леммы проведем в несколько этапов.

1) Допустим вначале, что полином $g$ в представлении (1.55) имеет вид

$$g(t) = t^2 + Qt + R \tag{1.57}$$

с некоторыми вещественными коэффициентами $Q, R$. Выпишем явные выражения коэффициентов $f_6, f_7$ и $f_8$ в представлении (1.56) полинома $f$. Нетрудно убедиться, что

$$f(t) = t^9 + A_8 t^8 + A_7 t^7 + A_6 t^6 + \vartheta(t), \tag{1.58}$$

где

$$A_8 = Q - d - 2\xi, \qquad A_7 = 2d\xi + R + 2\eta - dQ - 2\xi Q + \xi^2,$$
$$A_6 = -d\xi^2 - 2\zeta + \xi^2 Q + 2\eta Q - 2\xi R + 2d\xi Q - 2\xi\eta - 2d\eta - dR$$

и, наконец, $\vartheta$ есть некоторый многочлен пятой степени. Подставляя в (1.58) представления (1.32) степеней $t^9, t^8, t^7, t^6$ через многочлены Чебышева второго рода, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_6 = &-\frac{49}{128}\xi - \frac{49}{256}d - \frac{7}{32}\zeta + \frac{49}{256}Q + \frac{7}{32}d\xi\, Q + \frac{7}{64}\xi^2 Q \\ &- \frac{7}{64}d\xi^2 - \frac{7}{64}dR - \frac{7}{32}d\eta + \frac{7}{32}\eta\, Q - \frac{7}{32}\xi\, R - \frac{7}{32}\xi\,\eta, \end{aligned} \tag{1.59}$$

$$f_7 = \frac{1}{16}R + \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{16}\xi^2 - \frac{1}{8}\xi\, Q - \frac{1}{16}dQ + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}d\xi, \tag{1.60}$$

$$f_8 = -\frac{9}{256}d + \frac{9}{256}Q - \frac{9}{128}\xi. \tag{1.61}$$

Налагая на функцию $f$ любые два из трех условий $f_6 = 0, f_7 = 0, f_8 = 0$, т.е. приравнивая правые части любых двух из трех соотношений (1.59)–(1.61) к нулю, получаем систему

$$f_\nu = 0, \quad f_\mu = 0, \qquad 6 \leqslant \nu < \mu \leqslant 8, \tag{1.62}$$

двух линейных уравнений относительно двух неизвестных $Q$ и $R$. Во всех трех возможных случаях определитель этой системы $\Delta_{\nu,\mu}$ отличен от нуля. Например, для системы

$f_7 = 0$, $f_8 = 0$ ее определитель $\Delta_{7,8}$ равен $-9/4096$; на самом деле, для нас важно, что $\Delta_{7,8} \neq 0$.

Таким образом, любая система двух условий (1.62) имеет единственное решение $Q$, $R$. В силу (1.13) функция $f^*$ имеет представление (1.55)+(1.57), и согласно (1.54) для нее выполняются условия (1.62). Отсюда следует, что $Q = q$ и $R = r$. Следовательно, $f = f^*$ есть единственная функция, удовлетворяющая условиям (1.55), (1.57) и (1.62).

2) Предположим, что в представлении (1.55) функции $f$ многочлен $g$ имеет вид $g(t) = Ct^2 + Qt + R$ и при этом $C \neq 0$. Тогда функция $f_C = f/C$ удовлетворяет всем условиям леммы и в ее представлении (1.55) второй множитель имеет вид (1.57). Отсюда, как мы только что показали, следует, что $f/C = f^*$ или, то же самое, $f = Cf^*$. Ясно, что если $f \in \mathscr{F}_4(d)$, то $C > 0$.

3) Наконец покажем, что если для функции $f$ выполняются условия леммы и в соотношении (1.55) второй множитель имеет вид $g(t) = Qt+R$, то $f \equiv 0$. Действительно, функция $\widetilde{f} = f^* + f$ удовлетворяет всем предположениям леммы. Для этой функции справедлива формула $\widetilde{f} = h\widetilde{g}$, в которой $\widetilde{g}$ есть многочлен второй степени $\widetilde{g}(t) = t^2 + \widetilde{Q}t + \widetilde{R}$ с коэффициентами $\widetilde{Q} = q + Q$, $\widetilde{R} = r + R$. Многочлен $\widetilde{g}$ имеет вид (1.57). Отсюда, как уже доказано, следует, что $\widetilde{f} = f^*$, а потому $f \equiv 0$. Лемма 1.3 доказана полностью.

Доказательство теоремы 1.2. В силу леммы 1.2 функция $f^*$, определенная соотношением (1.13), принадлежит множеству $\mathscr{F}_4(d)$ и для нее имеет место равенство $f^*(1) = 25f_0^*$. Поэтому справедлива оценка

$$w_4(d) \leqslant \frac{f^*(1)}{f_0^*} = 25.$$

Докажем обратное неравенство

$$w_4(d) \geqslant 25. \tag{1.63}$$

Для произвольной функции $f \in \mathscr{F}_4(d)$ справедлива квадратурная формула (1.20), (1.21). Коэффициенты $1/25$, $\lambda(d)$, $\lambda(a)$, $\lambda(b)$, $\lambda(c)$ этой формулы положительные, а коэффициенты $L(R_\nu)$, $\nu \geqslant 1$, неотрицательные (точнее, $L(R_\nu) > 0$, $\nu \geqslant 6$, $\nu \neq 9$ и $L(R_\nu) = 0$, $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 9$). В силу свойств (0.4)–(0.6) функции $f \in \mathscr{F}_4(d)$ отсюда следует оценка

$$f_0 = L(f) - \sum_{\nu \geqslant 1} L(R_\nu) f_\nu \leqslant \frac{1}{25} f(1), \tag{1.64}$$

которая влечет неравенство (1.63). Тем самым, обосновано утверждение (1.15); в частности, доказано, что функция $f^*$ является экстремальной в задаче $w_4(d)$.

Для завершения доказательства теоремы 1.2 осталось проверить, что (с точностью до положительного множителя) функция $f^*$ является единственной экстремальной. Функция

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu R_\nu(t) \in \mathscr{F}_4(d) \tag{1.65}$$

является экстремальной в том и только том случае, если на ней неравенство (1.64) обращается в равенство. В силу свойства (1.27) для этого необходимо, чтобы в представлении (1.65) экстремальной функции $f$ коэффициенты $f_\nu$ с номерами $\nu \neq 0, 1, 2, 3, 4, 5, 9$

были равны нулю; в частности, это означает, что функция $f$ есть полином не выше девятой степени. Кроме того, должно выполняться равенство $L(f) = f(1)/25$, которое эквивалентно тому, что

$$f(d) = f(a) = f(b) = f(c) = 0.$$

Таким образом, точка $d$ должна быть по крайней мере простым, а точки $a$, $b$ и $c$ – двойными нулями полинома $f$. Следовательно, $f$ имеет вид $f(t) = h(t)g(t)$, где $h(t) = (t-d)\times(t-a)^2(t-b)^2(t-c)^2$, а $g$ – некоторый многочлен второй степени. Отсюда в силу леммы 1.3 следует, что $f = Cf^*$, где $C$ – некоторая положительная константа. Теорема 1.2 доказана.

**Лемма 1.4.** *Для функции $w_4(s)$, определенной формулой (0.7), справедливы следующие два утверждения: $w_4(s) < w_4(d)$ при $-1 \leqslant s < d$, $w_4(s) > w_4(d)$ при $d < s < 1$.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен $g(t) = 20t + 1 = 20R_1(t) + R_0(t)$. С помощью многочленов $f^*$, $g$ и числа $\varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, определим многочлен (девятой степени)

$$F(t) = F(\varepsilon, t) = \varepsilon\frac{f^*(t)}{f_0} + (1-\varepsilon)g(t).$$

Нуль $\widetilde{s} = -0.05$ многочлена $g$ лежит между точками $c$ и $d$ (см. (1.18), (1.5)), причем многочлен $g$ на полуинтервалах $[-1, \widetilde{s})$ и $(\widetilde{s}, d]$ соответственно отрицательный и положительный. Поэтому при любом $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, полином $F$ на отрезке $[-1, \widetilde{s}]$ отрицательный. Далее, поскольку, $F(\widetilde{s}) < 0$, $F(d) > 0$, то многочлен $F$ имеет на интервале $(\widetilde{s}, d)$ нуль; наименьший из них обозначим через $s(\varepsilon)$. Естественно положить $s(0) = \widetilde{s} = -0.05$, $s(1) = d$. Для $t \in [\widetilde{s}, d]$ функция $F(\varepsilon, t)$ по переменному $\varepsilon \in [0,1]$ убывает, поэтому функция $s(\varepsilon)$ возрастает (от значения $s(0) = \widetilde{s}$ до значения $s(1) = d$). Нетрудно понять, что функция $s(\varepsilon)$ непрерывна на отрезке $\varepsilon \in [0,1]$.

Полином $F(t) = F(\varepsilon, t)$ удовлетворяет условию $F(t) \leqslant 0$, $-1 \leqslant t \leqslant s(\varepsilon)$. Кроме того, коэффициенты Фурье $F_k$, $0 \leqslant k \leqslant 9$, в разложении $F$ по многочленам Чебышева второго рода, очевидно, неотрицательные и $F_0 = 1$. Следовательно, $F$ принадлежит классу $\mathscr{F}_4(s(\varepsilon))$. Поэтому при $0 \leqslant \varepsilon < 1$ имеет место оценка $w_4(s(\varepsilon)) \leqslant F(1) = 25\varepsilon + (1-\varepsilon)g(1) = 25\varepsilon + (1-\varepsilon)21 < 25 = w_4(d)$. Отсюда следует, что $w_4(s) < 25 = w_4(d)$ для $s \in [\widetilde{s}, d)$. Функция $w_4(s)$ по переменному $s \in [-1, 1)$ не убывает, а потому $w_4(s) < 25 = w_4(d)$ при всех $s \in [-1, d)$.

Пусть теперь $s > d$. Нам нужно доказать, что $w_4(s) > w_4(d) = 25$. Будем рассуждать от противного. Допустим, что $w_4(s) \leqslant w_4(d)$, а значит, на самом деле, $w_4(s) = w_4(d) = 25$. В силу теоремы 2.1 работы [8] в задаче $w_4(s)$ существует экстремальная функция; обозначим ее символом $f^s$. Поскольку $s > d$ и $w_4(s) = w_4(d)$, то функция $f^s$ будет являться экстремальной и в задаче $w_4(d)$. Согласно теореме 1.2 в задаче $w_4(d)$ экстремальная функция единственная (с точностью до положительного постоянного множителя) и, значит, $f^s = Cf^*$, $C > 0$. Однако, если $t \in (d, s]$, то $f^*(t) > 0$, а $f^s(t) \leqslant 0$, что противоречиво. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Теорема 1.1 есть следствие теоремы 1.2 и леммы 1.4.

**2. Вычисление значения $s_4(24)$.** Определим многочлен

$$\begin{aligned} h(z) = {} & 6068404224\,z^{24} - 5559746560\,z^{23} - 32435331072\,z^{22} + 30162632704\,z^{21} \\ & + 76657888256\,z^{20} - 69950994432\,z^{19} - 105547058176\,z^{18} + 90905438208\,z^{17} \\ & + 93805633312\,z^{16} - 72899067584\,z^{15} - 56276296952\,z^{14} + 37463407248\,z^{13} \\ & + 23144486195\,z^{12} - 12425086062\,z^{11} - 6505367271\,z^{10} + 2613609108\,z^{9} \\ & + 1227229561\,z^{8} - 331172622\,z^{7} - 149222121\,z^{6} + 22205608\,z^{5} \\ & + 10721860\,z^{4} - 490544\,z^{3} - 368104\,z^{2} - 10880\,z + 2432. \end{aligned} \tag{2.1}$$

По выше примененной схеме можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** *На полуинтервале $[-1,1)$ уравнение $w_4(s) = 24$ имеет единственное решение $s = x_{12}$, где $x_{12} = 0.4785451836\ldots$ есть двенадцатый (по возрастанию) вещественный корень полинома* (2.1).

Обоснование этой теоремы базируется на приводимых ниже трех утверждениях. В формулировке этих утверждений используются обозначения: $d = x_{12} = 0.4785451836\ldots$ есть двенадцатый (по возрастанию) вещественный корень полинома $h$, заданного формулой (2.1); $u = -1.5458619083\ldots$ есть единственный вещественный корень многочлена

$$\begin{aligned} G(z) = {} & (3040\,d^5 + 2304\,d^4 - 1264\,d^3 - 832\,d^2 + 144\,d + 64)z^3 \\ & + (3040\,d^6 + 2784\,d^5 - 416\,d^4 - 720\,d^3 - 120\,d^2 + 32\,d + 8)z^2 \\ & + (3040\,d^7 + 2304\,d^6 - 4184\,d^5 - 2464\,d^4 + 1732\,d^3 + 704\,d^2 - 204\,d - 64)z \\ & + 1824\,d^7 + 288\,d^6 - 2856\,d^5 - 753\,d^4 + 1050\,d^3 + 255\,d^2 - 108\,d - 24, \end{aligned}$$

$$v = \frac{6\,d - 3 + 15\,d^2 + 7\,du - u + 6\,d^2u}{2(4 - 19\,d^2 - 3\,d)} = 0.6856630844\ldots,$$

$$w = \frac{du + v - u - d - 3\,dv}{3 - 7\,d} = -0.082479688\ldots,$$

$$q = \frac{8\,vu + 16\,du^2 + 8\,d^2u + d + 2\,u + 8\,u^3 - 8\,w}{8\,du - 8\,v + 12\,u^2 + 4\,d^2 - 7} = -2.1915353439\ldots,$$

$$\begin{aligned} r = {} & \frac{14 + 30\,v + 16\,v^2 - 16\,wu - 13\,u^2 + 8\,duv + 4\,u^4}{8\,du - 8\,v + 12\,u^2 + 4\,d^2 - 7} \\ & + \frac{8\,du^3 + 12\,d^2u^2 - 8\,vd^2 - 8\,dw + 2\,du - 7\,d^2}{8\,du - 8\,v + 12\,u^2 + 4\,d^2 - 7} = 1.4453876673\ldots, \end{aligned}$$

и, наконец,

$$a = -0.8602964888\ldots, \qquad b = -0.4898419662\ldots, \qquad c = -0.1957234532\ldots$$

есть корни многочлена $z^3 - uz^2 + vz - w$.

**Теорема 2.2.** *Функция*

$$f^*(t) = (t - d)(t^3 - ut^2 + vt - w)^2(t^2 + qt + r) \tag{2.2}$$

*принадлежит множеству* $\mathscr{F}_4(d)$ *и является единственной (с точностью до положительного постоянного множителя) экстремальной функцией (решением) задачи* (0.7) *при* $m = 4$, $s = d$. *Помимо того, справедливы равенства*

$$w_4(d) = \frac{f^*(1)}{f_0^*} = 24.$$

При доказательстве этой теоремы используются следующие два утверждения.

**Лемма 2.1.** *Функция* $f^*$, *определенная формулой* (2.2), *принадлежит множеству* $\mathscr{F}_4(d)$. *Точнее, функция* $f^*$ *имеет неотрицательные коэффициенты в ее разложении* $f^*(t) = \sum_{k=0}^{9} f_k^* R_k(t)$ *по многочленам Чебышева второго рода, причем*

$$f_k^* > 0 \quad \text{при } 0 \leqslant k \leqslant 9,\ k \neq 6, 7, \qquad f_6^* = f_7^* = 0.$$

*Кроме того,* $f^*(t) \leqslant 0$ *при* $t \in [-1, d]$, $f^*(t) > 0$ *при* $t \in (d, 1]$.

**Лемма 2.2.** *Для каждой функции* $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k(t) \in \Phi_4$ *имеет место квадратурная формула*

$$f_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = L(f) - \sum_{\nu \geqslant 1} L(R_\nu) f_\nu,$$

*в которой* $L$ *есть функционал*

$$L(f) = \frac{1}{24} f(1) + \lambda(a) f(a) + \lambda(b) f(b) + \lambda(c) f(c) + \lambda(d) f(d)$$

*с коэффициентами*

$$\lambda(a) = \Lambda(a,b,c,d) = 0.0996029075\ldots, \qquad \lambda(b) = \Lambda(b,c,d,a) = 0.1465314359\ldots,$$
$$\lambda(c) = \Lambda(c,d,a,b) = 0.3337257176\ldots, \qquad \lambda(d) = \Lambda(d,a,b,c) = 0.3784732721\ldots,$$

*где функция* $\Lambda$ *определена формулой* (1.19). *Кроме того, функционал* $L$ *обладает свойствами*

$$L(1) = 1, \qquad L(R_\nu) = 0 \quad \text{при } \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9,$$
$$L(R_\nu) > 0 \quad \text{при } \nu \geqslant 6,\ \nu \neq 8, 9.$$

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


[1] Mackay A. L. The packing of three-dimensional spheres on surface of a four-dimensional hypersphere // J. Phys. A: Math. Gen. 1980. V. 13. P. 3373–3379.
[2] Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
[3] Odlyzko A. M., Sloane N. J. A. New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in $n$ dimensions // J. of Combin. Theory Ser. A. 1979. V. 26. №2. P. 210–214.
[4] Delsarte Ph. Bounds for unrestricted codes, by linear programming // Philips Res. Rep. 1972. V. 27. P. 272–289.
[5] Дельсарт Ф. Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976.
[6] Delsarte P., Goethalts J. M., Seidel J. J. Spherical codes and designs // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.
[7] Кабатянский Г. А., Левенштейн В. И. О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Проблемы передачи информации. 1978. Т. 14. №1. С. 3–25.
[8] Арестов В. В., Бабенко А. Г. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.
[9] Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
[10] Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices and Groups (Second Edition). New York: Springer Verlag, 1993.
[11] Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices and Groups (Third Edition). New York: Springer Verlag, 1998.
[12] Rankin R. A. The closest packing of spherical caps in $n$ dimensions // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1955. V. 2. P. 139–144.
[13] Левенштейн В. И. О границах для упаковок в $n$-мерном евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. С. 1299–1303.
[14] Сидельников В. М. Об экстремальных многочленах, используемых при оценках мощности кода // Проблемы передачи информации. 1980. Т. 16. №3. С. 17–30.
[15] Bannai E., Sloane N. J. A. Uniqueness of certain spherical codes // Canad. J. Math. 1981. V. 33. P. 437–449.
[16] Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 1983. Т. 40. С. 44–110.
[17] Юдин В. А. Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов // Дискретная матем. 1992. Т. 4. №2. С. 115–121.
[18] Boyvalenkov P. Extremal polynomials for obtaining bounds for spherical codes and designs // Discrete Comput. Geom. 1995. V. 14. P. 167–183.
[19] Boyvalenkov P. G., Danev D. P., Bumova S. P. Upper bounds on the minimum distance of spherical codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1996. V. 42. №5. P. 1576–1581.
[20] Boyvalenkov P. On the upper bounds for the kissing numbers // Serdica. 1992. V. 18. P. 278–285.
[21] Boyvalenkov P. On the extremality of the polynomials used for obtaining the best known upper bounds for the kissing numbers // J. Geom. 1994. V. 49. P. 67–71.
[22] Hardin R. H., Sloane N. J. A., Smith W. D. Spherical codes // `http://www.research.att.com/~njas/packings/index.html`.
[23] Галиев Ш. И. Многократные упаковки и покрытия сферы // Дискретная матем. 1996. Т. 8. №3. С. 148–160.
[24] Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983.



(В.В. Арестов) Уральский государственный университет, г. Екатеринбург
(А.Г. Бабенко) Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург
*E-mail*: `Vitalii.Arestov@usu.ru`, `Alexander.Babenko@imm.uran.ru`



Поступило 02.08.1999
Исправленный вариант 01.03.2000