ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 5 1998

УДК 517.518.837

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА – СТЕЧКИНА В ПРОСТРАНСТВЕ $L^2(\mathbb{R}^m)$ [1]

А. Г. Бабенко

Получено точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ между наилучшим приближением функции целыми функциями заданного экспоненциального сферического типа и сферическим модулем непрерывности функции вещественного порядка $r \geq 1$; установлены оценки сверху и снизу (отличающиеся друг от друга в два раза) для наименьшего значения аргумента модуля непрерывности, начиная с которого точная константа в неравенстве Джексона – Стечкина выходит на свой минимум.

Введение. Хорошо известно неравенство Джексона [1]

$$E_n(f)_C \leq \mathcal{K}\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_C, \quad f \in C(\mathbb{T}),$$

в пространстве $C_{2\pi}$ вещественных непрерывных 2π-периодических функций или, тоже самое, в пространстве $C(\mathbb{T})$ непрерывных вещественных функций на одномерном торе $\mathbb{T}$ между равномерным приближением функции $f \in C(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами степени n и ее равномерным модулем непрерывности первого порядка с конечной константой $\mathcal{K}$, не зависящей ни от f, ни от n. Этот результат был перенесен на случай старших модулей непрерывности порядка $r = 2, 3\ldots$ (Н.И.Ахиезер [2, стр. 217, 190] – случай $r = 2$, С.Б.Стечкин [3] – общий случай) и на случай функций многих переменных (см. [4], [5]). Первый точный результат в неравенстве Джексона установил Н.П.Корнейчук [6] в пространстве $C(\mathbb{T})$ (с первым модулем непрерывности). Н.И.Черных [7], [8] нашел точную константу в неравенстве Джексона – Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{T})$ (с модулем непрерывности порядка $r = 1, 2, 3\ldots$).

В настоящее время имеется ряд точных результатов в этом направлении, как для пространств функций одной переменной, так и для пространств функций нескольких переменных. Более подробно история этого вопроса изложена в работе автора [9]. Исторические сведения, относящиеся непосредственно к теме исследования данной работы, будут приведены ниже. Упомянем сейчас лишь работу В.А.Юдина [10], в которой доказано точное неравенство Джексона между наилучшим среднеквадратичным приближением функции на многомерном торе $\mathbb{T}^m$, $m \geq 2$, тригонометрическими полиномами заданного сферического порядка и ее классическим модулем непрерывности первого порядка определяемого с помощью выпуклого, замкнутого, центрально симметричного тела. При доказательстве этого неравенства он, фактически, получил родственный результат в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты N 96-01-00121, N 96-01-00122

В данной работе на основе методов Н.И.Черныха, В.А.Юдина, с использованием схемы работы автора [9], найдена наименьшая константа в неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших сферических среднеквадратичных приближений функций, заданных на вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, целыми функциями заданного экспоненциального сферического типа в терминах сферического модуля непрерывности вещественного порядка $r \geq 1$.

1. Постановка задачи. История вопроса. В данной работе на основе понятия сферического сдвига или, что то же самое, сферического среднего (см. [11, гл. 1, 4]) по схеме Грюнвальда – Летникова (см. [12, § 20]) определяется разностный оператор порядка $r > 0$ (необязательно целого) с шагом $t \in \mathbb{R}$, а с помощью него – соответствующий модуль непрерывности комплексной функции $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$, в терминах которого затем ставится задача о точной константе в неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших приближений в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ классом W_σ целых функций из $L^2(\mathbb{R}^m)$ экспоненциального сферического типа $\sigma > 0$. С помощью известных рассуждений, которые использовались, к примеру, В.Ю.Поповым в работах [13] – [15], указанная выше многомерная задача сводится (см. пункт 2 ниже) к одномерной задаче, в свою очередь, последняя задача эквивалентна (см. пункт 3 ниже) задаче о точном неравенстве Джексона – Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, x^{m-1})$ вещественных измеримых функций на полуоси $\mathbb{R}_+$, суммируемых с квадратом с весом x^{m-1}.

Итак, пусть $L^2 = L^2(\mathbb{R}^m)$ есть гильбертово пространство комплексных функций на $\mathbb{R}^m$ с обычным скалярным произведением и нормой

$$(f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\bar{g}(x)\,dx\,, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}\,.$$

В дальнейшем мы будем часто использовать преобразование Фурье функции $f \in L^2$, определив его стандартным образом формулой (см. [16])

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-ix\cdot y} dx,$$

здесь $x \cdot y = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k y_k$ – скалярное произведение векторов x, y из $\mathbb{R}^m$. Функцию $f \in L^2$ можно выразить через ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ по формуле

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(y) e^{ix\cdot y} dy. \tag{1}$$

Для преобразований Фурье в пространстве L^2 имеет место формула Паншереля

$$(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g})\,, \quad f, g \in L^2. \tag{2}$$

Обозначим через W_σ класс целых функций экспоненциального сферического типа $\sigma > 0$, принадлежащих пространству L^2 (см. [5, § 3.2.6], [17, гл. 3, § 4], [18]). Класс W_σ состоит из функций $g \in L^2$, носитель $\operatorname{supp} \widehat{g}$ преобразования Фурье которых лежит в евклидовом шаре

$\mathbb{B}^m_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^m : \ |x| = \sqrt{x \cdot x} \le \sigma\}$ радиуса $\sigma > 0$ с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$. Наилучшим приближением функции f из L^2 классом W_σ называется величина

$$E_\sigma(f) = \inf\{\|f - g\| \ : \ g \in W_\sigma\}.$$

Сферический сдвиг с шагом $t \in \mathbb{R}$ или, что то же самое, сферическое среднее (см. [11, гл. 4, стр. 72]) есть оператор s_t, действующий по правилу

$$s_t f(x) = \frac{1}{|\ \mathbb{S}^{m-1}\,|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} f(x + t\xi) d\xi, \tag{3}$$

где $\mathbb{S}^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \ |x| = 1\}$ – единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^m$, а $|\ \mathbb{S}^{m-1}\ |$ – площадь ее поверхности. В случае $m = 1$ единичная сфера $\mathbb{S}^0$ состоит из двух точек $-1, 1$ и под ее мерой мы понимаем число 2. Таким образом, оператор s_t в этом случае приобретает вид $s_t f(x) = \frac{1}{2}\{f(x - t) + f(x + t)\}$. Известно, что норма оператора s_t, как оператора из $L^2(\mathbb{R}^m)$ в $L^2(\mathbb{R}^m)$, равна единице (см., например, формулу (27) ниже). Поэтому можно применить конструкцию Грюнвальда – Летникова (см. [12, § 20]) для построения разностного оператора порядка $r > 0$ (не обязательно целого). А именно, разностным оператором порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbb{R}$ называется оператор

$$\Delta^r_t = (I - s_t)^{r/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{r/2}{k} s^k_t, \tag{4}$$

где I есть тождественный оператор и $s^0_t = I$. Для функции $f \in L^2$ ее модулем непрерывности порядка $r > 0$ называется следующая функция аргумента $\tau \ge 0$

$$\omega_r(f, \tau) = \sup_{|t| \le \tau} \|\Delta^r_t f\|.$$

Для функций, заданных на многомерной сфере соответствующие разностные операторы и модули непрерывности дробного порядка рассматривал Х.П.Рустамов [19].

В данной работе изучается задача о точной константе $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\sigma(\tau, r, m)$, $\sigma > 0, \ \tau > 0, \ r > 0, \ m \ge 1$ в неравенстве Джексона – Стечкина

$$E_\sigma(f) \le \mathcal{K} \omega_r \left(f, \frac{\tau}{\sigma}\right), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^m). \tag{5}$$

Наименьшую константу в этом неравенстве можно представить в виде

$$\mathcal{K}_\sigma(\tau, r, m) = \sup \left\{ \frac{E_\sigma(f)}{\omega_r\left(f, \frac{\tau}{\sigma}\right)} \ : \ f \in L^2(\mathbb{R}^m), \ f \not\equiv 0 \right\}. \tag{6}$$

Нетрудно показать, что величина $\mathcal{K}_\sigma(\tau, r, m)$ не зависит от σ; в следующем пункте будет дано краткое доказательство этого утверждения.

Перейдем к изложению известных результатов, относящихся к задаче о точной константе (6) в неравенстве (5). Авторы приводимых ниже результатов применяют другие модули непрерывности, но при доказательстве они переходят к задачам, которые возникают и в данной работе. Мы приведем указанные результаты в принятых здесь обозначениях.

Начнем с одномерного случая. И.И.Ибрагимов и Ф.Г.Насибов [22] получили такое утверждение

Теорема A ([22]). *Для произвольного* $\sigma > 0$ *и любой функции* $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \not\equiv 0$, *справедливы неравенства*

$$E_\sigma(f) < \omega_1\left(f, \frac{\pi}{\sigma}\right), \tag{7}$$

$$E_\sigma(f) < \omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sigma}\right). \tag{8}$$

Следующий результат был независимо от предыдущего доказан В. Ю. Поповым [23].

Теорема B ([23]). *Пусть* $\sigma > 0$. *Тогда для каждой ненулевой функции* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *выполняются неравенства*

$$E_\sigma(f) < \omega_1\left(f, \frac{\tau}{\sigma}\right), \quad \tau \geq \pi, \tag{9}$$

$$E_\sigma(f) < \sqrt{2^r \binom{2r}{r}^{-1}}\, \omega_r\left(f, \frac{\tau}{\sigma}\right), \quad \tau \geq 2\pi, \quad r = 2, 3, 4, \ldots \tag{10}$$

Эти неравенства являются точными, т.е. для величины (6) *в одномерном случае* ($m = 1$) *справедливы равенства*

$$\mathcal{K}_\sigma(\tau, 1, 1) = 1 \quad \textit{при} \quad \tau \geq \pi; \tag{11}$$

$$\mathcal{K}_\sigma(\tau, r, 1) = \sqrt{2^r \binom{2r}{r}^{-1}} \quad \textit{при} \quad \tau \geq 2\pi, \quad r = 2, 3, 4, \ldots \tag{12}$$

Можно утверждать, что

$$\mathcal{K}_\sigma(\tau, 1, 1) > 1 \quad \text{при} \quad 0 < \tau < \pi. \tag{13}$$

Этот факт следует из результатов Н.И.Черныха [7], [20] о наименьшем значении аргумента модуля непрерывности (первого порядка), начиная с которого точная константа в неравенстве Джексона в пространстве $L^2(\mathbb{T})$ выходит на свой минимум. Утверждение (13) вытекает также из более позднего результата Логана [21].

Перейдем к многомерному случаю. В.Ю.Попов [13] доказал, что

$$\mathcal{K}_\sigma(\tau, 1, m) = 1, \quad \sigma > 0, \quad \tau \geq 2\pi, \quad m = 2, 3. \tag{14}$$

Как уже было отмечено выше, В.А.Юдин [10] установил точное неравенство Джексона между наилучшим среднеквадратичным приближением функции на многомерном торе $\mathbb{T}^m$, $m \geq 2$, тригонометрическими полиномами заданного сферического порядка и ее классическим модулем непрерывности первого порядка определяемого с помощью выпуклого, замкнутого, центрально симметричного тела. При доказательстве этого неравенства он, фактически, получил родственный результат в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$. В частном случае когда указанное выше тело является евклидовым шаром, из результата В.А.Юдина можно вывести равенство

$$\mathcal{K}_\sigma(\tau, 1, m) = 1, \quad \sigma > 0, \quad \tau \geq 2\tau_{(m-2)/2}, \quad m = 2, 3, 4, \ldots, \tag{15}$$

где τ_ν – первый положительный нуль функции Бесселя J_ν индекса ν (см. формулу (19) ниже). Собственно понимание того, как указанный вывод можно осуществить, позволило автору данной работы получить оценку

$$\mathcal{K}_\sigma(\tau, r, m) \leq 1, \quad \sigma > 0, \quad \tau \geq 2\tau_{(m-2)/2}, \quad r \geq 1, \quad m = 2, 3, 4, \ldots, \tag{16}$$

которая вместе с оценкой снизу

$$\mathcal{K}_\sigma(\tau, r, m) \geq 1, \quad \sigma > 0, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad m = 2, 3, 4, \ldots, \tag{17}$$

вытекающей из результата В.В.Арестова [24, п. 3], [9, лемма 4.2], влечет решение задачи (6) при наложенных в (16) ограничениях, а именно, что

$$\mathcal{K}_\sigma(\tau, r, m) = 1, \quad \sigma > 0, \quad \tau \geq 2\tau_{(m-2)/2}, \quad r \geq 1, \quad m = 2, 3, 4, \ldots \tag{18}$$

Это утверждение и является основным результатом настоящей работы.

Отметим еще, что из работ [13] – [15] следует решение задачи (6) о вычислении величины $\mathcal{K}_\sigma(\tau, r, m)$ для $\sigma > 0$, $r > 0$, $m = 2, 3, 4, \ldots$, при "малых" τ. Подробнее, пусть $\nu = (m-2)/2$, $m = 2, 3, 4, \ldots$, минимальное положительное значение аргумента нормированной функции Бесселя j_ν (см. формулы (20), (19) ниже), при котором она достигает локального минимума, обозначим через h_ν, а минимальное положительное значение аргумента функции j_ν, при котором достигается ее локальный максимум, обозначим через t_ν. Единственный корень уравнения $j_\nu(u) = j_\nu(t_\nu)$, $u \in (0, h_\nu)$, обозначим через a_ν. Тогда для любых $\sigma > 0$, $\tau \in (0, a_\nu]$, $r > 0$, $m \geq 2$ имеет место равенство

$$\mathcal{K}^2_\sigma(\tau, r, m) = \{1 - j_\nu(\tau)\}^{-r}.$$

В одномерном случае ($m = 1$) к настоящему времени нет ни одной точки из области $0 < \tau < \pi$, $\sigma > 0$, $r > 0$, при которой была бы найдена величина $\mathcal{K}_\sigma(\tau, r, 1)$.

2. Редукция к одномерной задаче для функций Бесселя. Функция Бесселя индекса ν определяется так (см. стр. 51, формула (8) в [25], стр. 12, формула (2) в [26])

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}. \tag{19}$$

Нормированной функцией Бесселя индекса ν называется функция

$$j_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) \left(\frac{2}{z}\right)^\nu J_\nu(z). \tag{20}$$

Как известно (см. [25]; § 7.3, стр. 23, формула (4) и § 7.13, стр. 98, формула (3) в [26]), она обладает следующими свойствами

$$|j_\nu(t)| \le j_\nu(0) = 1, \quad \nu \ge -\frac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

$$\lim_{u\to\infty} j_\nu(u) = 0, \quad \nu > -\frac{1}{2}. \tag{22}$$

Приведем два важных примера таких функций

$$j_{-\frac{1}{2}}(t) = \cos t, \quad j_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{t}\sin t.$$

С помощью формулы Планшереля (2) нетрудно убедится, что величина наилучшего приближения функции $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ классом W_σ выражается через преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции f формулой

$$E_\sigma^2(f) = \int\limits_{|y|\ge\sigma} |\widehat{f}(y)|^2 dy. \tag{23}$$

Зафиксируем произвольный вектор $y \in \mathbb{R}^m$ и положим $e_y(x) = e^{ix\cdot y}$, $x \in \mathbb{R}^m$. Известно (см. гл. 4, стр. 72, формулы (4.1)–(4.4) в [11]), что оператор s_t сферического сдвига с шагом $t \in \mathbb{R}$ (см. (3)) действует на функцию e_y следующим образом

$$s_t e_y(x) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} e^{i(x+t\xi)\cdot y} d\xi =$$

$$= \frac{e^{ix\cdot y}}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} e^{it\xi\cdot y} d\xi = j_{\frac{m-2}{2}}(t|y|) e_y(x). \tag{24}$$

На последнем шаге в (24) мы воспользовались известными соотношениями для усреднения экспоненты по сфере (см. [11, гл. 1, стр. 15–16], [16], [27, гл. 3, § 8], [13]). Таким образом, для функции $s_t e_y$ имеем, окончательно, формулу

$$s_t e^{ix\cdot y} = j_{\frac{m-2}{2}}(t|y|) e^{ix\cdot y}, \quad t \ge 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^m. \tag{25}$$

Применив k раз к обеим частям равенства (1) оператор сферического сдвига и воспользовавшись соотношением (25), получим

$$\begin{aligned} s_t^k f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(y) \left(s_t^k e^{ix\cdot y}\right) dy = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} j^k_{\frac{m-2}{2}}(t|y|) \widehat{f}(y) e^{ix\cdot y} dy, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{26}$$

Это соотношение в силу свойства (21), влечет равенство единице нормы оператора s_t^k (как оператора из $L^2(\mathbb{R}^m)$ в $L^2(\mathbb{R}^m)$) при любых $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$; в частности (при $k = 1$) имеем

$$\|s_t\| = 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Исходя из определения (4) разностного оператора, с помощью формулы (26) получим представление

$$\Delta_t^r f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left\{1-j_{\frac{m-2}{2}}(t|y|)\right\}^{\frac{r}{2}}\widehat{f}(y)e^{ix\cdot y}dy,\quad f\in L^2(\mathbb{R}^m),\tag{28}$$

для любых $t\in\mathbb{R}$, $r>0$, $m\geq 1$. Отсюда в силу формулы Планшереля следует, что

$$\|\Delta_t^r f\|^2=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left\{1-j_{\frac{m-2}{2}}(t|y|)\right\}^r|\widehat{f}(y)|^2dy.\tag{29}$$

Формулы (29) и (23) сводят многомерную задачу (6) к одномерной экстремальной задаче о точной константе $\mathcal{C}=\mathcal{C}_\sigma(\tau,r,\nu)$ в неравенстве

$$\int\limits_\sigma^\infty F(u)du\leq\mathcal{C}\cdot\sup_{0\leq t\leq\tau/\sigma}\int\limits_0^\infty\{1-j_\nu(tu)\}^rF(u)du\tag{30}$$

при $\sigma>0$, $\tau>0$, $r>0$, $\nu=(m-2)/2$ на множестве всех неотрицательных функций $F\in L(\mathbb{R}_+)$ (верхняя грань по множеству $|t|\leq\tau/\sigma$ в правой части (30) заменена на верхнюю грань по множеству $0\leq t\leq\tau/\sigma$ исходя из свойства четности нормированной функции Бесселя j_ν). Для точной константы $\mathcal{C}_\sigma(\tau,r,\nu)$ в неравенстве (30) справедлива формула

$$\mathcal{C}_\sigma(\tau,r,\nu)=\sup_{F\in\mathcal{F}^+(\sigma)}\frac{\int\limits_\sigma^\infty F(u)du}{\sup\limits_{0\leq t\leq\tau/\sigma}\int\limits_\sigma^\infty\{1-j_\nu(tu)\}^rF(u)du},\tag{31}$$

где

$$\mathcal{F}^+(\sigma)=\{F\in L(\sigma,\infty):\ F\not\equiv 0, F\geq 0\}$$

есть множество функций ненулевых, неотрицательных и суммируемых на полуоси (σ,∞). При этом константы (6) и (31) связаны соотношением

$$\mathcal{K}_\sigma^2(\tau,r,m)=\mathcal{C}_\sigma\left(\tau,r,\frac{m-2}{2}\right)\tag{32}$$

для $\sigma>0$, $\tau>0$, $r>0$, $m=1,2,\ldots$

Убедимся, что величина $\mathcal{C}_\sigma(\tau,r,\nu)$ не зависит от σ. В интегралах, участвующих в (31), произведем замену переменных $v=u/\sigma$. В результате получим

$$\int\limits_\sigma^\infty F(u)du=\sigma\int\limits_1^\infty F(\sigma v)dv,\tag{33}$$

$$\int\limits_\sigma^\infty\{1-j_\nu(tu)\}^rF(u)du=\sigma\int\limits_1^\infty\{1-j_\nu(\sigma tv)\}^rF(\sigma v)dv.\tag{34}$$

Для функции $F \in \mathcal{F}^+(\sigma)$ рассмотрим функцию $\Phi(v) = F(\sigma v)$; ясно, что $\Phi \in \mathcal{F}^+(1)$. Построенное отображение осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathcal{F}^+(\sigma)$ и $\mathcal{F}^+(1)$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\sigma(\tau,r,\nu) &= \sup_{F\in\mathcal{F}^+(\sigma)} \frac{\displaystyle\int_1^\infty F(\sigma v)dv}{\displaystyle\sup_{0\le t\le\tau/\sigma}\int_1^\infty \{1-j_\nu(\sigma t v)\}^r F(\sigma v)dv} = \\ &= \sup_{\Phi\in\mathcal{F}^+(1)} \frac{\displaystyle\int_1^\infty \Phi(v)dv}{\displaystyle\sup_{0\le\widetilde{t}\le\tau}\int_1^\infty \{1-j_\nu(\widetilde{t}\cdot v)\}^r \Phi(v)dv} = \mathcal{C}_1(\tau,r,\nu);\end{aligned}$$

здесь была введена новая переменная $\widetilde{t} = \sigma t$. Таким образом, принимая во внимание равенство (32), получаем, что при $\sigma > 0$, $\tau > 0$, $r > 0$ выполняются равенства

$$\mathcal{C}_\sigma(\tau,r,\nu) = \mathcal{C}_1(\tau,r,\nu), \quad \nu \ge -\frac{1}{2}; \tag{35}$$

$$\mathcal{K}_\sigma(\tau,r,m) = \mathcal{K}_1(\tau,r,m), \quad m = 1,2,3,\dots \tag{36}$$

3. Неравенство Джексона – Стечкина в $L^2(\mathbb{R}_+, x^{2\nu+1})$, $\nu \ge -\frac{1}{2}$. К задаче (31) приводит также вопрос о точном неравенстве Джексона – Стечкина в пространстве $L^2_\nu = L^2(\mathbb{R}_+, x^{2\nu+1})$, $\nu \ge -1/2$, вещественных функций на полуоси $\mathbb{R}_+$ со следующим скалярным произведением и нормой

$$(F,G)_\nu = \int_0^\infty F(x)G(x)x^{2\nu+1}dx, \quad \|F\|_\nu = \sqrt{(F,F)_\nu}.$$

Для функций из L^2_ν нам понадобятся известные (см. [28, стр. 112, 113], комментарии Н.И.Ахиезера к книге [29], стр. 211, 212, формулы (1), (2)) формулы разложения в интеграл Фурье – Ганкеля по нормированным функциям Бесселя $j_\nu(xy)$

$$G(x) = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty \breve{G}(y)j_\nu(xy)y^{2\nu+1}dy, \tag{37}$$

где $\breve{G} = \breve{G}_\nu$ есть преобразование Ганкеля функции $G \in L^2_\nu$, т.е.

$$\breve{G}(y) = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty G(x)j_\nu(xy)x^{2\nu+1}dx,$$

В случае $\nu = -1/2$ преобразование Ганкеля $\breve{G} = \breve{G}_{-1/2}$ переходит в обычное косинус-преобразование Фурье, т.е. для $G \in L^2_{-1/2}$ справедливы формулы

$$G(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \breve{G}(y)\cos xydy, \quad \breve{G}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty G(x)\cos xydx.$$

Для $\sigma > 0$ определим класс $W_{\sigma,\nu}$ функций $G \in L^2_\nu$, у которых преобразование Ганкеля сосредоточено на отрезке $[0,\sigma]$, т.е.

$$W_{\sigma,\nu} = \left\{ G \in L^2_\nu : \quad \operatorname{supp} \check{G} \subseteq [0,\sigma] \right\}.$$

В пространстве L^2_ν имеет место следующее равенство Парсеваля

$$(F,G)_\nu = (\check{F},\check{G})_\nu, \quad F,G \in L^2_\nu. \tag{38}$$

Из этого равенства следует, что для величины

$$E_\sigma(F)_\nu = \inf\{\|F-G\|_\nu : \quad G \in W_{\sigma,\nu}\}$$

наилучшего приближения функции $F \in L^2_\nu$ классом $W_{\sigma,\nu}$ справедлива формула

$$E^2_\sigma(F)_\nu = \int\limits_\sigma^\infty |\check{F}(y)|^2 y^{2\nu+1} dy. \tag{39}$$

Рассмотрим оператор сдвига $T_t = T_{t,\nu}$ с шагом $t \in \mathbb{R}_+$, действующий на функции $f \in L^2_\nu$ по правилу

$$T_t F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{F(x+t) + F(|x-t|)\}, & \nu = -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{\alpha(\nu)} \int\limits_0^\pi F\left(\sqrt{t^2+x^2-2xt\cos\varphi}\right) \sin^{2\nu}\varphi d\varphi, & \nu > -\frac{1}{2}, \end{cases} \tag{40}$$

где $\alpha(\nu) = \int\limits_0^\pi \sin^{2\nu}\varphi d\varphi$. Зафиксируем $y \in \mathbb{R}_+$ и рассмотрим действие этого оператора на функцию $\beta_y(x) = j_\nu(yx)$. В 1875 году Л.Гегенбауэр (см. [25, стр. 400]) доказал важное тождество, именуемое формулой умножения

$$T_t \beta_y(x) = \beta_y(t)\beta_y(x),$$

т.е.

$$T_t j_\nu(yx) = j_\nu(yt) j_\nu(yx), \quad \nu \geq -\frac{1}{2}, \quad t,x,y \in \mathbb{R}_+. \tag{41}$$

В случае $\nu = -1/2$ формула (41) переходит в хорошо известную формулу из тригонометрии

$$\frac{1}{2}\{\cos y(x+t) + \cos y(x-t)\} = \cos yt \cos yx.$$

Свойства оператора сдвига (40) исследовал Б.М.Левитан, который, в частности, доказал [28, стр. 125] его самосопряженность, при этом существенную роль сыграла формула умножения (41).

Лемма A ([28]). *Для любых функций F,G из пространства L^2_ν, $\nu \geq -1/2$, справедливо следующее равенство*

$$(T_t F, G)_\nu = (F, T_t G)_\nu, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{42}$$

Применяя равенства (37), (41), а также соображения п.1 выше, определим оператор конечной разности порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbb{R}_+$

$$\delta_t^r = (I - T_t)^{r/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{r/2}{k} T_t^k,$$

где I – тождественный оператор и $T_t^0 = I$. Соответствующий модуль непрерывности порядка $r > 0$ функции $F \in L_\nu^2$ есть

$$\omega_r(F, \tau)_\nu = \sup_{0 \le t \le \tau} \|\delta_t^r F\|_\nu, \quad \tau \ge 0.$$

Применяя формулу умножения (41) и равенство Парсеваля (38) для преобразования Ганкеля, приходим к соотношению

$$\|\delta_t^r F\|_\nu^2 = \int_0^\infty \{1 - j_\nu(ty)\}^r \, |\breve{F}(y)|^2 y^{2\nu+1} dy, \quad \nu \ge -\frac{1}{2}. \tag{43}$$

Отсюда и соотношения (39) видно, что при $\sigma > 0,\ \tau > 0,\ r > 0,\ \nu \ge -1/2$ величина

$$Q_\sigma(\tau, r, \nu) = \sup \left\{ \frac{E_\sigma(F)_\nu}{\omega_r\left(F, \frac{\tau}{\sigma}\right)_\nu} : \quad F \in L_\nu^2,\ F \not\equiv 0 \right\}, \tag{44}$$

являющаяся точной константой в неравенстве Джексона – Стечкина в пространстве L_ν^2

$$E_\sigma(F)_\nu \le Q_\sigma(\tau, r, \nu) \omega_r \left(F, \frac{\tau}{\sigma}\right)_\nu, \quad F \in L_\nu^2, \tag{45}$$

удовлетворяет равенству

$$Q_\sigma^2(\tau, r, \nu) = \mathcal{C}_\sigma(\tau, r, \nu). \tag{46}$$

Следовательно (см. (32)), при $\sigma > 0,\ \tau > 0,\ r > 0,\ m = 1, 2, 3, \ldots$ имеем

$$\mathcal{K}_\sigma(\tau, r, m) = Q_\sigma \left(\tau, r, \frac{m-2}{2}\right). \tag{47}$$

4. Основные результаты. Напомним, что через τ_ν мы обозначали первый положительный нуль функции Бесселя J_ν индекса ν (или, что тоже самое, минимальный положительный нуль нормированной функции Бесселя j_ν индекса ν).

Терема 1. *Пусть $\sigma > 0,\ \nu \ge -1/2$. Тогда имеют место следующие утверждения*

(A) *для каждой ненулевой функции $F \in L_\nu^2$ выполняются неравенства*

$$E_\sigma(F)_\nu < \omega_r \left(F, \frac{\tau}{\sigma}\right)_\nu, \quad r \ge 1, \quad \tau \ge 2\tau_\nu, \tag{48}$$

$$E_\sigma(F)_\nu < 2^{(1-r)/2} \omega_r \left(F, \frac{\tau}{\sigma}\right)_\nu, \quad 0 < r < 1, \quad \tau \ge 2\tau_\nu.$$

(B) *при* $\nu > -1/2$, $r > 0$, $\tau > 0$, $\sigma > 0$ *существует последовательность функций* F_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *из* L^2_ν, *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{E_\sigma(F_k)_\nu}{\omega_r(F_k,\tau)_\nu} \ge 1. \tag{49}$$

Замечание 1. Утверждение (B) теоремы 1 является простым следствием довольно общего результата В.В.Арестова [24, п. 3], [9, лемма 4.2] и свойств (21), (22).

Замечание 2. Как уже отмечалось выше, при $\nu = -1/2$, $r = 1, 2$ неравенство (48) следует из результата, полученного в совместной работе И.И.Ибрагимова и Ф.Г.Насибова [22], кроме того, при $\nu = -1/2$, $r = 1$ В.Ю.Попов [23] независимо установил результат, из которого следует неравенство (48) и его точность. При $\nu = -1/2$, $r > 1$ неравенство (48) следует из результата В.В.Шалаева [30]. В случае $\nu = 0, 1/2$, $r = 1$, $\tau \ge 2\tau_{1/2} = 2\pi$ неравенства (48), (49) следуют из результатов, полученных В.Ю.Поповым [13], [15].

Следствие 1. *Если* $\nu > -1/2$, $\sigma > 0$, *то для точной константы* (44) *в неравенстве Джексона – Стечкина* (45) *в пространстве* $L^2(\mathbb{R}_+, x^{2\nu+1})$ *справедливы соотношения*

$$Q_\sigma(\tau, r, \nu) = 1 \quad \text{при} \quad \tau \ge 2\tau_\nu, \quad r \ge 1, \tag{50}$$

$$Q_\sigma(\tau, r, \nu) > 1 \quad \text{при} \quad 0 < \tau < \tau_\nu, \quad r > 0. \tag{51}$$

Доказательство. Равенство (50) вытекает из неравенств (48) и (49) теоремы 1. В силу соотношений (35), (46) неравенство (51) достаточно доказать при $\sigma = 1$, т.е. доказать, что $Q_1(\tau, r, \nu) > 1$ при $0 < \tau < \tau_\nu$. Это неравенство можно получить, например, с помощью функции $f_\varepsilon(x)$, у которой преобразование Ганкеля имеет вид

$$\breve{f}_\varepsilon(y) = \begin{cases} |y|^{-\nu-1/2}, & \tau \le |y| \le \tau + \varepsilon, \\ 0, & |y| \notin [\tau, \tau+\varepsilon], \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon < \dfrac{\tau_\nu}{\tau} - 1$. Действительно, с помощью формул (44), (39) и (43) будем иметь

$$Q_1^2(\tau, r, \nu) \ge \frac{E_1^2(f_\varepsilon)_\nu}{\omega_r^2(f_\varepsilon, \tau)_\nu} \ge \frac{1}{\{1 - j_\nu(\tau(1+\varepsilon))\}^r} > 1.$$

Следствие 1 доказано.

Из равенств (32), (46), теоремы 1 и следствия 1 получаем аналогичные утверждения для задачи (6) о