О схеме Дельсарта оценки контактных чисел *

В.В.Арестов, А.Г.Бабенко

30 марта 2000 г.

1 0.

В данной работе изучается линейная экстремальная задача для непрерывных на отрезке функций, представимых рядами по ортогональным многочленам, с ограничениями на значения функций и коэффициенты разложений. К задачам такого типа сводятся экстремальные задачи различных разделов математики. Здесь обсуждается вариант этой задачи, возникший в исследованиях Ф.Дельсарта [1], [2] границ упаковок в некоторых метрических пространствах. Схема Дельсарта была развита и успешно применена в работах Г.А.Кабатянского и В.И.Левенштейна [3], Э.Одлыжко и Н.Слоэна [4], В.И.Левенштейна [5], [6], В.М.Сидельникова [7] в связи с исследованием упаковок метрических пространств и, в частности, контактных чисел евклидовых пространств $\mathbf{R}^m$. Изложение этих результатов и другая родственная, богатая информация имеется в монографии Дж.Конвея и Н.Слоэна [8]. Из последних работ на эту тему следует сказать о работе В.А.Юдина [9], в которой был разработан аналог схемы Дельсарта [1] – [8] для изучения достаточно общей задачи минимизации функции фиксированного числа точек на единичной сфере евклидова пространства $\mathbf{R}^m$; исследования В.А.Юдина [9] были продолжены в [10], [11].

Контактным числом пространства $\mathbf{R}^m,\ m \geq 2$, называют максимальное число шаров единичного радиуса с непересекающимися внутренностями, касающихся единичного шара пространства; это число в дальнейшем будет обозначаться через τ_m. Задача исследования контактных чисел имеет большую историю (см. [8], [12]). В настоящее время точное значение τ_m известно

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант N 96-01-00122

лишь при $m = 2, 3, 8, 24$, а именно, $\tau_2 = 6, \tau_3 = 12, \tau_8 = 240, \tau_{24} = 196560$; в остальных случаях вопрос о точных значениях τ_m открыт. Для произвольных значений m известны оценки снизу и сверху константы τ_m; так в четырехмерном случае

$$24 \le \tau_4 \le 25. \tag{0.1}$$

Однако эти оценки не дают, к примеру, порядка поведения контактного числа τ_m по m.

Задачу о контактном числе пространства $\mathbf{R}^m$ можно сформулировать (см., например, [8, гл.1, §2]) в терминах экстремальной задачи для подмножеств (называемых в данной тематике сферическими кодами) единичной сферы $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{m-1} \subset \mathbf{R}^m$. Пусть $\mathcal{B}$ есть некоторое множество шаров единичного радиуса пространства $\mathbf{R}^m$ с непересекающимися внутренностями, которые касаются единичного шара (с центром в начале координат) пространства. Обозначим через $W = W(\mathcal{B})$ множество точек единичной сферы $\mathbf{S}$ (или, то же самое, единичных векторов пространства), являющихся проекциями на сферу $\mathbf{S}$ центров шаров $B \in \mathcal{B}$; ясно, что W состоит из точек, в которых шары $B \in \mathcal{B}$ касаются сферы $\mathbf{S}$. Множество $W \subset \mathbf{S}$ характеризуется тем свойством, что (плоский) угол между любыми двумя различными векторами $x, y \in W$ будет не меньше, чем $\frac{\pi}{3}$, а это означает, что скалярное произведение xy любых двух векторов $x, y \in W, x \ne y$, удовлетворяет условию $xy \le \frac{1}{2}$. Таким образом, контактное число τ_m равно наибольшему значению мощности множества $W \subset \mathbf{S}$ со свойством

$$-1 \le xy \le \frac{1}{2}, \quad x, y \in W, x \ne y. \tag{0.2}$$

Оценки снизу контактных чисел дают конкретные сферические коды со свойством (0.2). Построение экстремальных (или близких к экстремальным) сферических кодов есть интересный и трудный раздел дискретной геометрии, связанный со многими разделами математики. В данной работе вопрос об оценках снизу не обсуждается. Исторические сведения и результаты на эту тему можно найти в монографии [8].

Лучшие оценки сверху контактных чисел получены в работах Г.А.Кабатянского и В.И.Левенштейна [3], Э.Одлыжко и Н.Слоэна [4], В.И.Левенштейна [5], [6] с использованием идеи Дельсарта. Изложим эту схему оценки сверху подробно (см. [3], [8, гл.9]). Пусть $\alpha = \frac{m-3}{2} R_k = R_k^{\alpha,\alpha}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, есть система ультрасферических многочленов, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1 - t^2)^\alpha$, нормированных условием $R_k(1) = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; в частности, имеем $R_0(t) = 1, R_1(t) = t$. Обозначим через $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m = \mathcal{F}(\alpha)$ множество непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций f со свойствами:

1) функция f представляется в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k(t), \tag{0.3}$$

коэффициенты $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ которого удовлетворяют условиям:

$$f_0 > 0, \quad f_k \geq 0, k = 1, 2, \ldots, \tag{0.4}$$

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k < \infty; \tag{0.5}$$

2) функция f — неположительная на отрезке $[-1, \frac{1}{2}]$:

$$f(t) \leq 0, -1 \leq t \leq \frac{1}{2}. \tag{0.6}$$

Известно [3], что множество $\mathcal{F}_m$ при каждом $m \geq 2$ непусто. На этом множестве функций определим величину

$$w_m = w(\alpha) = \inf \left\{ \frac{f(1)}{f_0} : f \in \mathcal{F}_m \right\}. \tag{0.7}$$

Обсуждаемая здесь оценка сверху контактного числа τ_m приведена в следующем утверждении, содержащемся в работах [3], [4], [5], [6] (см. также [8, гл.9, 13 и 14]). Это утверждение приведено здесь с доказательством, поскольку для дальнейшего важным является не только содержащееся в нем неравенство (0.8), но и некоторые моменты из его обоснования.

Теорема A При любом $m \geq 2$ имеет место неравенство

$$\tau_m \leq w_m. \tag{0.8}$$

Доказательство. Важнейшим свойством системы ультрасферических многочленов $R_k = R_k^{\alpha,\alpha}, \alpha = \frac{m-3}{2}, k \geq 0$, на котором строится доказательство, является свойство положительной определенности (см. [3], [8, гл.9]), состоящее в том, что для произвольного конечного множества $W \subset \mathbf{S}^{m-1}$ имеет место неравенство

$$\sum_{x,y \in W} R_k(xy) \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{0.9}$$

Это свойство есть следствие следующего соотношения (см. [13, гл.4, §2])

$$R_k(xy) = \frac{|\mathbf{S}^{m-1}|}{d_k} \sum_{j=1}^{d_k} \overline{Y_j(x)} Y_j(y),$$

где $|\mathbf{S}^{m-1}|$ — площадь сферы $\mathbf{S}^{m-1}$, $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{d_k}\}$ — ортонормированный базис в пространстве сферических гармоник степени k. Действительно, из этого соотношения следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{x,y\in W} R_k(xy) &= \sum_{x,y\in W} \frac{|\mathbf{S}^{m-1}|}{d_k} \sum_{j=1}^{d_k} \overline{Y_j(x)} Y_j(y) = \\ &= \frac{|\mathbf{S}^{m-1}|}{d_k} \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{x,y\in W} \overline{Y_j(x)} Y_j(y) = \frac{|\mathbf{S}^{m-1}|}{d_k} \sum_{j=1}^{d_k} \left| \sum_{x\in W} Y_j(x) \right|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Свойство (0.9) является нетривиальным лишь при $k \geq 1$, ибо, поскольку $R_0(t) = 1$, то

$$\sum_{x,y\in W} R_0(xy) = |W|^2, \tag{0.10}$$

где $|W|$ есть мощность множества W.

Для произвольного множества $W \subset \mathbf{S}$ со свойством (0.2) и функции $f \in \mathcal{F}$ рассмотрим сумму

$$\sum_{x,y\in W} f(xy) = \sum_{x\in W} f(xx) + \sum_{\substack{x,\, y \in W \\ x \neq y}} f(xy).$$

В правой части этого соотношения первая сумма равна $|W|f(1)$; вторая же, в силу (0.2) и (0.6), не превосходит нуля. Поэтому справедлива оценка

$$\sum_{x,y\in W} f(xy) \leq |W| f(1).$$

С другой стороны, в силу (0.9), (0.10) и свойства 1) функции $f \in \mathcal{F}$, имеем

$$\sum_{x,y\in W} f(xy) = \sum_{x,y\in W} \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k(xy) = f_0 \sum_{x,y\in W} R_0(xy) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sum_{x,y\in W} R_k(xy) \geq |W|^2 f_0.$$

Сравнивая полученные оценки сверху и снизу суммы $\sum_{x,y\in W} f(xy)$, видим, что справедливо неравенство

$$|W| \leq \frac{f(1)}{f_0} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f_k}{f_0}.$$

Отсюда, в силу произвольности множества W со свойством (0.2) и функции $f \in \mathcal{F}$, следует неравенство

$$\tau_m \leq \inf\left\{ \frac{f(1)}{f_0} : f \in \mathcal{F} \right\}, \tag{0.11}$$

которое, очевидно, совпадает с неравенством (0.8). Теорема А доказана.

В работах [3], [4], [5], [6] и монографии [8, гл.9, 13 и 14] для оценки сверху контактного числа на самом деле использовалось (содержащееся в (0.8)) неравенство

$$\tau_m \leq \frac{f(1)}{f_0} \tag{0.12}$$

для конкретной функции $f \in \mathcal{F}$. Более того, в качестве функции f всегда брался многочлен; есть основания предполагать, что решение задачи (0.7) при любом $m \geq 2$ будет многочленом, т.е. представление (0.3) решения будет содержать лишь конечное число слагаемых. В случае $m = 8, 24$ функции (многочлены) f были выбраны так, что неравенство (0.12) дало оценку сверху, совпадающую с известной оценкой снизу. Эта схема, как известно, дает значение τ_m еще при $m = 2$. Итак, если $m = 2, 8, 24$, то неравенство (0.8) дает точное значение τ_m, и, кроме того, в этих случаях $\tau_m = w_m$. К настоящему времени неизвестно, существуют ли еще размерности m с таким свойством или, более обще, с тем свойством, что τ_m совпадает с целой частью $[w_m]$ числа w_m.

В данной работе сделано следующее.

1) Выписана двойственная задача и приведена соответствующая теорема двойственности для задачи несколько более общей, чем (0.7). Как следствие показано, что экстремальная функция задачи (0.7) может иметь лишь конечное число слагаемых с четными номерами.

2) Дано точное решение задачи (0.7) при $m = 4$. При этом оказалось, что $w_4 = 25.558429097\ldots$, и решением является многочлен, близкий к выписанному ранее в [4]. Наш результат означает, что неравенство (0.8) не может дать для числа τ_4 оценку сверху, лучшую, чем оценка сверху в (0.1), полученная Э.Одлыжко и Н.Слоэном [4]. Следовательно, для того, чтобы решить вопрос о том, каково же на самом деле значение числа τ_4 : 24 или 25, нужно либо улучшить оценку снизу τ_4, либо получить принципиально новую оценку сверху.

Переформулируем в удобном для нас виде задачу (0.7). Очевидно, что в (0.7) нижнюю грань достаточно брать на множестве $F = F_m$ функций $f \in \mathcal{F}_m$, у которых $f_0 = 1$. Поскольку $R_0^{\alpha,\alpha} = 1$, то, следовательно, F есть множество функций, представимых в виде

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k R_k^{\alpha,\alpha}(t), \quad \alpha = \frac{m-3}{2}, \tag{0.13}$$

где $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть суммируемая последовательность неотрицательных вещественных чисел, и при этом выполняется свойство (0.6). Полагаем

$$u_m = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k : \ f = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k R_k^{\alpha,\alpha} \in F_m\right\}. \tag{0.14}$$

Ясно, что имеет место равенство

$$w_m = 1 + u_m, \tag{0.15}$$

и, значит, неравенство (0.8) можно записать в виде

$$\tau_m \le 1 + u_m. \tag{0.16}$$

В следующем пункте будет выписана двойственная задача для задачи несколько более общей, чем (0.14) и приведена соответствующая теорема двойственности.

1 1.

Пусть $C = C[a,b]$ есть (банахово) пространство непрерывных (вещественных) функций на отрезке $[a,b]$ с нормой $\|f\|_C = \max\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$, а $l = l_1 -$ (банахово) пространство суммируемых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ вещественных чисел с нормой $\|x\|_l = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$. Пусть $\mathcal{R} = \{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть равномерно ограниченная последовательность непрерывных функций на $[a,b]$. Введем множество G последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l$ с неотрицательными элементами $x_k \ge 0, k \ge 1$, таких, что функция

$$f(t) = f(t,x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k R_k(t) \tag{1.1}$$

является неположительной на $[a,b]$; будем предполагать, что множество G непусто. Нас интересует задача исследования величины

$$u = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k : \ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G\right\}; \tag{1.2}$$

эту задачу мы будем называть в дальнейшем также задачей (u). Запишем ее в несколько иной, более удобной для изучения, форме.

Обозначим через $C^+ = C^+[a,b]$ конус неотрицательных функций в пространстве $C = C[a,b]$. Относительно функции $f \in {}^+[a,b]$ будем писать, что $f \ge 0$; если же $-f \in {}^+[a,b]$, то будем писать, что $f \le 0$. В пространстве

$l = l_1$ выделим конус l^+ неотрицательных элементов, а точнее, элементов $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих ограничению $x_k \geq 0, k \geq 1$. Условимся писать $x \geq 0$ или $x \leq 0$, если соответственно $x \in l^+$ или $-x \in l^+$. Пусть $A : l \to C$ есть линейный оператор, определенный формулой

$$(Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k R_k(t). \tag{1.3}$$

Задачу (u) можно переписать в следующем виде

$$u = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k : \ x \geq 0, Ax + 1 \leq 0 \right\}. \tag{1.4}$$

Видно, что это есть задача (бесконечномерного) линейного программирования (см., например, монографию [14]).

Выпишем для (u) двойственную задачу. Сопряженное для $C[a,b]$ пространство $C^* = C^*[a,b]$ непрерывных линейных функционалов на $C[a,b]$ можно отождествить с пространством $V = V[a,b]$ функций ограниченной вариации на $[a,b]$, и при этом непрерывный линейный функционал на $C[a,b]$ определяется функцией $\mu \in V$ с помощью интеграла Римана-Стильтьеса по формуле

$$(\mu, f) = \int_a^b f(t) d\mu(t). \tag{1.5}$$

Сопряженным пространством l^* для пространства $l = l_1$ суммируемых последовательностей является пространство l_∞ ограниченных последовательностей $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, и непрерывный линейный функционал на l определяется элементом $y \in l_\infty$ по формуле

$$(y, x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Оператор A, определенный формулой (1.3), является линейным ограниченным оператором из l в C. Сопряженный ему оператор A^* является линейным ограниченным оператором из $V = C^*$ в $l_\infty = l^*$; он определяется из соотношения

$$(\mu, Ax) = (A^*\mu, x), \quad \mu \in V, x \in l.$$

Нетрудно видеть, что этот оператор на функциях $\mu \in V$ задается формулой

$$A^*\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty},$$

где

$$\mu_k = \int_a^b R_k(t) d\mu(t), k \geq 1. \tag{1.6}$$

Кроме того, определим величину μ_0 следующим образом

$$\mu_0 = \int_a^b 1 d\mu(t).$$

Пусть $V^+ = V^+[a,b]$ есть конус в V, сопряженный конусу C^+, образованный элементами $\mu \in V$, удовлетворяющими условию $(\mu, f) \geq 0$ для любой функции $f \in C^+$. Нетрудно понять, что V^+ состоит из неубывающих на отрезке $[a,b]$ функций. Функцию $\mu \in V^+[a,b]$ мы будем называть иногда в дальнейшем мерой (на $[a,b]$). Множество l_∞^+, состоящее из последовательностей $y = \{y_k\}_{k=1}^\infty \in l_\infty$ с неотрицательными координатами y_k является конусом в l_∞, сопряженным конусу l^+. Если $y \in l_\infty^+$ или $-y \in l_\infty^+$, то будем соответственно писать $y \geq 0$ и $y \leq 0$.

Положим

$$v = \sup \left\{ \mu_0 : \mu \in V^+,\ A^*\mu + e \geq 0 \right\}, \tag{1.7}$$

где $e = \{1\}_{k=1}^\infty$ есть последовательность из l_∞, каждый элемент которой равен 1; в дальнейшем последовательность e будет обозначаться символом **1**. Задачу исследования величины (1.7) будем называть также задачей (v). Это есть классическая двойственная задача для задачи (u) (см., например, [14, гл.2, п.2.3]).

Исходя из дальнейших применений взаимосвязи прямой и двойственной задач, приведем схему возникновения двойственной задачи (v).

Лемма 1.1 *Если допустимое множество G задачи (u) непусто, то*

1) *для любой функции $\mu \in V^+, \mu \neq \text{const}$, величина*

$$\mu_\infty = \inf\{\mu_k, k \geq 1\} \tag{1.8}$$

отрицательная: $\mu_\infty < 0$,

2) *для (1.7) имеет место представление*

$$v = \sup \left\{ \frac{\mu_0}{-\mu_\infty} : \mu \in V^+, \mu \neq \text{const} \right\}. \tag{1.9}$$

Доказательство. Для функции $\mu \in V^+$ и последовательности $x \in G$, то есть последовательности $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ из конуса l^+, для которой функция f, определенная формулой (1.1), неположительна на отрезке $[a,b]$, будем иметь следующие соотношения

$$0 \geq (\mu, f) = \int_a^b f(t) d\mu(t) = \mu_0 + \sum_{k=1}^\infty \mu_k x_k, \tag{1.10}$$

$$\mu_0 = \int_a^b 1 d\mu(t) = \mu(b) - \mu(a).$$

Из (1.10) следует неравенство

$$0 \geq \mu_0 + \mu_\infty \sum_{k=1}^{\infty} x_k; \tag{1.11}$$

напомним, что величина μ_∞ определена в (1.8).

Если $\mu = \text{const}$, то последнее неравенство превращается в бессодержательное равенство $0 = 0$. Допустим, что $\mu \in V^+, \mu \neq \text{const}$, и, значит, $\mu_0 > 0$. Любой элемент $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G$, очевидно, ненулевой, и потому для него $\sum_{k=1}^{\infty} x_k > 0$. В силу этого из (1.11) следует, что $\mu_\infty < 0$. Неравенство (1.11) можно переписать теперь в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \geq \frac{\mu_0}{-\mu_\infty}, \tag{1.12}$$

а это влечет оценку

$$u \geq v, \tag{1.13}$$

в которой величина v определена, пока, соотношением (1.9).

Убедимся, что для величины v имеет место также формула (1.7). Действительно, в (1.9), очевидно, можно ограничиться функциями $\mu \in V^+$ с $\mu_\infty = -1$, т.е. $v = \sup\{\mu_0 : \mu \in V^+, \mu_\infty = -1\}$. Допустим, что функция $\mu \in V^+, \mu \neq \text{const}$, такова, что $\mu_\infty > -1$ (напомним, что при этом $\mu_\infty < 0$). Тогда функция $\lambda = (-\mu_\infty)^{-1}\mu$ принадлежит множеству V^+ и для нее $\lambda_\infty = -1, \lambda_0 > \mu_0$. Поэтому для v имеет место формула

$$v = \sup\left\{\mu_0 : \mu \in V^+, \mu_\infty \geq -1\right\}, \tag{1.14}$$

совпадающая, очевидно, с (1.7). Лемма доказана.

Замечание 1.1 Из приведенных только что рассуждений видно, что если на функции $\mu \in V^+$ достигается верхняя грань в (1.7) или, то же самое, в (1.14) (т.е. если μ есть решение этих задач), то $\mu_\infty = -1$.

Следующее утверждение, как мы увидим, вытекает из общих фактов теории двойственности задач (бесконечномерного) линейного программирования.

Теорема 1.1 *Предположим, что допустимое множество G задачи (u) непусто. Тогда*

1) *задачи* (u) *и* (v) *связаны соотношением двойственности*

$$u = v; \tag{1.15}$$

2) *каждая из задач* (u) *и* (v) *имеет решение, т.е. существуют последовательность* $x \in G$ *и функция* $\mu \in V^+, \mu \neq \mathrm{const}$, *на которых в (1.4) и (1.9) достигаются соответственно нижняя и верхняя грани;*

3) *последовательность* $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in G$ *и функция* $\mu \in V^+$, *являются решениями соответственно задач (1.4) и (1.9) в том и только том случае, если они обладают следующими свойствами:*

$$(\mu, f) = \int_a^b f(t)d\mu(t) = 0, \quad \text{где} \quad f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k R_k(t),$$

и если номер $k \geq 1$ *таков, что*

$$\mu_k = \int_a^b R_k(t)d\mu(t) > \mu_\infty = \min\{\mu_k : k \geq 1\},$$

то $x_k = 0$.

Доказательство теоремы будет проведено с использованием результатов, приведенных во второй и третьей главах монографии [14], причем формально эти результаты следует применять не к задачам $(u), (v)$, а к эквивалентным им задачам

$$-u = \sup\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} x_k : \ x \geq 0, Ax + 1 \leq 0\right\},$$

$$-v = \inf\left\{-\mu_0 : \mu \in V^+, A^*\mu + \mathbf{1} \geq 0\right\}.$$

Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим задачу

$$u(\varepsilon) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k : \ x \geq 0, Ax + 1 \leq \varepsilon\right\},$$

являющуюся ε-расширением задачи (u). Легко убедиться, что если $0 < \varepsilon < 1$, то $u(\varepsilon) = (1 - \varepsilon)u$, а потому величина $\overline{u} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} u(\varepsilon)$ совпадает с u; этот факт означает, что исходная задача (u) корректна. Отсюда (см. теорему 1.1 главы 3 книги [14]) следует равенство (1.15).

Пространство l является сопряженным для банахова пространства c_0 сходящихся к нулю последовательностей $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ вещественных чисел с нормой $\|y\|_{c_0} = \max\{|y_k| : k \geq 1\}$. Конус l^+ является слабо* замкнутым множеством (т.е. замкнутым в топологии $\sigma(l, c_0)$ в стандартных обозначениях [15] и [16]) в пространстве l. К задаче (u) применима лемма 1.3 главы 3 из [14]. В силу этой леммы задача (1.4) имеет решение $x \in G$.

Допустим, что элемент $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит множеству G, т.е. удовлетворяет ограничениям задачи (1.4). При любом $\varepsilon > 1$ имеем

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon x_k R_k(t) \leq 1 - \varepsilon, \quad t \in [a, b].$$

Следовательно, точка εx обладает тем свойством, что функция $g = -1 - A(\varepsilon x)$ является внутренней точкой конуса C^+. Таким образом, для задачи (1.4) выполняется условие Слейтера (см., например, [14, гл.3, §2]). Отсюда следует (см. теорему 2.1 и следствие 2.1 гл.3 из [14]), что существует функция μ, на которой в (1.7) достигается верхняя грань. Для этой функции, как мы видели выше (см. замечание 1.1), имеет место равенство $\mu_\infty = -1$. Поэтому на функции μ достигается верхняя грань также и в (1.9).

Пусть элементы $x \in G$ и $\mu \in V^+, \mu \neq \mathrm{const}$, являются решениями задач (1.4) и (1.9) соответственно. На этих элементах неравенство (1.13) обращается в равенство. Из доказательства (1.13) легко сделать вывод, что эти x и μ обладают свойствами, указанными в третьем утверждении теоремы. В частности, найдется номер $k^* \geq 1$, на котором достигается минимум: $\mu_{k^*} = \min\{\mu_k : k \geq 1\} = \mu_\infty$. Обратно, если пара $x \in G$ и $\mu \in V^+, \mu \neq \mathrm{const}$, обладает указанными в теореме свойствами, то на ней неравенство (1.13) обращается в равенство. В этом случае имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = u = v = \frac{\mu_0}{-\mu_\infty},$$

и, следовательно, последовательность x и функция μ являются решениями задач (1.4) и (1.9) соответственно. Теорема доказана.

Меру $\mu = \mu^* \in V^+$, являющуюся решением двойственной задачи (v) и одновременно функцию

$$f(t) = f^*(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k R_k(t) \in F, \tag{1.16}$$

являющуюся решением прямой задачи (u) можно охарактеризовать в терминах "квадратурной формулы"с определенными экстремальными свойствами на классе Ф функций $\varphi \in C[a, b]$, представимых рядами

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k R_k(t)$$

с суммируемой последовательностью $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ вещественных (необязательно неотрицательных) коэффициентов: $\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k| < \infty$; эта характеризация, по существу, будет означать хорошо известный факт, что экстремальная пара $f \in F, \mu \in V^+$ характеризуется тем, что она является седловой точкой соответствующей функции Лагранжа.

Следствие 1.1 *В предположении, что допустимое множество G задачи (u) непусто, справедливы следующие утверждения.*

I. *Если мера $\mu \in V^+, \mu \neq \mathrm{const}$, является решением задачи (1.9), то на множестве функций $\varphi \in \Phi$ имеет место формула*

$$\varphi_0 = \Omega \int_a^b \varphi(t) d\mu(t) + \Gamma \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \varphi_k, \quad \varphi \in \Phi, \tag{1.17}$$

с коэффициентами

$$\Omega = \frac{1}{\mu_0} > 0, \quad \Gamma = \frac{1}{u} > 0, \quad \gamma_k = \frac{\mu_k - \mu_\infty}{\mu_0} \geq 0 \quad (k \geq 1), \tag{1.18}$$

и при этом для экстремальной функции (1.16) задачи (1.2) выполняются условия

$$\int_a^b f(t) d\mu(t) = 0, \tag{1.19}$$

$$x_k = 0, \quad \text{если} \quad \gamma_k > 0, k \geq 1. \tag{1.20}$$

II. *Обратно, если мера $\mu \in V^+, \mu \neq \mathrm{const}$, такова, что на классе функций $\varphi \in \Phi$ имеет место формула (1.17) с неотрицательными коэффициентами $\Omega, \Gamma, \gamma_k (k \geq 1)$, и, кроме того, существует функция $f \in F$, разложение (1.16) которой обладает свойствами (1.19) – (1.20), то*

1) *мера μ является решением двойственной задачи (1.9),*

2) *для коэффициентов $\Omega, \Gamma, \gamma_k (k \geq 1)$ формулы (1.17) выполняются соотношения (1.18),*

3) *функция f является решением прямой задачи (1.2).*

Доказательство. Для любой пары функций $\varphi \in \Phi, \mu \in V$ имеем

$$(\mu, \varphi) = \int_a^b \varphi(t) d\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \varphi_k = \mu_0 \varphi_0 + \mu_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \mu_\infty) \varphi_k, \tag{1.21}$$

где $\mu_\infty = \inf \{\mu_k : k \geq 1\}$. Отсюда следует, что каждая мера $\mu \in V^+, \mu \neq \mathrm{const}$, порождает на множестве функций $\varphi \in \Phi$ формулу

$$\varphi_0 = \frac{1}{\mu_0} \int_a^b \varphi(t) d\mu(t) - \frac{\mu_\infty}{\mu_0} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k - \mu_\infty}{\mu_0} \varphi_k. \tag{1.22}$$

Если мера $\mu = \mu^* \in V^+, \mu \neq \text{const}$, является решением задачи (1.9), то формула (1.22) принимает вид (1.17) − (1.18). Свойства (1.19) − (1.20) экстремальной функции $f \in F$ содержатся в третьем утверждении теоремы 1.1.

Докажем обратное утверждение. Итак, допустим, что для функций $\varphi \in \Phi$ имеет место формула (1.17) с неотрицательными коэффициентами. Если $\varphi \in \mathcal{F}$, то в формуле (1.17)

$$\int_a^b \varphi(t)d\mu(t) \leq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\varphi_k \geq 0,$$

и, как следствие, справедливо неравенство

$$\varphi_0 \leq \Gamma \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k.$$

Отсюда вытекает, что $\Gamma > 0$, и для любой функции $\varphi \in \mathcal{F}$ имеет место оценка

$$\frac{1}{\varphi_0}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \geq \frac{1}{\Gamma}.$$

На функции $f \in F$ со свойствами (1.19) − (1.20) последняя оценка достигается. Поэтому имеют место равенства

$$\inf\left\{\frac{1}{\varphi_0}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k : \varphi \in \mathcal{F}\right\} = \frac{1}{\Gamma} = u = \sum_{k=1}^{\infty} x_k;$$

последнее равенство означает, что функция f является экстремальной в задаче (1.2). Подставив в формулу (1.17) функцию $\varphi(t) \equiv 1 \in \Phi$, получаем соотношение $1 = \Omega\mu_0$ или, то же самое, $\Omega = \frac{1}{\mu_0}$. Взяв теперь в формуле (1.17) функцию $\varphi(t) = R_k(t), k \geq 1$, получаем соотношение

$$0 = \frac{\mu_k}{\mu_0} + \Gamma - \gamma_k \tag{1.23}$$

или $-\frac{\mu_k}{\mu_0} = \Gamma - \gamma_k$. Поскольку по предположению $\gamma_k \geq 0$, то имеем оценку $-\frac{\mu_k}{\mu_0} \leq \Gamma$ и, как следствие, оценку $-\frac{\mu_\infty}{\mu_0} \leq \Gamma$. Эту оценку можно записать в виде $\frac{\mu_0}{-\mu_\infty} \geq \frac{1}{\Gamma} = u$. Отсюда, в силу определения (1.9) величины v и первого утверждения теоремы 1.1, следует, что $\frac{\mu_0}{-\mu_\infty} = v$, и, таким образом, мера μ является экстремальной в задаче (1.9). Соотношение (1.23) влечет также третье соотношение в (1.18). Все утверждения следствия 1.1 доказаны.

Следствие 1.2 *Допустим, что функции R_k последовательности $\mathcal{R} = \{R_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C[a,b]$ равномерно ограничены и (поточечно) сходятся к* *нулю на отрезке* $[a,b]$. *Тогда решение* $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *задач (1.2), (1.4) содержит лишь конечное число отличных от нуля элементов* x_k, *и, значит, соответствующая функция* $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k R_k(t)$ *также содержит лишь конечное число слагаемых.*

Если последовательность функций R_k *равномерно сходится к нулю на отрезке* $[a,b]$, *и число* K *выбрано так, чтобы при* $k \geq K$ *выполнялось неравенство*

$$\rho_k = \|R_k\|_{C[a,b]} < \frac{1}{u}, \tag{1.24}$$

где u *есть значение задачи (1.4), то* $x_k = 0$ *для номеров* $k \geq K$, *и, значит, соответствующая функция* f *будет содержать не более, чем* K *слагаемых:* $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{K} x_k R_k(t)$.

Доказательство. По предположению функции R_k равномерно ограничены и всюду на отрезке $[a,b]$ сходятся к нулю. Отсюда, в силу теоремы Лебега о мажорантной сходимости (см., например, [17, гл.V, §5, п.4]), следует, что для любой функции $\mu \in V$ и, в частности, для функции μ, являющейся решением двойственной задачи (1.9), будет иметь место свойство $\mu_k \to 0, k \to \infty$. Поскольку при этом $\mu_\infty = \min\{\mu_k : k \geq 1\} < 0$, то существует лишь конечное число номеров k, таких, что $\mu_\infty = \mu_k$. В силу третьего утверждения теоремы 1.1 это влечет первое утверждение следствия. Далее, для экстремальной меры $\mu \in V^+$ при любом k имеем

$$|\mu_k| = \left| \int_a^b R_k(t) d\mu(t) \right| \leq \rho_k \mu_0 = \rho_k u |\mu_\infty|.$$

Поэтому, если для номера k выполняется условие (1.24), то для этого номера $|\mu_k| < |\mu_\infty|$ и, тем более, $\mu_k > \mu_\infty$. Утверждение следствия доказано полностью.

Рассмотрим систему $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\alpha,\beta} = \{R_k\}_{k=1}^{\infty}, \alpha > -1,\ \beta > -1$, многочленов Якоби $R_k = R_k^{\alpha,\beta}$ порядка k, ортогональных на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ и нормированных условием $R_k(1) = 1$. Соответствующая задача (1.2) для системы $\mathcal{R}$ на отрезке $[a,b] = [-1,s]$, где $-1 < s < 1$, изучалась в работах [3], [6], [7] и в монографии [8, гл.9] в связи с исследованием верхних границ упаковок компактных римановых симметрических пространств ранга 1. Так в работе [3] доказано, что если пара индексов α, β такова, что произведение любых двух многочленов Якоби представимо в виде линейной комбинации многочленов Якоби с неотрицательными коэффициентами или, что то же самое,

$$\int_{-1}^{1} R_k(t) R_l(t) R_n(t) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt \geq 0 \quad \text{для всех натуральных} k, l, n, \tag{1.25}$$

то при любом $s \in (-1,1)$ допустимое множество $G = G^{\alpha,\beta}(s)$ задачи (1.2) (или, то же самое, соответствующее множество $F = F^{\alpha,\beta}(s)$ функций (1.1)) непусто. В частности, неравенство (1.25) выполняется [18] (см. также [19]) при $\alpha \geq \beta \geq -1/2$. Известно (см. [20, с.175]), что при $\alpha > \beta \geq -1/2$ многочлены Якоби $R_k^{\alpha,\beta}$ равномерно сходятся к нулю на отрезке $[-1,s]$ для любого фиксированного $s \in (-1,1)$. Отсюда с помощью следствия 1.2 получаем такое утверждение.

Следствие 1.3 *В случае*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\alpha,\beta} = \{R_k^{\alpha,\beta}\}_{k=1}^{\infty}, \quad \alpha > \beta \geq -\frac{1}{2},$$

в задаче (1.2) на отрезке $[-1,s], s \in (-1,1)$, экстремальная функция существует и является многочленом (конечной степени); существует также экстремальная мера $\mu = \mu^{\alpha,\beta} \in V^+[-1,s]$ в соответствующей двойственной задаче (1.9), и эта мера будет сосредоточена лишь в конечном числе точек.

Лемма 1.2 *Допустим, что функции R_k последовательности $\mathcal{R} = \{R_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C[a,b]$ равномерно ограничены на отрезке $[a,b]$ и (поточечно) сходятся к нулю на полуинтервале $(a,b]$. Тогда для любой функции $\mu \in V[a,b]$ выполняется соотношение*

$$\int_a^b R_k(t)d\mu(t) = R_k(a)\Big(\mu(a+0) - \mu(a)\Big) + o(1), \quad k \to \infty. \tag{1.26}$$

Доказательство. Пусть $\mu \in V[a,b]$. Обозначим через μ^* функцию, определенную следующим образом

$$\mu^*(a) = \mu(a+0),$$
$$\mu^*(t) = \mu(t), t \in (a,b].$$

Тогда имеем

$$\mu_k = \int_a^b R_k(t)d\mu(t) = R_k(a)\Big(\mu(a+0) - \mu(a)\Big) + \int_a^b R_k(t)d\mu^*(t). \tag{1.27}$$

По условию функции R_k сходятся к нулю на полуинтервале $(a,b]$. Поскольку функция μ^* непрерывна в точке a (справа), то, следовательно, последовательность R_k сходится к нулю почти всюду на $[a,b]$ относительно меры μ^*. Кроме того, предполагается, что функции R_k равномерно ограничены. Поэтому, согласно теореме Лебега о мажорантной сходимости, можно утверждать, что

$$\int_a^b R_k(t)d\mu^*(t) \to 0, k \to \infty. \tag{1.28}$$

Из соотношений (1.28) и (1.27) следует утверждение (1.26).

2 2.

Задача (0.14) есть частный случай задачи (1.4); двойственной для (0.14) будет являться задача вычисления величины

$$v_m = \sup\left\{\frac{\mu_0}{-\mu_\infty} : \mu \in V^+\left[-1, \frac{1}{2}\right], \mu \neq \text{const}\right\}, \tag{2.1}$$

где

$$\mu_\infty = \inf\{\mu_k : k \geq 1\}, \quad \mu_k = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} R_k^{\alpha,\alpha}(t)d\mu(t), \quad \alpha = \frac{m-3}{2}.$$

Как мы уже отмечали выше, множество $F = F_m$ при каждом $m \geq 2$ непусто [3]. Поэтому для задач (0.14) и (2.1) имеет место следующее утверждение, содержащееся в теореме 1.1.

Теорема 2.1 *При любом $m \geq 2$ для задач (0.14) и (2.1) справедливы утверждения.*

I. *Задачи (0.14) и (2.1) связаны соотношением двойственности*

$$u_m = v_m. \tag{2.2}$$

II. *Каждая из задач (0.14) и (2.1) имеет решение, т.е. существуют функция*

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k R_k^{\alpha,\alpha}(t), \quad \alpha = \frac{m-3}{2}, \tag{2.3}$$

принадлежащая множеству $F = F_m$ (т.е. удовлетворяющая ограничениям (0.4) - (0.6)), и функция $\mu \in V^+ = V^+[-1, \frac{1}{2}], \mu \neq \text{const}$, на которых в (0.14) и (2.1) достигаются соответственно нижняя и верхняя грани.

III. *Функции $f \in F_m$ и $\mu \in V^+$ являются решениями соответственно задач (0.14) и (2.1) в том и только том случае, если они обладают следующими свойствами:*

1) *определяемая функцией μ мера сосредоточена на множестве нулей функции f из отрезка $[-1, \frac{1}{2}]$,*

2) *если номер $k \geq 1$ таков, что $\mu_k > \mu_\infty$, то соответствующий коэффициент x_k в разложении (2.3) равен нулю: $x_k = 0$.*

Замечание 2.1 Многочлены $R_k = R_k^{\alpha,\alpha}$ являются четными или нечетными в соответствии с тем, будет ли число k четным или нечетным, что, в частности, влечет свойство $R_k(-1) = (-1)^k$. Кроме того, известно (см., например, [20, с.175]), что $R_k(t) \to 0, k \to \infty$, для $t \in (-1,1), \alpha > -1/2$. Поэтому, согласно лемме 1.2, для любой функции $\mu \in V[-1, \frac{1}{2}]$ и, в частности, для экстремальной функции $\mu \in V^+$ имеем

$$\mu_k = (-1)^k\Big(\mu(-1+0) - \mu(-1)\Big) + o(1), k \to \infty. \tag{2.4}$$

Далее, согласно лемме 1.1, справедливо свойство $\mu_\infty < 0$, и, значит, равенство $\mu_k = \mu_\infty$ может выполняться лишь для конечного числа четных номеров k. Отсюда, в силу третьего утверждения теоремы 2.1, следует, что при любом $m \geq 3$ экстремальная функция (2.3) задачи (0.14) может иметь лишь конечное число ненулевых слагаемых с четными номерами k. В связи с этим полезно отметить, что любая функция $f \in F_m$, а значит, и экстремальная функция (2.3) задачи (0.14) обязательно имеет ненулевые слагаемые как с нечетными, так и с четными номерами $k \geq 1$. Действительно, функция $f \in F_m$ не может быть четной, ибо у нее $f(-1) \leq 0, f(1) > 0$. Точно так же, функция $f(t) - 1$ не может быть нечетной, ибо в этом случае $f(0) - 1 = 0$, и, как следствие, $f(0) = 1$, что противоречит предположению $f(0) \leq 0$.

3 3.

Ниже в данной работе будет дано решение задач (0.7), (0.14) и (2.1) для $m = 4$. При $m = 4$ многочлены $R_k = R_k^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ являются многочленами Чебышева второго рода, нормированными условием $R_k(1) = 1$; здесь эти многочлены будут обозначаться символами P_k. Итак, нас интересует величина

$$w = w_4 = \inf\left\{\frac{f(1)}{f_0} : f \in \mathcal{F}_4\right\} \tag{3.1}$$

на множестве $\mathcal{F} = \mathcal{F}_4$ функций f, представимых рядами

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(t) \tag{3.2}$$

(по многочленам Чебышева второго рода), коэффициенты которых неотрицательные, а точнее, $f_0 > 0, \quad f_k \geq 0, k = 1, 2, \ldots$, и удовлетворяющих условию $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k < \infty$; кроме того, предполагается, что функции $f \in \mathcal{F}_4$ неположительные на отрезке $J = [-1, \frac{1}{2}]$.

Как уже отмечалось, $24 \leq \tau_4 \leq 25$. Оценка снизу $\tau_4 \geq 24$ известна давно; эту оценку дают конкретные классические сферические коды $W \subset \mathbf{S}^3 \subset \mathbf{R}^4$, которые можно найти, например, в монографии [8, Т.1, гл.1, §2, п.2.4]. Оценка сверху $\tau_4 \leq 25$ была получена Э.Одлыжко и Н.Слоэном [4] (см. также [8, гл.13]) с помощью неравенства (0.12). Для обоснования этой оценки они нашли конкретную функцию $f \in F_4$, а точнее, многочлен девятой степени

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{9} a_k P_k^*(t), \tag{3.3}$$

в разложении которого по многочленам Чебышева второго рода P_k^*, нормированных условием

$$P_k^*(1) = \binom{k+\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(k+\frac{1}{2}\right)}{k!}, \quad k \geq 1,$$

коэффициенты a_k имеют следующие значения $a_1 = 2.412237, a_2 = 3.261973, a_3 = 3.217960, a_4 = 2.040011,\ a_5 = 0.853848,\ a_6 = a_7 = a_8 = 0, a_9 = 0.128520$. Для этой функции $f(1) \leq 25.5585$, а отсюда следует, что $\tau_4 \leq 25$.

Приведенный только что результат Э.Одлыжко и Н.Слоэна влечет оценку

$$w_4 \leq 25.5585. \tag{3.4}$$

Из дальнейшего будет видно, что эта оценка дает практически точное значение величины w_4, и многочлен (3.3) весьма близок к решению задачи (3.1).

Точное решение задачи (3.1) было нами получено по следующей схеме. Вначале мы провели эксперимент на компьютере, численно решая задачу линейного программирования, являющуюся дискретизацией задачи (3.1); дискретизация состояла в том, что бесконечная сумма (3.2) была заменена на довольно большую конечную (до 40 слагаемых), и условие неположительности функции f на отрезке $J = [-1, \frac{1}{2}]$ было заменено аналогичным условием на достаточно густой сетке из отрезка J. В результате был получен многочлен

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{9} f_k^* P_k(t), \tag{3.5}$$

практически совпадающий с многочленом (3.3). Многочлен f^* обладает следующими особенностями:

1) его коэффициенты f_k^* с номерами $k = 6, 7, 8$ равны нулю:

$$f_6^* = f_7^* = f_8^* = 0, \tag{3.6}$$

а остальные — положительные,

2) многочлен f^* имеет на отрезке J три двойных корня a, b, c и простой корень $d = \frac{1}{2}$,

$$-1 < a < b < c < d = \frac{1}{2}, \tag{3.7}$$

кроме того, f^* имеет пару комплексно сопряженных корней.

Допустим теперь, что **точное решение** f^* задачи w_4 имеет указанный здесь вид (3.5) – (3.7). В силу теоремы 2.1 можно утверждать, что решение $\mu^* \in V^+[J]$ соответствующей двойственной задачи (т.е. задачи (2.1) для $m = 4$) есть мера, сосредоточенная в точках a, b, c, d, и, значит, на функциях $f \in C(J)$ имеет место формула

$$(\mu^*, f) = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(t) d\mu^*(t) = \mathcal{A}f(a) + \mathcal{B}f(b) + \mathcal{C}f(c) + \mathcal{D}f(d), \tag{3.8}$$

где $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ – неотрицательные вещественные числа, являющиеся значениями меры μ^* точек a, b, c, d и называемые далее весами. При сделанных предположениях функция f^* и мера μ^* будут удовлетворять следующим условиям.

1) Функция f^* имеет вид

$$f^*(t) = (t-a)^2(t-b)^2(t-c)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) g_2(t),$$

где $g_2(t) = t^2 + qt + r$ есть многочлен второго порядка с двумя комплексно сопряженными корнями.

2) Разложение (3.5) функции f^* по многочленам Чебышева второго рода имеет неотрицательные коэффициенты f_k^*, и при этом $f_6^* = f_7^* = f_8^* = 0$.

3) Параметры $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ меры μ^* таковы, что коэффициенты

$$\mu_k = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} P_k(t) d\mu^*(t) = \mathcal{A}P_k(a) + \mathcal{B}P_k(b) + \mathcal{C}P_k(c) + \mathcal{D}P_k(d)$$

обладают свойствами

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_9 (= \mu_\infty);$$

можно считать, что мера μ^* нормирована так, что это общее значение коэффициентов равно -1 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_9 = -1$.

Перечисленные условия дают систему девяти (нелинейных) уравнений с девятью неизвестными, которыми являются параметры $a, b, c, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ и два коэффициента q, r многочлена $g_2(t) = t^2 + qt + r$. Полученную систему мы успешно решили на компьютере с помощью пакета аналитических вычислений Maple.

Расчеты на компьютере позволили нам построить функции f^* и μ^*; экстремальность же этой пары функций обосновывается ниже аналитически, без привлечения компьютера. В приводимых рассуждениях мы выписываем приближенные значения всех встречающихся переменных (корней уравнений и необходимых функций этих корней), что позволит читателю, при необходимости, провести нужную локализацию этих переменных.

Численные расчеты на компьютере дискретного аналога задачи (3.1) были осуществлены авторами посредством программы решения задач линейного программирования с малым числом неизвестных и большим числом ограничений, любезно предоставленной нам Л.В.Петрак; при проведении аналитических расчетов на компьютере в пакете Maple большую помощь нам оказали С.В.Бердышев и М.В.Дейкалова. Всем им авторы весьма благодарны.

Для формулировки результатов оставшейся части работы нам понадобятся несколько определений и обозначений. Пусть H есть следующий многочлен седьмой степени

$$H(z) = z^7 + \frac{23}{8}z^6 + \frac{29}{12}z^5 - \frac{11}{96}z^4 - \frac{185}{144}z^3 - \frac{877}{1152}z^2 - \frac{3}{16}z - \frac{9}{512}. \quad (3.9)$$

Он имеет три вещественных и четыре комплексных корня:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -1.368502640\ldots, \\ \xi_2 &= -0.320830326\ldots, \\ \xi_3 &= 0.739659011\ldots, \\ \xi_{4,5} &= -0.659115894\ldots \pm i \cdot 0.230039449\ldots, \\ \xi_{6,7} &= -0.303547128\ldots \pm i \cdot 0.137565088\ldots. \end{aligned}$$

Особую роль в дальнейшем будет играть наименьший вещественный корень; нам удобно обозначить его через ξ. Таким образом,

$$\xi = \xi_1 = -1.368502640\ldots. \quad (3.10)$$

Введем четыре числа, которые выражаются через ξ по формулам

$$\eta = \frac{-33 - 100\xi + 36\xi^2 + 96\xi^3}{48 + 144\xi} = 0.501597587\ldots, \quad (3.11)$$

$$\zeta = -\frac{1}{4} - \frac{\xi}{3} - \frac{\eta}{2} = -0.044631247\ldots, \quad (3.12)$$

$$q = 2\xi + \frac{1}{2} = -2.237005280\ldots, \quad (3.13)$$

$$r = 3\xi^2 + \xi - 2\eta - \frac{7}{4} = 1.496700613\ldots. \quad (3.14)$$

Теперь с помощью чисел ξ, η, ζ, q, r определим многочлен девятой степени

$$f^*(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)(t^3 - \xi t^2 + \eta t - \zeta)^2(t^2 + qt + r); \quad (3.15)$$

обозначим через f_k^* коэффициенты в разложении

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{9} f_k^* P_k(t) \tag{3.16}$$

f^* по многочленам Чебышева второго рода. Пусть, наконец, $a < b < c$ есть корни многочлена

$$z^3 - \xi z^2 + \eta z - \zeta; \tag{3.17}$$

эти корни имеют следующие приближенные значения

$$a = -0.827548728\ldots, \ b = -0.409134511\ldots, \ c = -0.131819400\ldots. \tag{3.18}$$

Одним из основных результатов данной работы является следующее утверждение.

Теорема 3.1 *Функция f^*, определенная с помощью соотношений (3.9)-(3.16), принадлежит множеству $\mathcal{F}_4$ и является единственной (с точностью до положительного множителя) экстремальной функцией (решением) задачи (3.1); помимо того, справедливы равенства*

$$w_4 = \frac{f^*(1)}{f_0^*} = \frac{8\xi - 18\eta - 15}{\xi} = 25.558429097\ldots. \tag{3.19}$$

Соответствующая двойственная задача (т.е. задача (2.1) при m=4) имеет единственное (с точностью до положительного множителя) решение μ^*, являющееся мерой, сосредоточенной в точках a, b, c и $\frac{1}{2}$, которая задает на пространстве непрерывных на отрезке $[-1, \frac{1}{2}]$ функций f функционал

$$(\mu^*, f) = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(t) d\mu^*(t) = \mathcal{M}(a)f(a) + \mathcal{M}(b)f(b) + \mathcal{M}(c)f(c) + \mathcal{M}\left(\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) \tag{3.20}$$

с весами

$$\mathcal{M}(a) = \frac{2 + 3(b+c) + 6bc}{8(a-1)\left(a - \frac{1}{2}\right)(a-b)(a-c)} \cdot \frac{8\xi - 18\eta - 15}{\xi} = 3.169774489\ldots,$$

$$\mathcal{M}(b) = \frac{2 + 3(a+c) + 6ac}{8(b-1)\left(b - \frac{1}{2}\right)(b-a)(b-c)} \cdot \frac{8\xi - 18\eta - 15}{\xi} = 4.805310571\ldots,$$

$$\mathcal{M}(c) = \frac{2 + 3(a+b) + 6ab}{8(c-1)\left(c - \frac{1}{2}\right)(c-a)(c-b)} \cdot \frac{8\xi - 18\eta - 15}{\xi} = 7.442808460\ldots,$$

$$\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3 + 2\xi + 6\eta}{9 + 2\xi + 24\eta} \cdot \frac{8\xi - 18\eta - 15}{\xi} = 9.140535577\ldots. \tag{3.21}$$

для меры μ^* коэффициенты Фурье $\mu_k^* = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} P_k(t)d\mu^*(t)$ и величина $\mu_\infty^* = \min\{\mu_k^* : k \geq 1\}$ обладают свойствами

$$\mu_1^* = \mu_2^* = \mu_3^* = \mu_4^* = \mu_5^* = \mu_9^* = \mu_\infty^* = -1, \tag{3.22}$$

$$\mu_k^* > \mu_\infty^* = -1, \quad k \geq 1, k \neq 1, 2, 3, 4, 5, 9. \tag{3.23}$$

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений. Ниже будут использоваться следующие известные (см., например, [21, с.30]) разложения степеней переменной через многочлены

$$U_n(t) = (n+1)P_n(t) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad t = \cos\theta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.24}$$

Чебышева второго рода:

$$\begin{aligned}
1 &= U_0(t),\\
t &= \frac{1}{2}U_1(t),\\
t^2 &= \frac{1}{4}\Big(U_2(t) + U_0(t)\Big),\\
t^3 &= \frac{1}{8}\Big(U_3(t) + 2U_1(t)\Big),\\
t^4 &= \frac{1}{16}\Big(U_4(t) + 3U_2(t) + 2U_0(t)\Big),\\
t^5 &= \frac{1}{32}\Big(U_5(t) + 4U_3(t) + 5U_1(t)\Big), \qquad (3.25)\\
t^6 &= \frac{1}{64}\Big(U_6(t) + 5U_4(t) + 9U_2(t) + 5U_0(t)\Big),\\
t^7 &= \frac{1}{128}\Big(U_7(t) + 6U_5(t) + 14U_3(t) + 14U_1(t)\Big),\\
t^8 &= \frac{1}{256}\Big(U_8(t) + 7U_6(t) + 20U_4(t) + 28U_2(t) + 14U_0(t)\Big),\\
t^9 &= \frac{1}{512}\Big(U_9(t) + 8U_7(t) + 27U_5(t) + 48U_3(t) + 42U_1(t)\Big).
\end{aligned}$$

Лемма 3.1 *Функция f^*, определенная с помощью соотношений (3.9)-(3.15), принадлежит множеству $\mathcal{F}_4$.*

Доказательство. В правой части (3.15) многочлен $g_2(t) = t^2 + qt + r$ положительный на всей вещественной оси, ибо $\min\{g_2(t) : t \in \mathbf{R}\} = r - \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0.245652457\ldots > 0$. Поэтому

$$f^*(t) \leq 0, \quad -1 \leq t \leq \frac{1}{2}. \tag{3.26}$$

Нам осталось доказать, что в разложении (3.16) функции (3.15) по многочленам Чебышева второго рода коэффициенты f_k^* неотрицательные, причем $f_0^* > 0$. Вначале разложим f^* по степеням переменной t :

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{9} c_k t^k. \tag{3.27}$$

С помощью формул (3.9) – (3.15) получаем

$$\begin{aligned}
c_9 &= 1, \quad c_8 = 0, \quad c_7 = -2, \quad c_6 = 0,\\
c_5 &= -2\zeta\xi - 3\eta^2 - 2\xi\eta - 4\eta + 3\xi^3 - \xi^2 - \frac{7\xi}{4} + 3\xi^4 = 1.844949212\ldots,\\
c_4 &= 2\eta^2 + 2\zeta\eta - 2\zeta\xi^2 + 6\eta^2\xi + 4\zeta - 2\eta\xi^2 + 3\eta\xi - 6\eta\xi^3 + \frac{7\eta}{4} - \frac{3\xi^4}{2} - \frac{\xi^3}{2} +\\
&+ \frac{7\xi^2}{8} = 0.693337331\ldots,\\
c_3 &= -2\zeta\eta + \zeta^2 + 3\zeta\xi^2 - 3\zeta\xi - 2\eta^2\xi - 2\eta^2 - 8\zeta\eta\xi + 6\zeta\xi^3 - 2\eta^3 + 3\eta^2\xi^2 -\\
&- \frac{7\zeta}{4} + 3\eta\xi^3 + \eta\xi^2 - \frac{7\eta\xi}{4} = -0.237297380\ldots, \qquad (3.28)\\
c_2 &= 2\zeta\eta\xi + 4\zeta\eta + 2\zeta^2\xi - 3\zeta\xi^3 - \zeta\xi^2 + \frac{7\zeta\xi}{4} + \eta^3 - \frac{3\eta^2\xi^2}{2} - \frac{\eta^2\xi}{2} + \frac{7\eta^2}{8} +\\
&+ 4\zeta\eta^2 - 6\zeta\eta\xi^2 = -0.168059741\ldots,\\
c_1 &= -2\zeta^2 - 2\zeta\eta^2 + 3\zeta\eta\xi^2 + \zeta\eta\xi - \frac{7\zeta\eta}{4} - 2\zeta^2\eta + 3\zeta^2\xi^2 = -0.028297176\ldots,\\
c_0 &= \zeta^2\eta - \frac{\zeta^2\xi}{2} + \frac{7\zeta^2}{8} - \frac{3\zeta^2\xi^2}{2} = -0.001490675\ldots.
\end{aligned}$$

Применив теперь в разложении (3.27) формулы (3.25), (3.24) и (3.28), находим коэффициенты f_k^* в разложении (3.16)

$$\begin{aligned}
f_9^* &= \frac{5}{256}, \quad f_8^* = f_7^* = f_6^* = 0,\\
f_5^* &= \frac{3}{16}\left(c_5 - \frac{21}{16}\right) = 0.099834227\ldots,\\
f_4^* &= \frac{5}{16}c_4 = 0.216667916\ldots,\\
f_3^* &= \frac{1}{2}(c_5 + c_3 - 1) = 0.303825915\ldots,\\
f_2^* &= \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}c_4 + c_2\right) = 0.263957443\ldots,\\
f_1^* &= c_1 + \frac{1}{2}c_3 + \frac{5}{16}c_5 - \frac{35}{128} = 0.156163262\ldots,\\
f_0^* &= c_0 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{8}c_4 = 0.043161556\ldots. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Таким образом, разложение (3.16) функции f^* имеет неотрицательные коэффициенты и $f_0^* > 0$. Лемма 3.1 доказана.

Доказанная только что лемма дает оценку сверху величины w_4, и, как мы увидим в дальнейшем, эта оценка точная. Для обоснования нужной оценки снизу величины w_4 мы сейчас построим специальную квадратурную формулу, содержащую не только значения функции, но и ее коэффициенты Фурье по многочленам Чебышева второго рода; по существу эта формула является формулой (1.17) для задач u_4, v_4.

Лемма 3.2 *На множестве Φ_4 функций $f \in C[-1,1]$, представимых рядами*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(t) \tag{3.30}$$

с суммируемой последовательностью $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ вещественных (необязательно неотрицательных) коэффициентов: $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k| < \infty$, имеет место квадратурная формула

$$f_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}dt = L(f) - \sum_{\nu \geq 1} L(P_\nu) f_\nu, \tag{3.31}$$

в которой функционал L задан соотношением

$$L(f) = \lambda(1)f(1) + \lambda\left(\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda(a)f(a) + \lambda(b)f(b) + \lambda(c)f(c) \tag{3.32}$$

с коэффициентами

$$\lambda(1) = \frac{\xi}{8\xi - 18\eta - 15} = 0.039126035\ldots, \tag{3.33}$$

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{3 + 2\xi + 6\eta}{9 + 2\xi + 24\eta} = 0.357632917\ldots, \tag{3.34}$$

$$\lambda(a) = \frac{2 + 3(b+c) + 6bc}{8(a-1)\left(a - \frac{1}{2}\right)(a-b)(a-c)} = 0.124020708\ldots, \tag{3.35}$$

$$\lambda(b) = \frac{2 + 3(a+c) + 6ac}{8(b-1)\left(b - \frac{1}{2}\right)(b-a)(b-c)} = 0.188012751\ldots, \tag{3.36}$$

$$\lambda(c) = \frac{2 + 3(a+b) + 6ab}{8(c-1)\left(c - \frac{1}{2}\right)(c-a)(c-b)} = 0.291207586\ldots, \tag{3.37}$$

где числа ξ, η, a, b, c определены формулами (3.9)-(3.18). Кроме того, функционал L обладает свойствами

$$L(1) = 1; \tag{3.38}$$

$$L(P_\nu) = 0 \quad \text{п} \quad \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 9; \tag{3.39}$$

$$L(P_\nu) > 0 \quad \text{п} \quad \nu \geq 1, \nu \neq 1, 2, 3, 4, 5, 9. \tag{3.40}$$

Доказательство. Вначале найдем достаточные условия на вещественные узлы

$$-1 < A < B < C < \frac{1}{2} \tag{3.41}$$

и коэффициенты $\lambda_1, \lambda_{1/2}, \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8$ для существования квадратурной формулы вида

$$f_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}dt = \mathcal{L}(f) - \sum_{\nu=6}^{8} \gamma_\nu f_\nu, \tag{3.42}$$

$$\mathcal{L}(f) = \lambda_1 f(1) + \lambda_{1/2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda_A f(A) + \lambda_B f(B) + \lambda_C f(C), \tag{3.43}$$

на множестве всех полиномов девятой степени

$$f(t) = \sum_{k=0}^{9} f_k P_k(t). \tag{3.44}$$

Большинство из этих условий будут также и необходимыми; с них и начнем. Положим

$$U = A + B + C, \quad V = AB + AC + BC, \quad W = ABC. \tag{3.45}$$

Из теоремы Виета следует, что A, B, C являются корнями многочлена

$$t^3 - Ut^2 + Vt - W. \tag{3.46}$$

Рассмотрим многочлен пятой степени

$$\sigma(t) = (t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right)(t^3 - Ut^2 + Vt - W). \tag{3.47}$$

Он будет иметь следующее разложение по степеням t

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= t^5 - \left(\frac{3}{2} + U\right)t^4 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}U + V\right)t^3 - \left(\frac{1}{2}U + \frac{3}{2}V + W\right)t^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{2}V + \frac{3}{2}W\right)t - \frac{1}{2}W. \end{aligned}$$

С помощью формул (3.25) и (3.24) найдем коэффициент σ_0 в разложении

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{5} \sigma_k P_k(t)$$

многочлена σ по многочленам P_k; при этом мы воспользуемся тем, что коэффициент σ_0 совпадает с коэффициентом при U_0 в разложении многочлена σ по многочленам Чебышева второго рода U_k (этот факт будет нами использоваться и ниже)

$$\sigma_0 = -\frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}+U\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}U+\frac{3}{2}V+W\right)-\frac{1}{2}W = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}U+\frac{1}{2}V+W\right).$$

Подставив многочлен σ в формулу (3.42), получаем первое необходимое условие существования этой формулы: $\sigma_0 = 0$ или, что то же самое, — условие (сравните с (3.12))

$$W = -\frac{1}{4}-\frac{U}{3}-\frac{V}{2}. \tag{3.48}$$

Сейчас мы выразим коэффициенты $\lambda_1, \lambda_{1/2}$ квадратурной формулы (3.42)—(3.43) через U и V. Начнем с λ_1. Рассмотрим многочлен четвертой степени

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \left(t-\frac{1}{2}\right)(t^3-Ut^2+Vt-W) = \\ &= t^4-\left(U+\frac{1}{2}\right)t^3+\left(\frac{1}{2}U+V\right)t^2-\left(\frac{1}{2}V+W\right)t+\frac{1}{2}W = \\ &= \sum_{k=0}^{4}\varphi_k P_k(t);\end{aligned} \tag{3.49}$$

легко убедиться, что

$$\varphi_0 = \frac{1}{8}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}U+V\right)+\frac{1}{2}W, \quad \varphi(1) = \frac{1}{2}(1-U+V-W). \tag{3.50}$$

Вновь подставляя теперь уже многочлен φ в формулу (3.42), получаем второе необходимое условие существования этой формулы: $\varphi_0 = \lambda_1\varphi(1)$, которое в силу (3.50), (3.48) эквивалентно равенству

$$\lambda_1 = \frac{U}{8U-18V-15}. \tag{3.51}$$

Аналогично, используя многочлен

$$\chi(t) = (t-1)(t^3-Ut^2+Vt-W) = \sum_{k=0}^{4}\chi_k P_k(t), \tag{3.52}$$

у которого, как нетрудно проверить,

$$\chi_0 = \frac{1}{8}(1+2U+2V+8W), \quad \chi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}U+\frac{1}{2}V-W\right),$$

получаем третье необходимое условие

$$\lambda_{1/2} = 2\frac{3+2U+6V}{9+2U+24V}. \tag{3.53}$$

По этой же схеме с помощью многочленов

$$\begin{gathered}(t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-B)(t-C),\\ (t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-A)(t-C),\\ (t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-A)(t-B)\end{gathered} \tag{3.54}$$

получаем условия

$$\begin{aligned}\lambda_A &= \frac{2+3(B+C)+6BC}{8(A-1)\left(A-\frac{1}{2}\right)(A-B)(A-C)},\\ \lambda_B &= \frac{2+3(A+C)+6AC}{8(B-1)\left(B-\frac{1}{2}\right)(B-A)(B-C)},\\ \lambda_C &= \frac{2+3(A+B)+6AB}{8(C-1)\left(C-\frac{1}{2}\right)(C-A)(C-B)}.\end{aligned} \tag{3.55}$$

Подставляя в (3.42) многочлены $P_\nu, \nu = 6,7,8$, получим еще три необходимых условия

$$\gamma_\nu = \mathcal{L}(P_\nu) \quad \text{п} \quad \nu = 6,7,8. \tag{3.56}$$

Построим теперь многочлен $\psi(t) = \sum_{k=0}^{9} \psi_k P_k(t)$, на котором зануляются все функционалы, стоящие в правой части формулы (3.42), кроме значения в точке $t = 1$, т.е. многочлен со свойствами

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \psi(A) = \psi(B) = \psi(C) = \psi_6 = \psi_7 = \psi_8 = 0.$$

Положим

$$Q = 2U + \frac{1}{2}, \tag{3.57}$$

$$R = 3U^2 + U - 2V - \frac{7}{4} \tag{3.58}$$

и рассмотрим многочлен девятой степени

$$\psi(t) = \left(t-\frac{1}{2}\right)(t^3 - Ut^2 + Vt - W)^2(t^2 + Qt + R). \tag{3.59}$$

Для этого многочлена имеем

$$\psi(t) = t^9 - 2t^7 + \sum_{k=0}^{6} C_k t^k, \tag{3.60}$$

где

$$\begin{aligned}
C_6 &= -2W + 6UV + V - \frac{3U^2}{2} + \frac{7U}{2} - 4U^3 + \frac{7}{8},\\
C_5 &= -2WU - 3V^2 - 2UV - 4V + 3U^3 - U^2 - \frac{7U}{4} + 3U^4,\\
C_4 &= 2V^2 + 2WV - 2WU^2 + 6V^2U + 4W - 2VU^2 + 3VU - 6VU^3 + \frac{7V}{4} -\\
&- \frac{3U^4}{2} - \frac{U^3}{2} + \frac{7U^2}{8},\\
C_3 &= -2WV + W^2 + 3WU^2 - 3WU - 2V^2U - 2V^2 - 8WVU + 6WU^3 -\\
&- 2V^3 + 3V^2U^2 - \frac{7W}{4} + 3VU^3 + VU^2 - \frac{7VU}{4}, \qquad\qquad (3.61)\\
C_2 &= 2WVU + 4WV + 2W^2U - 3WU^3 - WU^2 + \frac{7WU}{4} + V^3 - \frac{3V^2U^2}{2} -\\
&- \frac{V^2U}{2} + \frac{7V^2}{8} + 4WV^2 - 6WVU^2,\\
C_1 &= -2W^2 - 2WV^2 + 3WVU^2 + WVU - \frac{7WV}{4} - 2W^2V + 3W^2U^2,\\
C_0 &= W^2V - \frac{W^2U}{2} + \frac{7W^2}{8} - \frac{3W^2U^2}{2}.
\end{aligned}$$

Отсюда с помощью формул (3.25) и (3.24) находим четыре старших коэффициента

$$\psi_9 = \frac{5}{256}, \quad \psi_8 = \psi_7 = 0, \quad \psi_6 = \frac{7}{64}C_6 \tag{3.62}$$

в разложении

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{9} \psi_k P_k(t) \tag{3.63}$$

многочлена ψ по многочленам Чебышева второго рода P_k.

В квадратурной формуле (3.42) имеется 11 параметров, в то время как любой многочлен девятой степени определяется с помощью 10 коэффициентов. В связи с этим мы имеем возможность наложить на параметры квадратурной формулы условие

$$\psi_6 = 0. \tag{3.64}$$

Это условие выбрано из соображений согласования прямой и двойственной задачи и гипотезы (3.6) относительно экстремальной функции задачи w_4. В силу (3.62), (3.61) и (3.48) условие (3.64) можно переписать в виде

$$\frac{25}{6}U + 2V + \frac{11}{8} + 6VU - \frac{3}{2}U^2 - 4U^3 = 0. \tag{3.65}$$

Отсюда параметр V выражается через U формулой

$$V = \frac{96U^3 + 36U^2 - 100U - 33}{48(1+3U)}. \tag{3.66}$$

Исходя из формул (3.60), (3.61), (3.25), (3.24), с учетом равенства $C_6 = 0$ (см. (3.62), (3.64)) найдем коэффициент с нулевым индексом в разложении (3.63) многочлена (3.59)

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \frac{7}{32}V + \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}WVU + \frac{7}{8}W^2 + \frac{7}{64}U^2 + \frac{15}{32}V^2 - \frac{3}{2}W^2U^2 + W^2V + \\
&+ \frac{5}{4}VW + \frac{3}{8}UV - \frac{1}{16}U^3 + \frac{7}{16}UW + \frac{1}{4}V^3 - \frac{3}{16}U^4 - \frac{1}{2}WU^2 - \\
&- \frac{3}{2}WVU^2 - \frac{3}{4}WU^3 - \frac{3}{8}V^2U^2 + WV^2 - \frac{1}{4}VU^2 + \frac{5}{8}V^2U - \frac{3}{4}VU^3
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Нетрудно найти значение функции (3.59) в единице

$$\begin{aligned}
\psi(1) &= \frac{1}{2}(1-U+V-W)^2(1+Q+R) = \\
&= \frac{1}{2}(1-U+V-W)^2\left(3U^2 + 3U - 2V - \frac{1}{4}\right).
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Формула (3.42) с дополнительным условием (3.64) (или, что то же самое, (3.65)) на ее параметры на многочлене ψ принимает вид

$$\psi_0 = \lambda_1\psi(1).$$

Подставляя сюда выражение (3.51) для λ_1 и выражения (3.67), (3.68) для $\psi_0, \psi(1)$, найдем еще одно уравнение для параметров U, V, W

$$\begin{aligned}
\lambda_1\psi(1) - \psi_0 &= \frac{U(1-U+V-W)^2\left(3U^2+3U-2V-\frac{1}{4}\right)}{2(8U-18V-15)} - \\
&- \frac{7V}{32} - \frac{W}{2} - \frac{WVU}{2} - \frac{7W^2}{8} - \frac{7U^2}{64} - \frac{15V^2}{32} + \frac{3W^2U^2}{2} - W^2V - \\
&- \frac{5WV}{4} - \frac{3VU}{8} + \frac{U^3}{16} - \frac{7WU}{16} - \frac{V^3}{4} + \frac{3U^4}{16} + \frac{WU^2}{2} + \frac{3WVU^2}{2} + \\
&+ \frac{3WU^3}{4} + \frac{3V^2U^2}{8} - WV^2 + \frac{VU^2}{4} - \frac{5V^2U}{8} + \frac{3VU^3}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Заменив в нем W его выражением (3.48) через U, V, получим соотношение

$$\frac{3U^4}{16}-\frac{11U^3}{96}+\frac{3VU^3}{16}-\frac{3VU^2}{16}-\frac{49U^2}{192}+\frac{3VU}{64}-\frac{V^2U}{4}+\frac{55U}{384}+\frac{9}{128}-\frac{V^2}{16}+\frac{V}{16}=0.$$

Подставив в это соотношение выражение (3.66) параметра V через U, придем к следующему уравнению для параметра U

$$\frac{4608U^7+13248U^6+11136U^5-528U^4-5920U^3-3508U^2-864U-81}{36864(1+3U)^2}=$$
$$=\frac{H(U)}{8(1+3U)^2}=0, \qquad (3.69)$$

где H задано формулой (3.9).

Как уже говорилось выше, многочлен H (а значит, и уравнение (3.69)) имеет три вещественных корня. Нас интересует решение, обеспечивающее выполнение условий (3.41); этим свойством обладает лишь решение (3.10). В связи с этим, с данного момента предполагается, что $U=\xi$. При этом предположении, в силу формул (3.66), (3.48), (3.57), (3.58), (3.11) – (3.14) имеем $V=\eta, W=\zeta, Q=q, R=r$. Отсюда следует, что многочлен (3.46) совпадет с многочленом (3.17), а потому

$$A=a, \quad B=b, \quad C=c. \qquad (3.70)$$

Это, в частности, влечет, что функция ψ, заданная формулой (3.59), и функция f^*, указанная в лемме 3.1, совпадают: $\psi=f^*$. Кроме того, из формул (3.51), (3.53), (3.55) вытекает, что коэффициенты $\lambda_1, \lambda_{1/2}, \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$ функционала $\mathcal{L}$ (см. (3.43)) совпадают с коэффициентами (3.33) – (3.37) функционала L, определенного в (3.32). Следовательно, формула (3.42) примет вид

$$f_0=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}dt=L(f)-\sum_{\nu=6}^{8} L(P_\nu)f_\nu. \qquad (3.71)$$

На данном этапе рассуждений можно утверждать, что формула (3.71) выполняется на многочленах (3.47), (3.49), (3.52), (3.54), а также на многочленах P_6, P_7, P_8 и $\psi=f^*$. Указанные десять многочленов образуют базис во множестве $\mathcal{P}_9$ многочленов степени не выше девяти. Поэтому квадратурная формула (3.71) выполняется для любого многочлена из $\mathcal{P}_9$. Из нее, в частности, следует, что $L(P_\nu)=0$ при $\nu=1,2,3,4,5,9$, т.е. имеет место (3.39). Подставив в формулу (3.71) многочлен $f(t)\equiv 1$, получаем также утверждение (3.38).

Очевидно, формулу (3.71) можно распространить на весь класс функций Φ_4, если записать ее в форме (3.31) – (3.37). Нам осталось проверить неравенства (3.40). Для обоснования этих неравенств воспользуемся следующими двумя свойствами многочленов Чебышева второго рода:

1) $P_\nu(1) = 1, \nu \geq 0$, 2) многочлены P_ν на интервале $(-1,1)$ поточечно стремятся к нулю при $\nu \to \infty$. Как следствие этих свойств имеем (ср. с леммой 1.2) $L(P_\nu) \to \lambda(1) > 0$ п $\nu \to \infty$; в силу чего неравенства (3.40) нужно проверить лишь для конечного числа индексов ν. Подробнее, воспользовавшись соотношениями (3.24), имеем

$$\begin{aligned} L(P_\nu) &= \lambda(1) + \lambda\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sin(\nu+1)\frac{\pi}{3}}{(\nu+1)\sin\frac{\pi}{3}} + \lambda(a)\frac{\sin(\nu+1)\theta_1}{(\nu+1)\sin\theta_1} + \lambda(b)\frac{\sin(\nu+1)\theta_2}{(\nu+1)\sin\theta_2} + \\ &+ \lambda(c)\frac{\sin(\nu+1)\theta_3}{(\nu+1)\sin\theta_3}, \end{aligned} \tag{3.72}$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arccos a = 2.545523452\ldots, \\ \theta_2 &= \arccos b = 1.992301679\ldots, \\ \theta_3 &= \arccos c = 1.703000500\ldots. \end{aligned}$$

Поэтому для любого $\nu \geq 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &L(P_\nu) \geq \\ &\geq \lambda(1) - \left(\lambda\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c)\right)\frac{1}{\nu+1}\max\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}, \frac{1}{\sin\theta_1}, \frac{1}{\sin\theta_2}, \frac{1}{\sin\theta_3}\right\} = \\ &= \lambda(1) - \frac{1-\lambda(1)}{(\nu+1)\sin\theta_1}. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить, что $L(P_\nu) > 0$ при $\nu \geq 45$. Для $\nu \leq 45$ условия (3.40) проверяются вычислениями. Лемма 3.2 доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Для функции, а на самом деле, — многочлена девятой степени $f^*(t) = \sum_{k=0}^{9} f_k P_k(t)$, определенного соотношением (3.15), выполняются свойства

$$f^*\left(\frac{1}{2}\right) = f^*(a) = f^*(b) = f^*(c) = f_6^* = f_7^* = f_8^* = 0.$$

Поэтому на функции f^* формула (3.31) превращается в равенство

$$f_0^* = \lambda(1) f^*(1),$$

из которого следует, что

$$\frac{f^*(1)}{f_0^*} = \frac{1}{\lambda(1)} = \frac{8\xi - 18\eta - 15}{\xi}.$$

В силу леммы 3.1 для доказательства (3.19) достаточно показать, что

$$w_4 \geq \frac{1}{\lambda(1)}. \tag{3.73}$$

Для обоснования этого неравенства можно воспользоваться утверждениями леммы 3.2 и следствия 1.1. Однако будет короче привести непосредственное обоснование неравенства (3.73).

Для произвольной функции $f \in \mathcal{F}_4$ справедлива квадратурная формула (3.31) – (3.32). Коэффициенты $\lambda(1), \lambda\left(\frac{1}{2}\right), \lambda(a), \lambda(b), \lambda(c)$ этой формулы положительные, а коэффициенты $L(P_\nu), \nu \geq 1,$ – неотрицательные (точнее, $L(P_\nu) > 0, \nu \neq 1, 2, 3, 4, 5, 9$ и $L(P_\nu) = 0, \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 9$). В силу свойств (0.3) – (0.6) функции $f \in \mathcal{F}_4$ отсюда следует оценка

$$f_0 \leq \lambda(1) f(1), \tag{3.74}$$

которая влечет неравенство (3.73). Тем самым обосновано утверждение (3.19) и одновременно доказано, что функция f^* является экстремальной в задаче w_4. Нетрудно понять, что неравенство (3.74) обращается в равенство в том и только в том случае, если функция f лишь положительным множителем отличается от функции f^*, поэтому функция f^* является единственной экстремальной (с точностью до положительного множителя).

Пусть μ есть мера на $[-1, \frac{1}{2}]$, сосредоточенная в точках a, b, c и $\frac{1}{2}$ с весами (3.34) – (3.37). Очевидно, справедливо соотношение

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(t) d\mu(t) = L(f) - \lambda(1) f(1), \quad f \in C[-1, 1],$$

где $L(f)$ – функционал, определенный формулой (3.32). Поскольку $P_k(1) = 1$, то для коэффициентов Фурье $\mu_\nu = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} P_\nu(t) d\mu(t)$ этой меры имеем представление $\mu_\nu = L(P_\nu) - \lambda(1)$. Из этого соотношения и (3.38) – (3.40) следует, что

$$\begin{gathered} \mu_0 = 1 - \lambda(1), \quad \mu_\infty = -\lambda(1), \\ \mu_\nu = \mu_\infty, \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 9, \\ \mu_\nu > \mu_\infty, \nu \geq 1, \nu \neq 1, 2, 3, 4, 5, 9. \end{gathered} \tag{3.75}$$

Видно, что функция f^* (изученная в лемме 3.1) и построенная только что мера μ удовлетворяют предположениям третьего утверждения теоремы 2.1. Поэтому мера μ будет экстремальной в задаче v_4. В силу теоремы 2.1 любая экстремальная мера $\widetilde{\mu}$ задачи v_4 должна быть сосредоточена в точках $a, b, c, \frac{1}{2}$, а, кроме того, должна обладать свойствами $\widetilde{\mu}_1 = \widetilde{\mu}_2 = \widetilde{\mu}_3 = \widetilde{\mu}_4 =$

$\widetilde{\mu}_5 = \widetilde{\mu}_9 = \widetilde{\mu}_\infty$. Отсюда нетрудно получить, что меры $\widetilde{\mu}$ и μ должны совпадать с точностью до положительного множителя. Именно так связаны между собой мера μ и мера μ^*, описанная в формулировке теоремы 3.1, а точнее

$$\mu^* = \frac{\mu}{-\mu_\infty} = \frac{\mu}{\lambda(1)}.$$

Таким образом, мера μ^* является единственной экстремальной (с точностью до положительного множителя) в задаче v_4; свойства (3.22) и (3.23) этой меры следуют из свойств (3.75) меры μ. Теорема 3.1 полностью доказана.

Доказанная только что теорема 3.1 дает точное решение задач w_4, u_4, v_4. Сейчас мы дадим довольно простую, в сравнении с точным решением, оценку снизу этих трех величин.

Теорема 3.2 *На множестве Φ_4 функций f, представимых рядами*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(t), \quad \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| < \infty,$$

имеет место квадратурная формула

$$f_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\sqrt{1-t^2}dt = \widetilde{L}(f) - \sum_{\nu\geq 6} \widetilde{L}(P_\nu) f_\nu, \tag{3.76}$$

в которой функционал $\widetilde{L}$ задан соотношением

$$\begin{aligned}\widetilde{L}(f) \; &= \; \widetilde{\lambda}(1)f(1) + \widetilde{\lambda}\left(\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) + \widetilde{\lambda}\left(-\frac{1}{8}\right) f\left(-\frac{1}{8}\right) + \widetilde{\lambda}\left(-\frac{2}{5}\right) f\left(-\frac{2}{5}\right) + \\ &+ \; \widetilde{\lambda}\left(-\frac{24}{29}\right) f\left(-\frac{24}{29}\right) \end{aligned} \tag{3.77}$$

с коэффициентами

$$\begin{gathered}\widetilde{\lambda}(1) = \frac{523}{13356}, \quad \widetilde{\lambda}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1238}{3465}, \quad \widetilde{\lambda}\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{2048}{7335}, \\ \widetilde{\lambda}\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{3125}{15624}, \quad \widetilde{\lambda}\left(-\frac{24}{29}\right) = \frac{20511149}{164970344}. \end{gathered} \tag{3.78}$$

Кроме того, функционал $\widetilde{L}$ обладает свойствами

$$\widetilde{L}(P_\nu) > 0 \quad \textit{п} \quad \nu \geq 6. \tag{3.79}$$

Доказательство. Формула (3.76), очевидно, выполняется для многочленов P_ν при любом $\nu \geq 6$. Справедливость этой формулы для многочленов P_ν при $0 \leq \nu \leq 5$ нетрудно обосновать непосредственными вычислениями. Проверка неравенства (3.79) проводится по той же схеме, как это делалось в лемме 3.2 при доказательстве неравенств (3.40). Теорема 3.2 доказана.

Из формулы (3.76) легко следует (см. доказательство (3.74)) неравенство $f_0 \leq \widetilde{\lambda}(1)f(1)$ и, как следствие, неравенство $w_4 \geq (\widetilde{\lambda}(1))^{-1}$. Таким образом, теорема 3.2 дает оценку

$$w_4 \geq \frac{13356}{523} = 25.537284894\ldots,$$

близкую к точному значению $w_4 = 25.558429097\ldots$.

4. Нам приятно выразить нашу признательность В.А.Юдину. Именно в результате неоднократных обсуждений данной тематики с В.А.Юдиным у авторов возник интерес к ней, и, как следствие, — появилась эта работа.

Научное и человеческое общение с С.Б.Стечкиным оказало огромное влияние на нас и наши научные интересы, за что мы всегда будем ему благодарны. Большое место в его научных исследованиях и исследованиях его учеников уделялось экстремальным задачам и, в частности, экстремальным задачам для функций, представимых рядами по различным системам, с ограничениями на значения функций и коэффициенты разложений, каковыми и являются обсуждаемые здесь задачи.

Список литературы

[1] Delsarte Ph. Bounds for unrestricted codes, by linear programming // Philips Res. Rep., 1972. V.27. P.272–289.

[2] Дельсарт Ф. Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976.

[3] Кабатянский Г.А., Левенштейн В.И. О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Проблемы передачи информации, 1978. Т.14, вып.1. С.3–25.

[4] Odlyzko A.M., Sloane N.J.A. New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions // J. of Combinatorial Theory, Series A 26, 1979. P.210–214.

[5] Левенштейн В.И. О границах для упаковок в n–мерном евклидовом пространстве // ДАН СССР, 1979. Т.245. С.1299–1303.

[6] Левенштейн В.И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики, 1983. Т.40. С.44–110.

[7] Сидельников В.М. Об экстремальных многочленах, используемых при оценках мощности кода // Проблемы передачи информации, 1980. Т.16, вып.3. С.17–30.

[8] Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Т.1,2. М.: Мир, 1990. 791 с.

[9] Юдин В.А. Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов // Дискретная математика, 1992. Т.4, вып.2. С.115–121.

[10] Колушов А.В., Юдин В.А. О конструкции Коркина–Золотарева // Дискретная математика, 1994. Т.6, вып.1. С.155–157.

[11] Andreev N.N. An extremal property of the icosahedron // East Journal on Approximations, 1996. V.2, N 4. C.459–462.

[12] Тот Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: ГИФМЛ, 1958. 363 с.

[13] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.

[14] Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.

[15] Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1959. 410 с.

[16] Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Наука, 1967. 258 с.

[17] Колмогоров А.Н., Фомин А.Г. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

[18] Gasper G. Linearization of the product of Jacobi polynomials. I // Can. J. Math., 1970. V 22, N 1. P.171–175.

[19] Koornwinder T. Positivity proofs for lineralization and connection coefficients of orthogonal polynomials satisfying an addition formula // J. London Math. Soc. Second Series. 1978. V.18. Part 1. P.101–114.

[20] Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.

[21] С.Пашковский Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.