ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{L^2}$ ФУНКЦИЙ НА МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЕ *

А. Г. Бабенко

30 марта 2000 г.

Данная работа посвящена изучению наименьшей константы в неравенстве Джексона–Стечкина для наилучших приближений функций в пространстве $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ на единичной сфере $\mathbf{S}^{m-1}$ вещественного евклидова пространства $\mathbf{R}^m$ размерности $m \geq 2$ сужениями на сферу алгебраических многочленов (точнее, сферическими полиномами).

Фундаментальным в этой тематике является результат Д.Джексона для наилучших равномерных приближений непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами. К настоящему времени эта тематика получила большое развитие. Опишем некоторые из известных результатов, имеющих непосредственное отношение к интересам автора.

Обозначим через $C = C_{2\pi}$ пространство вещественных непрерывных 2π–периодических функций f одной вещественной переменной с равномерной нормой $\|f\|_C = \max\{|f(x)| \ : x \in \mathbf{R}\}$. Наилучшим равномерным приближением функции $f \in C$ тригонометрическими полиномами t_{n-1} степени не выше $n-1$ называется величина

$$E_{n-1}(f)_C = \min_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C,$$

а ее равномерным модулем непрерывности порядка $r = 1, 2, \ldots$ называется функция

$$\omega_r(f,h)_C = \sup_{|t|\leq h} \| \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} f(x+kt)\|_C$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Российской Федерации по высшему образованию (код проекта: 2–16–5–31) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта: 93–011–196).

переменного $h \geq 0$. Зафиксируем числа $\tau > 0, r \in \mathbf{N}$. Хорошо известно следующее неравенство [1], [2], [3]

$$E_{n-1}(f)_C \leq \mathcal{K}\omega_r\left(f, \frac{\tau}{n}\right)_C, \quad n \in \mathbf{N}, \quad f \in C \tag{0.1}$$

с константой $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\tau, r) < \infty$, зависящей только от τ и r. Этот результат означает, что величина

$$\mathcal{K}_n(\tau, r)_C = \sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)_C}{\omega_r\left(f, \frac{\tau}{n}\right)_C}: \quad f \in C, \quad f \not\equiv \mathrm{const}\right\}, \tag{0.2}$$

являющаяся наименьшей константой $\mathcal{K}$ в неравенстве (0.1) (при фиксированных τ, r, n), равномерно ограничена по n, т.е. конечна величина

$$\mathcal{K}(\tau, r)_C = \sup_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{K}_n(\tau, r)_C. \tag{0.3}$$

Д.Джексон [1] в 1911 году впервые установил неравенство (0.1) при $r = 1$, т.е. оценил наилучшее равномерное приближение $E_{n-1}(f)$ непрерывной 2π – периодической функции f тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ через ее модуль непрерывности $\omega(f, \tau)_C = \omega_1(f, \tau)_C$ (первого порядка). С.Б.Стечкин [3] получил неравенство (0.1) при $r \geq 2$; при $r = 2$ этот результат был ранее опубликован Н.И. Ахиезером [2, с. 217, с. 190]. Неравенство (0.1) при $r = 1$ называют неравенством Джексона, а в общем случае – неравенством Джексона–Стечкина.

Указанный результат был перенесен на пространства $L^p = L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$, измеримых 2π–периодических функций с обычной нормой (см. [4, гл.5]). Усилиями многих математиков неравенства типа Джексона–Стечкина были распространены на пространства функций многих переменных, заданных как на классических многообразиях (сфера, тор, пространство, гиперболоид, ...), так и на многообразиях довольно общей природы.

Наряду с качественной картиной в этой области большой интерес (в частности, для вычислительных целей) представляют точные результаты. Первое точное неравенство Джексона (в пространстве $C = C_{2\pi}$) установил Н.П.Корнейчук [5] (1962 г.), а первое точное неравенство Джексона–Стечкина (в пространстве $L^2 = L^2_{2\pi}$) получил Н.И.Черных [6, 7] (1967 г.). Подробнее, Н.П.Корнейчук решил задачу (0.3) при $\tau = \pi,\ r = 1$, доказав равенство $\mathcal{K}(\pi, 1)_C = 1$. Позднее он обобщил этот результат [8] (1982 г.), показав, что $\mathcal{K}(\pi/m, 1)_C = (m+1)/2,\ m \in \mathbf{N}$. По аналогии с (0.2) можно дать определение величины $\mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^p}$, являющейся наименьшей константой в соответствующем неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^p = L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$. Сейчас наиболее полно изучен случай $p = 2$. Первые точные результаты в этом случае принадлежат Н.И.Черных [6, 7], который доказал, что

$$\mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{\binom{2r}{r}}} = \frac{\Gamma(r+1)}{\sqrt{\Gamma(2r+1)}} \quad \text{п} \quad n, r \in \mathbf{N}, \quad n > r, \quad \tau \geq 2\pi. \quad (0.4)$$

А в случае $r = 1$ им [6, 9] была найдена наименьшая точка $\tau^* = \pi$, начиная с которой величина $\mathcal{K}_n(\tau, 1)_{L^2}$, как функция аргумента τ, выходит на свой глобальный минимум равный $1/\sqrt{2}$. Точное неравенство Джексона в пространстве L^p при $1 \leq p < 2$ было также установлено Н.И.Черных [10]. В этом случае $\mathcal{K}_n(\tau, 1)_{L^p}$ равна $2^{(1-p)/p}$ при $\tau \geq \theta\pi$, где $\theta = (1/2 - 2/\pi^2)^{-1/2} \approx 1.834$. Как отмечается в работе [10], оценка снизу $\mathcal{K}_n(\tau, 1)_{L^p} \geq 2^{|1/p-1/2|-1/2}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \tau > 0, \quad n \in \mathbf{N}$ была получена ранее В.И.Бердышевым.

Для периодических функций одного вещественного переменного есть еще несколько точных результатов в прямых теоремах теории приближения в терминах модуля непрерывности заданного порядка самой функции. В.В.Жук, В.В.Шалаев получили (см. [11, с.322,352]) соответственно оценки сверху и снизу для величины (0.2) при $r = 2, \ \tau = \pi/2$, с помощью которых вычисляется величина (0.3) в этом случае, а именно, $\mathcal{K}(\pi/2, 2)_C = 1$. В работах автора [12, 13] найдены значения величины $\mathcal{K}_n(\pi/m, 1)_{L^2}$ для натуральных $m \geq 1 + 3n/2$ при $n \geq 1$ и для натуральных $m \geq 3n/4$ при $n \geq 10$. В работе М.Ж.Шакеновой [14] утверждается, что равенство (0.4) остается верным и в случае вещественного $r > 0, \ \tau = 2\pi$.

Пространства $C_{2\pi}$ и $L^p_{2\pi}$ можно интерпретировать, соответственно, как пространства $C(\mathbf{S}^1), \ L^p(\mathbf{S}^1)$ функций, заданных на единичной окружности $\mathbf{S}^1$ евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$. Одним из естественных обобщений указанных пространств являются пространства $C(\mathbf{S}^{m-1}), \ L^p(\mathbf{S}^{m-1})$ функций, заданных на единичной сфере $\mathbf{S}^{m-1}$ евклидова пространства $\mathbf{R}^m$ размерности $m \geq 3$ с центром в нуле.

В 1914 году Т.Гронуол [15] получил неравенство Джексона

$$E_n(f)_{C(\mathbf{S}^2)} < (1 + 3\pi/2)\omega(f, 1/n)_{C(\mathbf{S}^2)}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

между наилучшим равномерным приближением функции $f \in C(\mathbf{S}^2), \ f \not\equiv \mathrm{const}$, сферическими полиномами степени не выше n и ее равномерным модулем непрерывности первого порядка

$$\omega(f, h)_{C(\mathbf{S}^2)} = \sup\{|f(x) - f(y)| : \ x, y \in \mathbf{S}^2, \ x \cdot y = \cos t, \ 0 < t \leq h\}, \quad (0.5)$$

$h \in (0, \pi]$, при условии, что функция $h^{-1}\omega(f, h)_{C(\mathbf{S}^2)}$ не возрастает по h; здесь $x \cdot y$ есть скалярное произведение векторов x, y. В силу известного свойства (см. [16, с.198] и [3, лемма 5]) $\quad 2h^{-1}\omega(f, h)_{C(\mathbf{S}^2)} \geq \eta^{-1}\omega(f, \eta)_{C(\mathbf{S}^2)}, \quad 0 <$

$h < \eta$, модуля непрерывности произвольной функции $f \in C(\mathbf{S}^2)$, доказательство Т.Гронуола [15, §3] позволяет получить неравенство Джексона

$$E_n(f)_{C(\mathbf{S}^2)} < (1 + 3\pi/\tau)\omega(f, \tau/n)_{C(\mathbf{S}^2)}, \quad 0 < \tau/n < \pi, \quad n = 2, 3, \ldots$$

уже для любой функции $f \in C(\mathbf{S}^2)$, $f \not\equiv \mathrm{const}$.

Дальнейшие исторические сведения, касающиеся неравенств Джексона–Стечкина для функций из $C(\mathbf{S}^{m-1})$, $L^p(\mathbf{S}^{m-1})$, $m \geq 3$ с применением модулей непрерывности порядка $r \geq 1$, основанных на r-ой разности функции вдоль геодезической, можно найти в работах [17], [18].

Наряду с указанными выше модулями непрерывности многие математики используют другие модули непрерывности, основанные на операторе s_t сдвига, представляющем собой усреднение функции $f(x)$ по границе сферической шапки углового радиуса t с полюсом в точке x (см., например, [19, формулы (1.1), (1.19)], а также пункт 1 ниже, формула (1.2)). Этот оператор сдвига применялся учеными в прошлом веке в вопросах о сходимости ряда Фурье–Лапласа функций, заданных на $\mathbf{S}^2$ (см., например, [20, с.178 и приведенные там ссылки]). Такой модуль непрерывности для функций f из $C(\mathbf{S}^2)$ в прямых и обратных теоремах теории приближения впервые использовался Г.Г.Кушниренко в работах [21, 22]. История дальнейшего развития этого вопроса содержится в работе [23].

Из работ Д.Ньюмена и Г.Шапиро, Д.Рагозина, В.М.Федорова (см. [17] и приведенную там библиографию), относящихся к прямой теореме теории приближения функций на многомерной сфере $\mathbf{S}^m$ видно, каким образом влияет размерность сферы на указанную теорему. Естественно, что в работы, содержащие соответствующие точные результаты, дают дополнительную информацию о влиянии размерности.

Перечислим несколько точных результатов, относящихся к неравенствам Джексона–Стечкина для функций многих переменных. В 1981 году В.А.Юдин [24] нашел точную константу в неравенстве Джексона для функций из $L^2(\mathbf{T}^m)$, заданных на торе $\mathbf{T}^m$, $m \geq 2$. Аналогичная задача в пространстве $L^2(\mathbf{R}^m)$, $m = 2, 3$, была решена В.Ю. Поповым [25, теорема 3]. В пространстве $C(\mathbf{S}^m)$, $m \geq 2$ для наилучших приближений линейными методами В.В.Шалаев [26] получил точный результат в соответствующей прямой теореме теории приближения. В.В.Арестов и В.Ю. Попов [27] указали точное значение наименьшей константы в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbf{S}^m)$, $m = 2, 3$. В случае пространств $L^2(M)$, $M = \mathbf{R}^m, \mathbf{T}^m, \mathbf{S}^m$, $m \geq 2$ В.Ю.Попов [25], [28], [29] нашел точную константу в неравенстве Джексона–Стечкина при "малых"значениях аргумента модуля непрерывности.

В настоящей статье получено точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$, $m \geq 5$. Оценка снизу для точной константы в указанном неравенстве установлена В.В. Арестовым и публикуется здесь с доказательством с его разрешения.

Кроме того, в данной работе локализована точка Черныха в этом неравенстве (см.следствие 2.1 ниже), т.е. найдены оценки снизу и сверху (отличающиеся друг от друга в два раза) для наименьшей точки $\tau^* = \tau^*(n, r, m)$, начиная с которой точная константа $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\tau, n, r, m)$ в неравенстве Джексона–Стечкина (см. (1.4), (1.5) ниже) при $r \geq 1$ как функция аргумента τ выходит на свой минимум (на множестве Θ_r), равный единице; здесь $\Theta_1 = (0, \pi]$, $\Theta_r = (0, \pi)$ при $r > 1$. Важность задачи о точке Черныха в неравенстве Джексона–Стечкина состоит, в частности, в том, что она позволяет получить меньшую погрешность при оценке сверху константы в этом неравенстве методом оценки модуля непрерывности в большей точке через значение модуля непрерывности в меньшей точке (см. [8]).

1 Введение.

Пусть $\mathbf{R}^k$ есть k-мерное ($k \geq 1$) вещественное евклидово пространство со скалярным произведением $x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ и расстоянием $|x - y| = \sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}$, определенными для точек $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k)$ из $\mathbf{R}^k$. Обозначим через $\mathbf{S}^{k-1} = \{x \in \mathbf{R}^k : |x| = 1\}$ единичную сферу пространства $\mathbf{R}^k$ с центром в нуле, а через $|\mathbf{S}^{k-1}| = 2\pi^{k/2}/\Gamma(k/2)$ – ее площадь, в частности, $|\mathbf{S}^0| = 2$.

На протяжении всей работы будем считать, что m есть натуральное число не меньше 2, $L^2 = L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ – пространство комплексных функций, заданных на $\mathbf{S}^{m-1}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{m-1}|} \int_{\mathbf{S}^{m-1}} f(\xi)\overline{g}(\xi)\, d\xi \tag{1.1}$$

и нормой $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. Многочленом степени не выше n называется функция

$$p(x) = \sum c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}\, x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \leq n$$

с комплексными коэффициентами $c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – целые неотрицательные числа). Множество сужений таких многочленов на $\mathbf{S}^{m-1}$ обозначим через $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{n,m}$. Наилучшим приближением функции $f \in L^2$ пространством $\mathbf{P}_n$ называют расстояние от f до $\mathbf{P}_n$, т.е.

$$E_n(f) = \min\{\|f - p\| : p \in \mathbf{P}_n\}.$$

Сдвигом с шагом $t \in \mathbf{R}$ называется (см., например, [19, формулы (1.1), (1.19)]) оператор s_t, действующий из L^2 в L^2 по правилу

$$s_t f(x) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{m-2}|} \int_{\mathbf{S}^{m-2}} f(x \cos t + \xi \sin t) d\xi, \tag{1.2}$$

здесь $x \in \mathbf{S}^{m-1}$ и интеграл берется по сфере $\mathbf{S}^{m-2} = \mathbf{S}_x^{m-2} = \{\xi \in \mathbf{S}^{m-1} : x \cdot \xi = 0\}$. В частности, при $m = 2$ имеем $s_t f(e^{iu}) = \dfrac{1}{2}\{F(u+t) + F(u-t)\}, \;\; F(u) = f(e^{iu}), \;\; 0 \le u \le 2\pi$.

Пусть I есть тождественный оператор, r — положительное число, $\psi_r(u) = (1-u)^{r/2}$. Следуя Х.П. Рустамову [23], оператор

$$\Delta_t^r = (I - s_t)^{r/2} = \sum_{k \ge 0} \frac{1}{k!} \psi_r^{(k)}(0) s_t^k \tag{1.3}$$

будем называть разностным оператором порядка r, а модулем непрерывности порядка r функции $f \in L^2$ назовем следующую функцию переменного $\tau > 0$

$$\omega_r(f, \tau) = \sup\{\|\Delta_t^r f\| : \; 0 < t \le \tau\}.$$

Отметим, что в случае обычного сдвига разностный оператор дробного порядка был введен и изучался в 1867 — 1868 гг. А.К.Грюнвальдом и А.В.Летниковым (см. [30, §\nobreakspace {}20]).

В данной работе изучается вопрос о точной константе $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\tau, n, r, m), \; \tau > 0, \; n \in \mathbf{N}, \; r > 0, \; m = 2, 3, \ldots$ в неравенстве Джексона—Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le \mathcal{K} \omega_r(f, \tau), \quad f \in L^2, \tag{1.4}$$

т.е. величина

$$\mathcal{K}(\tau, n, r, m) = \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{\omega_r(f, \tau)} : \; f \in L^2, \quad f \not\equiv \mathrm{const} \right\}. \tag{1.5}$$

Сферической гармоникой порядка k называют сужение на сферу $\mathbf{S}^{m-1}$ однородного гармонического многочлена степени k

$$q(x) = \sum c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}, \quad \sum_{l=1}^m \alpha_l = k, \quad \alpha_l \in \mathbf{Z}_+, \quad \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 q}{\partial x_l^2} \equiv 0.$$

Множество всех гармоник порядка k обозначим символом H_k. Известно (см. [31, гл.4]), что при $k \ne l$ пространства $H_k, \; H_l$ ортогональны в смысле скалярного произведения (1.1), кроме того, пространство $\mathbf{P}_n$ совпадает с ортогональной прямой суммой $\sum_{k=0}^n \oplus H_k$. Справедливо также разложение пространства L^2 в ортогональную прямую сумму $L^2 = \sum_{k\geq 0}\oplus H_k$ и оператор ортогонального проектирования $Y_k : L^2 \to H_k$ имеет вид (см. [32, с.206], [31, гл.4,§\nobreakspace {}2])

$$Y_k f(x) = \frac{(k+\lambda)\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{\mathbf{S}^{m-1}} C_k^{\lambda}(x\cdot\xi) f(\xi)\, d\xi, \quad m \geq 3,$$

где $\lambda = (m-2)/2$, $C_0^{\lambda}(u) \equiv 1$, $C_k^{\lambda}(u)$, $k = 1, 2, \ldots$ – многочлены Гегенбауэра, нормированные условием

$$C_k^{\lambda}(1) = \begin{pmatrix} k+2\lambda-1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{(2\lambda+k-1)(2\lambda+k-2)\ldots(2\lambda)}{k!}, \ \ k = 1, 2, \ldots;$$

$$Y_k f(x) = \frac{k}{2\pi} \int_{\mathbf{S}^1} C_k^0(x\cdot\xi) f(\xi)\, d\xi, \ \ m = 2,$$

где $C_0^0(u) \equiv 1$, $C_k^0(\cos t) = \dfrac{2}{k}\cos kt$, $k = 1, 2, \ldots$. Многочлены $C_k^{\lambda}(u), \lambda \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots$ образуют ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-u^2)^{\lambda-1/2}$.

Каждая функция $f \in L^2$ единственным образом разлагается в ряд Фурье-Лапласа, сходящийся к ней в L^2

$$f = \sum_{k\geq 0} Y_k f.$$

Частичная сумма этого ряда $S_{n-1}f = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k f$ является ближайшим элементом в $\mathbf{P}_{n-1}$ для f в метрике пространства L^2, т.е.

$$E_{n-1}^2(f) = \|f - S_{n-1}f\|^2 = \sum_{k\geq n} \|Y_k f\|^2. \tag{1.6}$$

Известны следующие свойства сдвига s_t, разностного оператора Δ_t^r и модуля непрерывности $\omega_r(f,\tau)$, $r > 0$, $t \in \mathbf{R}$, $\tau > 0$, которые выполняются для любой функции f из $L^2(\mathbf{S}^{m-1}), m \geq 2$

$$Y_k s_t f = R_k(t) Y_k f, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.7}$$

$$Y_k \Delta_t^r f = \{1 - R_k(t)\}^{r/2} Y_k f, \ \ k = 0, 1, \ldots, \tag{1.8}$$

$$\|\Delta_t^r f\|^2 = \sum_{k\geq 1} \{1 - R_k(t)\}^r \|Y_k f\|^2, \tag{1.9}$$

$$\|\Delta_{lt}^r f\| \leq l^r \|\Delta_t^r f\|, \quad l \in \mathbf{N}, \tag{1.10}$$

$$\omega_r(f,\tau) \leq 2^{(r-\alpha)/2} \omega_\alpha(f,\tau), \quad 0 < \alpha < r, \tag{1.11}$$

где

$$R_k(t) = R_{k,\lambda}(t) = C_k^\lambda(\cos t)/C_k^\lambda(1), \quad \lambda = (m-2)/2, \quad k = 0, 1, \dots . \tag{1.12}$$

Свойство (1.10) при $r = 2$ доказал В.А.Иванов [33], в общем случае оно доказывается так же, остальные свойства можно найти в работе Х.П.Рустамова [23]. Полиномы (1.12) образуют ортогональную систему на отрезке $[0, \pi]$ с весом $\sin^{2\lambda} t$

$$\int_0^\pi R_k(t) R_l(t) \sin^{2\lambda} t\, dt = 0, \quad k \neq l, \quad k, l \in \mathbf{Z}_+. \tag{1.13}$$

Кроме того, они удовлетворяют соотношениям $\max_{t \in \mathbf{R}} |R_k(t)| = R_k(0) = (-1)^k R_k(\pi) = 1,\ k = 0, 1, \dots .$

Соотношения (1.6), (1.9) позволяют свести многомерную задачу (1.5) о точной константе $\mathcal{K}(\tau, n, r, m)$ в неравенстве Джексона–Стечкина (1.4) к одномерной задаче для полиномов (1.12). А именно, квадрат этой константы совпадает с наименьшей константой $K = K(\tau, n, r, \lambda),\ \lambda = (m-2)/2$ в неравенстве

$$\sum_{k \geq n} \rho_k \leq K \sup_{0 < t \leq \tau} \sum_{k \geq 1} \{1 - R_k(t)\}^r \rho_k, \tag{1.14}$$

$$\sum_{k \geq 1} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Таким образом,

$$K(\tau, n, r, \lambda) = \sup \left\{ \sum_{k \geq n} \rho_k \Big/ \sup_{0 < t \leq \tau} \sum_{k \geq 1} \{1 - R_k(t)\}^r \rho_k : \right.$$

$$\left. 0 < \sum_{k \geq 1} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots \right\}, \tag{1.15}$$

причем для константы (1.5) справедливо равенство

$$\mathcal{K}^2(\tau, n, r, m) = K(\tau, n, r, \lambda), \quad \lambda = (m-2)/2 \tag{1.16}$$

при $\tau > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad r > 0, \quad m = 2, 3, \dots$.

К задаче (1.15) также сводится (как видно из работ [34]–[35]) вопрос о точном неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве L^2_λ вещественных четных 2π-периодических функций со скалярным произведением

$$(F, G)_\lambda = \int_0^\pi F(x) G(x) \sin^{2\lambda} x\, dx, \quad \lambda \geq 0 \tag{1.17}$$

и нормой $\|F\|_\lambda = (F,F)_\lambda^{1/2}$. Как уже отмечалось выше (см. (1.13)) система (1.12) косинус-полиномов Гегенбауэра является ортогональной в смысле скалярного произведения (1.17). Каждая функция F из L^2_λ разлагается в ряд Фурье по этим полиномам

$$F(x) = \sum_{k\ge 0} a_k R_k(x), \quad a_k = (F, R_k)_\lambda \|R_k\|_\lambda^{-2},$$

а частичная сумма этого ряда $S_{n-1}F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k R_k(x)$ является ближайшей к F (в смысле нормы $\| \ \|_\lambda$) косинус-полиномом порядка $\le n-1$. То есть минимум

$$E_{n-1}(F)_\lambda = \min\{\|F-P\|_\lambda : P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k R_k(x),\ c_0,\dots,c_k \in \mathbf{R}\} \tag{1.18}$$

реализует полином $P = S_{n-1}F$

$$E^2_{n-1}(F)_\lambda = \|F - S_{n-1}F\|^2_\lambda = \sum_{k\ge n} \|a_k R_k\|^2_\lambda. \tag{1.19}$$

Для функций $F(x) = f(\cos x)$ из L^2_λ, $\lambda \ge 0$ определим понятие ультрасферического сдвига с шагом $t \in \mathbf{R}$ (см. [34]–[36]), т.е. введем оператор $T_t = T_{t,\lambda}$, действующий из L^2_λ в L^2_λ следующим образом

$$T_t F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\{F(x+t) + F(x-t)\}, & \lambda = 0, \\ \mu(\lambda)\displaystyle\int_0^\pi f(\cos x\ \cos t + & \\ +\sin x\ \sin t\ \cos\varphi) \sin^{2\lambda-1}\varphi\, d\varphi, & \lambda > 0, \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\mu(\lambda) = 1 / \int_0^\pi \sin^{2\lambda-1}\varphi\, d\varphi.$$

В 1817 году, а возможно, еще раньше, А.М.Лежандр [37, с.262, формула (x)], при $\lambda = \frac{1}{2}$, а затем в 1874 году Л. Гегенбауэр (см. [38, с.402]) при $\lambda > 0$ установили важное свойство этой операции, именуемой формулой умножения,

$$T_t R_k(x) = R_k(t) R_k(x), \quad k = 0,1,\dots, \quad t,x \in \mathbf{R}, \quad \lambda \ge 0. \tag{1.21}$$

Также как и выше (см. (1.3)), определим $\delta_t^r = \delta_{t,\lambda}^r$ – разностный оператор порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbf{R}$, соответствующий сдвигу T_t, по формуле

$$\delta_t^r = (I - T_t)^{r/2} = \sum_{k\ge 0} \frac{1}{k!}\ \psi_r^{(k)}(0)\ T_t^k.$$

Модулем непрерывности порядка r функции F из L^2_λ назовем следующую функцию

$$\omega_r(F,\tau)_\lambda = \sup_{0<t\le\tau} \|\delta_t^r F\|_\lambda, \quad \lambda \ge 0, \quad r > 0, \quad \tau > 0.$$

Из формулы умножения (1.21) вытекают свойства разностного оператора δ_t^r, аналогичные свойствам (1.8) – (1.11) оператора Δ_t^r. В частности, для каждой функции $F(x) = \sum_{k\ge 0} a_k R_k(x)$ из L^2_λ имеем

$$\|\delta_t^r F\|^2_\lambda = \sum_{k\ge 1} \{1 - R_k(t)\}^r \|a_k R_k\|^2_\lambda, \quad \lambda \ge 0, \quad r > 0, \quad t > 0. \tag{1.22}$$

Отсюда и (1.19) видно, что задача о точной константе $c = c(\tau, n, r, \lambda), \tau > 0,\ r > 0,\ \lambda \ge 0,\ n = 1, 2, \ldots$ в неравенстве Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(F)_\lambda \le c \cdot \omega_r(F,\tau)_\lambda, \quad F \in L^2_\lambda \tag{1.23}$$

сводится к задаче (1.15), причем

$$c^2(\tau, n, r, \lambda) = K(\tau, n, r, \lambda). \tag{1.24}$$

Следовательно (см. (1.16)),

$$\mathcal{K}(\tau, n, r, m) = c\left(\tau, n, r, \frac{m-2}{2}\right), \tag{1.25}$$

$\tau > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $m = 2, 3, \ldots$. Это равенство означает, что в (1.5) верхнюю грань достаточно брать по зональным функциям $f \in L^2$, т.е. функциям $f(x) = F(x \cdot y)$, зависящих лишь от скалярного произведения переменной точки $x \in \mathbf{S}^{m-1}$ и фиксированной точки $y \in \mathbf{S}^{m-1}$ (см. [34], [32], [35]).

2 Основные результаты.

Остановимся вначале на случае $L^2(\mathbf{S}^1)$. В этом случае $\lambda = 0$, $\mathbf{S}^1$ – обычная окружность. Функции f из $L^2(\mathbf{S}^1)$ можно отождествить с 2π-периодическими функциями $F(u) = f(e^{iu})$ из $L^2_{2\pi}$. Задача (1.4), (1.5) сводится к задаче о наименьшей константе $K = K(\tau, n, r, 0) = \mathcal{K}^2(\tau, n, r, 2)$ в неравенстве

$$\sum_{k\ge n} \rho_k \le K \sup_{0<t\le\tau} \sum_{k\ge 1} \rho_k \{1 - \cos\, kt\}^r,$$

$$\sum_{k\ge 1} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Первые точные результаты в этой задаче получил Н.И. Черных [6, 7, 9], которые в терминах, принятых здесь, можно записать в следующем виде

$$K(\tau, n, 1, 0) = 1, \quad \tau \geq \pi/n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

$$K(\tau, n, 1, 0) > 1, \quad 0 < \tau < \pi/n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

$$K(\tau, n, r, 0) = \frac{2^r}{\binom{2r}{r}} = \frac{2^r\{\Gamma(r+1)\}^2}{\Gamma(2r+1)}, \quad \tau \geq 2\pi/n, \quad n > r, \quad r = 2, 3, \ldots. \tag{2.3}$$

В работах автора [12, 13] найдена $K\left(\dfrac{\pi}{ln}, n, 1, 0\right)$ для натуральных $l \geq 1 + 3n/2, \ \ n = 1, 2, \ldots$, а также для натуральных $l \in [3n/4, \ 3n/2], n \geq 10$. В работе М.Ж.Шакеновой [14] содержится утверждение, равносильное тому, что равенство (2.3) остается верным и в случае вещественного $r > 0, \ \tau = 2\pi/n$.

Перейдем к многомерному случаю $L^2(\mathbf{S}^{m-1}), \ \ m \geq 3, \lambda = (m-2)/2$. Минимальное положительное значение аргумента функции $R_n = R_{n,\lambda}$, при котором она достигает локального минимума, локального максимума, обозначим через $h_{n,\lambda}$ и $t_{n,\lambda}$ соответственно. Единственный корень уравнения $R_n(u) = R_n(t_{n,\lambda}), \ \ u \in (0, h_{n,\lambda})$ обозначим через $v_{n,\lambda}$. В.Ю. Попов [29] установил, что

$$K^2(\tau, n, r, m) = \{1 - R_n(\tau)\}^{-r}$$

при $m = 3, 4, \ldots, \ r = 2, 4, \ldots, \ n = 1, 2, \ldots, \ 0 < \tau \leq v_{n,\lambda}$, хотя его доказательство проходит и в случае вещественного $r > 0$. В совместной работе [27] В.В. Арестова и В.Ю. Попова был анонсирован следующий результат для случая $m = 3, 4$

$$\mathcal{K}\left(\frac{2\pi}{n+1}, n, 2r, m\right) = 1, \quad r = 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.4}$$

Для $\lambda \geq 0, \ n = 1, 2, \ldots$ обозначим через $\tau_{n,\lambda}$ первый положительный нуль косинус-полинома Гегенбауэра $C_n^\lambda(\cos\tau)$

$$\tau_{n,\lambda} = \min\{\tau > 0 : \ C_n^\lambda(\cos\tau) = 0\}. \tag{2.5}$$

В настоящей статье доказана

ТЕОРЕМА 2.1 *Пусть* $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда выполняются следующие утверждения*

(A) *при* $\lambda \geq 0$ *для каждой функции* $F \in L^2_\lambda, \ F \not\equiv \mathrm{const}$ *справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(F)_\lambda < \omega_r(F, 2\tau_{n,\lambda})_\lambda; \quad r \geq 1, \tag{2.6}$$

$$E_{n-1}(F)_\lambda < 2^{(1-r)/2}\omega_r(F, 2\tau_{n,\lambda})_\lambda, \quad 0 < r < 1; \tag{2.7}$$

(B) *при* $\lambda > 0$ *для любого* $\tau \in (0, \pi)$ *существует последовательность функций* F_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *из* L^2_λ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} E_{n-1}(F_k)_\lambda / \omega_r(F_k, \tau)_\lambda \geq 1, \quad r > 0.$$

(C) *при* $\lambda > 0$ *существует последовательность функций* F_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *из* L^2_λ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} E_{n-1}(F_k)_\lambda / \omega_r(F_k, \pi)_\lambda \geq 1, \quad 0 < r \leq 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Утверждение (B) теоремы 2.1 принадлежит В.В. Арестову (см. ниже лемму 4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для $\lambda = 0,\ r = 1$ утверждения теоремы 2.1 получены Н.И. Черных [6], а при $\lambda = 0, r > 1$ утверждение (A) теоремы 2.1 доказано В.В. Шалаевым [39].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. С помощью функции $F(x) = R_n(x)$ легко показать, что при $0 < \tau < \tau_{n,\lambda},\ n \in \mathbf{N},\ r > 0,\ \lambda \geq 0$ точная константа $c = c(\tau, n, r, \lambda)$ в неравенстве (1.23) будет строго больше единицы.

В силу равенства (1.25) следствием теоремы 2.1 является

ТЕОРЕМА 2.2 *Пусть* $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда справедливы следующие утверждения*

(A) *при* $m = 2, 3, \ldots,\ \lambda = (m-2)/2$ *для каждой функции* $f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1})$, $f \not\equiv \mathrm{const}$ *выполняются неравенства*

$$E_{n-1}(f) < \omega_r(f, 2\tau_{n,\lambda}), \quad r \geq 1, \tag{2.8}$$

$$E_{n-1}(f) < 2^{(1-r)/2}\omega_r(f, 2\tau_{n,\lambda}), \quad 0 < r < 1; \tag{2.9}$$

(B) *при* $m = 3, 4, \ldots,\quad \tau \in (0, \pi)$ *существует последовательность функций* f_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *из* $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} E_{n-1}(f_k) / \omega_r(f_k, \tau) \geq 1, \quad r > 0. \tag{2.10}$$

(C) *при* $m = 3, 4, \ldots$ *существует последовательность функций* f_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *из* $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} E_{n-1}(f_k) / \omega_r(f_k, \pi) \geq 1, \quad 0 < r \leq 1. \tag{2.11}$$

Эта теорема и замечание 2.3 позволяют локализовать точку Черныха в неравенстве Джексона—Стечкина в многомерном случае.

СЛЕДСТВИЕ 2.1 *Пусть $m = 3, 4, \ldots,$ $\lambda = (m-2)/2$. Тогда точная константа в неравенстве Джексона–Стечкина (1.4) в пространстве $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ удовлетворяет соотношениям*

$$\mathcal{K}(\tau, n, r, m) > 1, \quad 0 < \tau < \tau_{n,\lambda}, \quad r > 0, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$\mathcal{K}(\tau, n, r, m) = 1, \quad \tau \in [2\tau_{n,\lambda}, \pi), \quad r \geq 1, \quad n = 2, 3, \ldots;$$

$$\mathcal{K}(\tau, n, 1, m) = 1, \quad \tau \geq 2\tau_{n,\lambda}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Теорема 2.2 для случая $m = 3,$ $n = 1$ и $m = 4,$ $n \geq 1$ содержится в работе В.В. Арестова и В.Ю. Попова [27] (см. (2.4)), а при $m = 3,$ $n \geq 2$ уточняет результат (2.4), т.к. $2\tau_{n,1/2} < 2\pi/(n+1)$ (см. [40, с.147, (6.6.4)]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. В силу известного свойства (1.11) [23, с.130] неравенство (2.9) является следствием неравенства (2.8).

Для доказательства утверждения (A) теоремы 2.1 применялись идеи, заложенные в работах Н.И. Черных [6, 7] и В.А. Юдина [24] о построении экстремального веса (решения двойственной задачи).

3 Некоторые свойства ультрасферического сдвига.

В этом пункте приводятся необходимые в дальнейшем известные свойства (см. [34, 35]) оператора

$$T_t F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\{F(x+t) + F(x-t)\}, & \lambda = 0, \\ \mu(\lambda)\displaystyle\int_0^\pi f(\cos x \, \cos t + & \\ + \sin x \, \sin t \, \cos\varphi) \sin^{2\lambda-1}\varphi \, d\varphi, & \lambda > 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\mu(\lambda) = 1 / \int_0^\pi \sin^{2\lambda-1}\varphi \, d\varphi$$

ультрасферического сдвига с шагом $t \in \mathbf{R}$, действующего на функции $F(x)$ вида

$$F(x) = f(\cos x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

ЛЕММА 3.1 *Пусть $\lambda \geq 0,$ $0 < \tau \leq \pi/2$, функция $F(x) = f(\cos x)$ непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}$ и*

$$F(x) = 0, \quad x \in [\tau, \pi].$$

Тогда функция $G(x) = T_\tau F(x)$ является непрерывной при всех $x \in \mathbf{R}$ и

$$G(x) = 0, \quad x \in [2\tau, \pi].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\lambda = 0$ утверждения леммы легко проверяются. Пусть $\lambda > 0$. Непрерывность функции G очевидна. По условию леммы имеем

$$f(u) = 0, \quad u \in [-1, \cos\tau]. \tag{3.2}$$

Функция $A(x,\tau,\varphi) = \cos x\, \cos\tau + \sin x\, \sin\tau\, \cos\varphi$ принимает свои значения в отрезке $[-1, \cos\tau]$, если

$$0 < \tau \le \pi/2, \quad 0 \le \varphi \le \pi, 2\tau \le x \le \pi. \tag{3.3}$$

Действительно, в этом случае $\sin x\, \sin\tau \ge 0$, поэтому при фиксированных $\tau \in (0, \pi/2],\ x \in [2\tau, \pi]$ функция $A(x,\tau,\varphi)$ монотонно изменяется в отрезке $[\cos(x+\tau),\ \cos(x-\tau)]$, когда φ меняется от π до 0, при этом $[\cos(x+\tau),\ \cos(x-\tau)] \subseteq [-1, \cos\tau]$. Поэтому $-1 \le A(x,\tau,\varphi) \le \cos\tau$, если выполнено (3.3). Отсюда, (3.1) и (3.2) получаем утверждение леммы.

Напомним, что через $R_k = R_{k,\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ \ \lambda \ge 0$ мы обозначали полиномы

$$R_{k,0}(x) = \cos kx, R_{k,\lambda}(x) = C_k^\lambda(\cos x)/C_k^\lambda(1), \ \ \lambda > 0, \tag{3.4}$$

где

$$C_k^\lambda(u) = \sum_{l=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^l \Gamma(k-l+\lambda)(2u)^{k-2l}}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(l+1)\,\Gamma(k-2l+1)}$$

есть многочлен Гегенбауэра (ультрасферический многочлен) (см. [40, стр. 96, формула (4.7.31)]). Известны (см. [40, с.91,92,175], [38, с.399]) следующие свойства полиномов (3.4)

$$R_k(t) = (-1)^k R_k(\pi - t), \tag{3.5}$$

$$| R_k(t) | \le R_k(0) = 1, \tag{3.6}$$

$$\int_0^\pi R_k(x) R_l(x) \sin^{2\lambda} x\, dx = 0, \quad k \ne l, \tag{3.7}$$

где $k, l \in \mathbf{Z}_+,\ \ t \in \mathbf{R}, \quad \lambda \ge 0$. В частности, в пространстве L^2_λ функций со скалярным произведением

$$(F, G)_\lambda = \int_0^\pi F(x) G(x) \sin^{2\lambda} x\, dx, \quad \lambda \ge 0 \tag{3.8}$$

полиномы $R_k, k \in \mathbf{Z}_+$ образуют ортогональную систему.

В 1954 году С. Бохнер [34] (см. также [35]) ввел понятие ультрасферической свертки для функций $F(x) = f(\cos x), G(x) = g(\cos x)$ из $L^2_\lambda, \lambda \geq 0$

$$(F * G)_\lambda(t) = \int_0^\pi \{T_x F(t)\} G(x) \sin^{2\lambda} x \, dx$$

и, опираясь на результат (1.22) Л. Гегенбауэра, доказал коммутативность этой операции

$$(F * G)_\lambda(t) = (G * F)_\lambda(t), t \in \mathbf{R}. \tag{3.9}$$

Поскольку $T_x F(t) = T_t F(x)$ для любых $x,\ t$ из $\mathbf{R}$, то равенство (3.9) означает самосопряженность ультрасферического сдвига. То есть справедлива

ЛЕММА 3.2 *Пусть* $\lambda \geq 0,\ \ t \in \mathbf{R}$ *и функции* $F(x) = f(\cos x),\ G(x) = g(\cos x)$ *принадлежат пространству* L^2_λ. *Тогда справедливо равенство*

$$(T_t F, G)_\lambda = (F, T_t G)_\lambda. \tag{3.10}$$

4 Вспомогательные утверждения.

Рассмотрим следующее множество функций

$$\Phi_n^\lambda = \left\{ F(x) = \sum_{k \geq n} \rho_k R_k(x) \,:\, F(0) = \sum_{k \geq n} \rho_k = 1, \quad \text{в} \rho_k \geq 0 \right\}, \tag{4.1}$$

где $\lambda \geq 0,\ n \in \mathbf{N},\ R_k = R_{k,\lambda}$ – косинус-полиномы (3.4) Гегенбауэра. Это множество является выпуклым подмножеством пространства $C[0,\pi]$ непрерывных на $[0,\pi]$ функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Положительное число $\sigma = \sigma(\Phi_n^\lambda)$ назовем точкой Черныха для множества Φ_n^λ, если одновременно выполняются следующие два условия

(a) для любой функции $F \in \Phi_n^\lambda$ найдется точка $x^* \in (0,\sigma)$, в которой $F(x^*) < 0$;

(b) для любого $\delta \in (0,\sigma)$ найдутся функция $F_\delta \in \Phi_n^\lambda$ и число $\varepsilon > 0$, такие что $F_\delta(x) \geq \varepsilon$ при всех $x \in [0,\delta]$.

Результаты (2.1), (2.2) Н.И. Черных эквивалентны равенству

$$\sigma(\Phi_n^0) = \pi/n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

В.Ю. Попов [25, теорема 3] получил результат, из которого вытекает неравенство

$$\sigma(\Phi_n^\lambda) \leq 2\pi/(n+1), \quad \lambda = 1/2,\ \lambda = 1, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.3}$$

Одним из основных результатов этого пункта является

ЛЕММА 4.1 *Пусть* $\lambda \geq 0,\ \ n = 1, 2, \ldots$. *Тогда справедливы оценки*

$$\tau_{n,\lambda} \leq \sigma(\Phi_n^\lambda) \leq 2\tau_{n,\lambda}, \tag{4.4}$$

где $\tau_{n,\lambda}$ *есть первый положительный нуль полинома* $R_n(x)$ *(см. (3.4), (2.5)).*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. При $\lambda = 0$, в силу равенства (4.2) Н.И. Черных, $\sigma(\Phi_n^0) = 2\tau_{n,0}$. При $\lambda = 1/2,\ n = 1$ и при $\lambda = 1,\ n \geq 1$ оценка сверху в (4.4) совпадает с неравенством (4.3) В.Ю. Попова, а при $\lambda = 1/2, n \geq 2$ – уточняет его, т.к. $2\tau_{n,1/2} < 2\pi/(n+1)$ (см. [40, с.147, (6.6.4)]).

Доказательство леммы 4.1. Оценка снизу $\tau_{n,\lambda} \leq \sigma(\Phi_n^\lambda)$ вытекает из того, что функция R_n принадлежит множеству Φ_n^λ и удовлетворяет неравенству $R_n(x) \geq R_n(\delta) > 0$ при всех $x \in (0, \delta)$ и $\delta \in (0, \tau_{n,\lambda})$. Доказательство оценки сверху

$$\sigma(\Phi_n^\lambda) \leq 2\tau_{n,\lambda} \tag{4.5}$$

будем проводить по схеме Н.И. Черных [6]. А именно, построим вес – неотрицательную, ненулевую и интегрируемую на $[0, 2\tau_{n,\lambda}]$ функцию $v = v_{n,\lambda}$, удовлетворяющую условиям

$$\int_0^{2\tau_{n,\lambda}} R_k(x)\, v(x)\, dx \leq 0, \quad k \geq n. \tag{4.6}$$

Эти условия дадут нам неравенство (4.5), т.к. для каждой функции

$$F(x) = \sum_{k \geq n} \rho_k\, R_k(x), \quad F(0) = 1, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \geq n$$

из Φ_n^λ мы имели бы

$$\int_0^{2\tau_{n,\lambda}} F(x)\, v(x)\, dx = \sum_{k \geq n} \rho_k \int_0^{2\tau_{n,\lambda}} R_k(x)\, v(x)\, dx \leq 0.$$

Отсюда, ввиду нетривиальности и неотрицательности v, следовало бы существование точки $x^* = x^*(F)$ из открытого интервала $(0, 2\tau_{n,\lambda})$, в которой $F(x^*) < 0$.

Идея построения искомого веса v близка к той, которая применялась В.А. Юдиным в работе [24]. Предварительно мы определим четную 2π-периодическую непрерывную функцию $V = V_{n,\lambda}$, которую достаточно задать на отрезке $[0, \pi]$

$$V(x) = R_n(x), \quad 0 \leq x \leq \tau_{n,\lambda}; V(x) = 0, \quad \tau_{n,\lambda} < x \leq \pi. \tag{4.7}$$

Искомый вес $v = v_{n,\lambda}$ определим по формуле

$$v(x) = (\sin^{2\lambda} x) T_{\tau_{n,\lambda}} V(x), \quad x \in \mathbf{R}, \tag{4.8}$$

где T_t есть (3.1) ультрасферический сдвиг с шагом t. Из определения (3.1) видно, что v является ненулевой, неотрицательной и непрерывной на замкнутом отрезке $[0,\pi]$ функцией. При $n = 1, 2, \ldots$, в силу свойств (3.5)–(3.7), первый положительный нуль полинома R_n удовлетворяет неравенствам $0 < \tau_{n,\lambda} \le \pi/2$. Отсюда по лемме 3.1 имеем

$$v(x) = 0, \quad x \in [2\tau_{n,\lambda}, \pi]. \tag{4.9}$$

Используя (3.10) – самосопряженность оператора T_t, получаем

$$\begin{aligned} a_k(v) = \int_0^{2\tau_{n,\lambda}} v(x)\, R_k(x)\, dx = \int_0^{\pi} v(x)\, R_k(x)\, dx = \\ = (T_{\tau_{n,\lambda}} V, R_k)_\lambda = (V, T_{\tau_{n,\lambda}} R_k)_\lambda = \\ = R_k(\tau_{n,\lambda}) \int_0^{\tau_{n,\lambda}} R_n(x)\, R_k(x)\, \sin^{2\lambda} x\, dx. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Известно (см. [40, с.79]), что функции

$$\varphi_l(x) = R_l(x)\, \sin^\lambda x, \quad l = 1, 2, \ldots$$

удовлетворяют уравнению

$$\varphi_l''(x) - q(x,\lambda)\varphi_l(x) = -(l+\lambda)^2 \varphi_l(x), \tag{4.11}$$

$$q(x,\lambda) = \lambda(\lambda-1)\sin^{-2} x.$$

Рассмотрим выражение

$$c(n,k) = \{(n+\lambda)^2 - (k+\lambda)^2\} \int_0^{\tau_{n,\lambda}} \varphi_n(x)\, \varphi_k(x)\, dx.$$

Применяя стандартный прием с использованием уравнения (4.11), получим

$$\begin{aligned} c(n,k) = \int_0^{\tau_{n,\lambda}} \{\varphi_k''(x)\, \varphi_n(x) - \varphi_k(x)\, \varphi_n''(x)\} dx = \\ = \{\varphi_k'(x)\varphi_n(x) - \varphi_k(x)\varphi_n'(x)\} \Big|_0^{\tau_{n,\lambda}} = \\ = -\varphi_k(\tau_{n,\lambda})\varphi_n'(\tau_{n,\lambda}) = -\left(\sin^{2\lambda}\tau_{n,\lambda}\right) R_k(\tau_{n,\lambda}) R_n'(\tau_{n,\lambda}). \end{aligned}$$

Отсюда и (4.10) вытекает, что

$$a_n(v) = 0,$$

$$a_k(v) = R_k(\tau_{n,\lambda}) \left\{(n+\lambda)^2 - (k+\lambda)^2\right\}^{-1} c(k,n) =$$

$$= \left\{(k+\lambda)^2 - (n+\lambda)^2\right\}^{-1} \left(\sin^{2\lambda}\tau_{n,\lambda}\right) R_k^2(\tau_{n,\lambda}) R_n'(\tau_{n,\lambda}) \le 0$$

при $k > n$, т.к. $R_n'(\tau_{n,\lambda}) < 0,\ n = 1, 2, \dots$ (поскольку все нули полинома R_n вещественные, простые и при переходе через точку $\tau_{n,\lambda}$ функция R_n меняет знак с $+$ на $-$). То есть мы нашли вес v, удовлетворяющий условиям (4.6). Лемма доказана.

Второе основное утверждение этого пункта принадлежит В.В. Арестову и публикуется здесь с его разрешения.

ЛЕММА 4.2 *Пусть на отрезке $[0,\tau]$ задана система непрерывных функций $P_k,\ \ k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющая следующим трем условиям*

(a) $P_k(0) = 0,\ \ k = 1, 2, \dots$;

(b) *существует абсолютная константа $M \ge 1$ такая, что $\mid P_k(t) \mid \le M$ при $t \in [0,\tau], k = 1, 2, \dots$;*

(c) *для любого $\xi \in (0,\tau]$ выполняется неравенство*

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\{\max_{t\in[\xi,\tau]} P_k(t)\} \le 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon^* \in (0,1)$ найдется функция

$$F(t) = \sum_{k\ge1} \rho_k\, P_k(t), \quad \sum_{k\ge1} \rho_k = 1$$

с неотрицательными коэффициентами $\rho_k \ge 0,\ \ k = 1, 2, \dots$, такая, что

$$F(t) \le 1 + \varepsilon^*, \quad t \in [0,\tau] \tag{4.12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$. Положим $F_1(t) = P_1(t)$. Пусть построена функция

$$F_n(t) = \sum_{k=1}^{N(n)} \rho_k P_k(t), \quad \sum_{k=1}^{N(n)} \rho_k = 1, \quad \rho_k \ge 0.$$

Выберем число $\theta \in (0,1)$, удовлетворяющее условию $\theta M \le 1-\varepsilon$. Построим F_{n+1} следующим образом. Возьмем такое число $\delta_n \in (0,\tau)$, чтобы выполнялось неравенство

$$(1-\theta)F_n(t) \le \varepsilon, \quad t \in [0,\delta_n].$$

Теперь выберем $N(n+1)$ такое, чтобы

$$P_{N(n+1)}(t) \le 1 + \varepsilon = E, \quad t \in [\delta_n,\tau].$$

Положим $F_{n+1}(t) = \theta P_{N(n+1)}(t) + (1-\theta)F_n(t)$. Для $t \in [0, \delta_n]$ имеем

$$F_{n+1}(t) \leq \theta M + (1-\theta)\varepsilon \leq 1-\varepsilon+(1-\theta)\varepsilon = 1+\varepsilon\theta \leq 1+\varepsilon\frac{1-\varepsilon}{M} \leq 1+\varepsilon = E.$$

Обозначим через $M_k = \max\{F_k(t) : \ 0 \leq t \leq \tau\}, k = 1, 2, \ldots, n$, очевидно, что $M_k \leq M$. При $t \in [\delta_n, \tau]$ получаем

$$F_{n+1}(t) \leq \theta E + (1-\theta)M_n,$$

$$M_n \leq \max\{E, \theta E + (1-\theta)M_{n-1}\},$$

$$\vdots$$

$$M_2 \leq \max\{E, \theta E + (1-\theta)M_1\}.$$

Поскольку выражение

$$\theta E + (1-\theta)\{\theta E + (1-\theta)\{\theta E + (1-\theta)\{\ldots(1-\theta)M_1\}\}\ldots\} =$$

$$= \theta E\{1 + (1-\theta) + (1-\theta)^2 + \ldots + (1-\theta)^{n-1} + (1-\theta)^n M_1/(\theta E)\}$$

при $n \to \infty$ стремится к $\theta E/\{1-(1-\theta)\} = E = 1+\varepsilon$ и любая сумма вида

$$\theta E\{1 + (1-\theta) + \ldots + (1-\theta)^{k-1} + (1-\theta)^k/\theta\}, \ \ k = 1, 2, \ldots, n$$

равна $E = 1+\varepsilon$, то это влечет неравенство $\overline{\lim}_{n\to\infty} M_n \leq 1+\varepsilon$, что эквивалентно утверждению леммы.

В следующем пункте нам также понадобится очевидное утверждение.

Предложение 4.1. Если $r \geq 1$, $| \ u \ | \leq 1$, то $1 - ru \leq (1-u)^r$. Если $0 < r < 1$, $| \ u \ | \leq 1$, то $2^{r-1}(1-u) \leq (1-u)^r$.

5 Доказательство теоремы 2.1.

Начнем с доказательства утверждения (A) теоремы 2.1. Пусть $r \geq 1$, в силу соотношений (1.19), (1.22), (1.15), (1.14) и предложения 4.1 достаточно установить неравенство

$$\sum_{k\geq n} \rho_k < \sup_{0<t\leq 2\tau_{n,\lambda}} \sum_{k\geq n} \{1 - rR_k(t)\}\rho_k \tag{5.1}$$

для любой последовательности неотрицательных чисел $\rho_k \geq 0, k = n, n+1, \ldots$, удовлетворяющей условию $\sum_{k\geq n} \rho_k = 1$. Заметим, что ряд, стоящий в правой части (5.1) можно представить в виде

$$\sum_{k\geq n} \{1 - rR_k(t)\}\rho_k = \sum_{k\geq n} \rho_k - rF(t),$$

где функция $F(t)=\sum_{k\geq n}\rho_k R_k(t)$ принадлежит множеству Φ_n^λ (см. (4.1)). В силу леммы 4.1 точка Черныха для множества Φ_n^λ удовлетворяет неравенству

$$\sigma(\Phi_n^\lambda)\leq 2\tau_{n,\lambda}.$$

Следовательно, (см. определение 4.1, часть (a)) для F найдется точка $x^*\in(0,2\tau_{n,\lambda})$, в которой $F(x^*)<0$. Поэтому справедливо неравенство

$$\sup_{0<t\leq 2\tau_{n,\lambda}}\left\{\sum_{k\geq n}\rho_k - rF(t)\right\} > \sum_{k\geq n}\rho_k,$$

которое совпадает с (5.1). Случай $0<r<1$ получается аналогично.

Для доказательства утверждения (B) теоремы 2.1 воспользуемся леммой 4.2 В.В. Арестова. Пусть $r>0,\ 0<\tau<\pi$. Система функций

$$P_k(t)=\{1-R_{n+k}(t)\}^r,\quad k=0,1,\ldots,$$

как известно (см. [40, с.175, (b). Формула Дарбу, формула(7.32.2)]), удовлетворяет всем условиям леммы 4.2. Поэтому для любого $\varepsilon\in(0,1)$ найдется последовательность неотрицательных чисел $\rho_0,\rho_1,\ldots$ такая, что $\sum_{k\geq 0}\rho_k=1$ и

$$\sum_{k\geq 0}\rho_k\Big/\sup_{0<t\leq\tau}\sum_{k\geq 0}\{1-R_{n+k}(t)\}^r\rho_k\geq\frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Устремляя ε к нулю, получим требуемое утверждение.

Для доказательства утверждения (C) теоремы 2.1 при $r=1$ достаточно, в силу леммы 4.2, построить последовательность функций $F_N,\ N=n+1,n+2,\ldots$, вида $F_N(x)=\sum_{k=n+1}^N\rho_k R_k(x),\ F_N(0)=1$ с неотрицательными коэффициентами $\rho_k,\ k\geq n+1$ такую, чтобы при любом $\xi\in(0,\pi]$ выполнялось бы соотношение

$$\|F_N\|_{C[\xi,\pi]}\to 0\quad \text{п}\quad N\to\infty. \tag{5.2}$$

В случае $0<r<1$ достаточно будет затем применить неравенство Йенсена $\sum_{k=n+1}^N\rho_k\{1-R_k(x)\}^r\leq\left\{\sum_{k=n+1}^N\rho_k\{1-R_k(x)\}\right\}^r$, $\sum_{k=n+1}^N\rho_k=1,\ \rho_k\geq 0,\ k\geq n+1$.

Пример такой последовательности функций можно построить с помощью формулы Кристоффеля—Дарбу (см. [40, гл.3, §\nobreakspace {}3.2], [41, формулы (1.4), (2.4), (2.5), (2.7), (4.7), (4.14)]), а также равенства (см. [40, (4.7.14)]) $\frac{d}{dt}C_k^\lambda(t)=2\lambda C_{k-1}^{\lambda+1}(t)$ для производных алгебраических многочленов Гегенбауэра. А именно, при $t=\cos x$ положим (см. (3.4))

$$P_k(t)=R_k(\mathrm{arccos}t)=\frac{C_k^\lambda(t)}{C_k^\lambda(1)},\quad k=0,1,\ldots,$$

$$Q_N(t)=\sum_{k=0}^{N} r_k P_k(t), \quad r_k=\frac{k+\lambda}{\lambda}\binom{k+2\lambda-1}{k}.$$

Следующая последовательность функций $F_N(x)=F_N^*(t),\ t=\cos x$,

$$F_N^*(t)=\frac{Q_N(t)-Q_n(t)}{Q_N(1)-Q_n(1)}=\frac{\sum_{k=n+1}^{N} r_k P_k(t)}{\sum_{k=n+1}^{N} r_k},$$

$N=n+1,n+2,\ldots$, является искомой, т.к. $F_N^*(t)$ преобразуется к виду

$$F_N^*(t)=\frac{2\lambda+1}{2\lambda(1-t)}\cdot\frac{\binom{N+2\lambda}{N}\{P_N(t)-P_{N+1}(t)\}-\binom{n+2\lambda}{n}\{P_n(t)-P_{n+1}(t)\}}{\binom{N+2\lambda}{N}(2\lambda+1+2N)-\binom{n+2\lambda}{n}(2\lambda+1+2n)}$$

и (см., например, [32, с.248]) $\binom{N+2\lambda}{N}=\frac{N^{2\lambda}}{\Gamma(2\lambda+1)}\left\{1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)\right\}$. Теорема 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Используя (4.6), (4.8), можно получить доказательство утверждения (A) теоремы 2.1 в случае $r>1$ способом, предложенным в работе В.В. Шалаева [39, теорема 1, следствие 1]

ЗАМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. В 1995 г. В.В.Арестов и В.Ю.Попов опубликовали [42] доказательство точного неравенства Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$, $m=3,4$, аннонсированного ими в [27].

Данная работа обсуждалась в Уральском государственном университете на семинаре под рукодством профессора В.В.Арестова. Автор благодарен профессору В.В.Арестову, а также доценту В.Ю.Попову за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Jackson D. On Approximation by Trigonometric Sums and Polinomials // Trans. Amer. Math. Soc., 1912, v. 13, 491–515.

[2] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации.– М.: Гостехиздат, 1947, 323 с.

[3] Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР, серия матем., 1951, т. 15, с. 219–242.

[4] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного.– М.: Физматгиз, 1960, 624 с.

[5] Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР, 1962, т. 145, N 3, с.514–515.

[6] Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИ АН СССР, 1967, т. 88, с. 71–74.

[7] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки, 1967, т. 2, в. 5, с. 513–522.

[8] Корнейчук Н.П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки, 1982, т. 32, в. 3, с. 669–674.

[9] Arestov V.V., Chernykh N.I. On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // In: Approximation and functions spaces.– Proc. Conf. Gdan′sk, 1979.– Amsterdam: North-Holland, 1981, 25–43.

[10] Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ $(1 \leq p < 2)$ с точной константой // Труды МИРАН, 1992, т. 198, с. 232–241.

[11] Жук В.В. Аппроксимация периодических функций.– Л.: ЛГУ, 1982, 366 с.

[12] Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки, 1986, т. 39, в. 5, с. 651–664.

[13] Бабенко А.Г. О неравенстве Джексона в пространстве L^2 // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987, с. 4–14.

[14] Шакенова М.Ж. О точном неравенстве между наилучшими приближениями и модулем гладкости положительного порядка в $L_p[0, 2\pi]^2$ // Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. Тез. докл.– Алматы, 1993, с. 178–179.

[15] Gronwall T.H. On the degree of convergence of Laplace's series // Trans. Amer. Math. Soc., 1914, v. 15, 1–30.

[16] Никольский С.М., Лизоркин П.И. Приближение сферическими полиномами // Труды МИАН, 1984, т. 166, с.186–200.

[17] Федоров В.М. Приближение функций на сфере // Вестн. Моск. Ун–та. Сер. 1, Математика. Механика. 1990, N 1, с. 15–23.

[18] Лизоркин П.И. О приближении функций на сфере σ. О пространствах $B^{\alpha}_{p,q}(\sigma)$ // ДАН, 1993, т. 331, N 5, с. 555–558.

[19] Никольский С.М., Лизоркин П.И. Аппроксимация функций на сфере // Известия АН СССР. Серия матем. 1987, т. 51, N 3, с.635—651.

[20] Вебстер А., Сеге Г. Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. М., Л.: ОНТИ ГТТИ, 1934, 320 с.

[21] Кушниренко Г.Г. О приближении функций, заданных на единичной сфере, конечными сферическими суммами // Научные доклады высшей школы. Физико-матем. науки, 1958, т. 3, N 4, с. 47—53.

[22] Кушниренко Г.Г. Некоторые вопросы приближения непрерывных функций на единичной сфере конечными сферическими суммами // Труды Харьковского политехнического института. Серия инженерно-физическая. 1959. T.XXV, вып.3. С.3—22.

[23] Рустамов Х.П. О приближении функций на сфере // Известия Академии наук, серия матем., 1993, т. 57, N 5, с. 127—148.

[24] Юдин В.А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки, 1981, т. 29, в. 2, с. 309—315.

[25] Попов В.Ю. О точных константах в неравенствах Джексона для наилучших сферических среднеквадратичных приближений // Изв. ВУЗов. Математика, 1981, N 12, с. 67—78.

[26] Шалаев В.В. Точные оценки приближения непрерывных на сфере функций линейными операторами типа свертки // Украинский матем. журн., 1991, т. 43, N 4, с. 565—567.

[27] Арестов В.В., Попов В.Ю. Неравенство Джексона на сфере L_2 // Теория приближения и задачи вычислительной математики: Тезисы докладов международной конференции (Днепропетровск, 26—28 мая 1993 г.) / ДДУ — Днепропетровск: 1993, с. 8.

[28] Попов В.Ю. Многомерные приближения в $L_2(T_m)$ // Теория функций и приближений. — Труды 3-й Саратовской зимней Школы (27 января — 7 февраля 1986 г.) Межвузовский научный сборник. Ч.3.— Саратов: Саратовский университет, 1988, с.22—25.

[29] Попов В.Ю. Приближение на сфере в L_2 // Докл. АН СССР, 1988, т. 301, N 4, с. 793—797.

[30] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987, 688 с.

[31] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1974.— 333 с.

[32] Berens H., Butzer P.L., Pawelke S. Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaver Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten // Publ. Res. Inst. Math. Sci. (Kyoto), ser. A, 1968, 4, 202–268.

[33] Иванов В.А. К вопросу о свойствах модулей непрерывности для функций на сфере // Дифф. уравнения, 1987, т. 23, N 3, с. 481–487.

[34] Bochner S. Positive zonal functions on spheres // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, 40, 1141–1147.

[35] Pawelke S. Ein Satz vom Jacksonschen Typ für algebraische Polynome // Acta Sci. Math., 1972, 33, 323–336.

[36] Потапов М.К. О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1. Матем., механ., 1983, N 4, с.43–52.

[37] Le Gendre A.M. Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures. T.2. Paris: 1817.

[38] Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч.1 – М.: ИЛ, 1949, 798 с.

[39] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Украинский матем. журн., 1991, т. 43, N 1, с. 125–129.

[40] Сеге Г. Ортогональные многочлены.— М.: Физматгиз, 1962, 500 с.

[41] Левенштейн В.И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Пробл. киб., 1983, т.40, с.43–110.

[42] Арестов В.В., Попов В.Ю. Неравенство Джексона на сфере L_2 // Известия ВУЗов. Математика. 1995, N 8 (399), с.13–20.

Институт математики и механики
Уральского отделения РАН
Бабенко Александр Григорьевич
620219, Екатеринбург, ГСП–384, ул. С. Ковалевской, 16.
Телефон: (3432) 49–32–35 (служебный).
Факс: (3432) 44–25–81.
E-mail: babenko@approx.imm.intec.ru