Статья опубликована в журнале:
Известия РАН. Серия математическая. 1998. Т. 68, N 6. С. 27–52;
English translation: Russian Acad. Sci. Math. Izv., 68 (1998), no. 6.
УДК 517.518.837
*

* Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS – International Association for the Promotion of Cooperation with Scientists from the Independent States of the Former Soviet Union, грант INTAS-94-4070.

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА ДЛЯ L^2 – ПРИБЛИЖЕНИЙ НА ОТРЕЗКЕ С ВЕСОМ ЯКОБИ И ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Г. Бабенко

30 марта 2000 г.

1 Введение.

В этой работе доказано точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 на отрезке с весом Якоби, и, как следствие, получены родственные неравенства для функций многих переменных, заданных на проективных пространствах. Указанный результат для приближений на отрезке, в основном, был анонсирован ранее автором в [2].

Пусть $\alpha > -1,\ \beta > -1$ и $R_k = R_k^{\alpha,\beta}$ – алгебраические многочлены Якоби порядка $k = 0, 1, 2, \ldots$, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-z)^\alpha(1+z)^\beta$ (см. [3, гл.IV])

$$\int_{-1}^{1} R_k(z)R_l(z)(1-z)^\alpha(1+z)^\beta dz = 0, \quad k \neq l, \quad k, l \in \mathbf{Z}^+,$$

и нормированные условием $R_k(1) = 1,\ k \in \mathbf{Z}^+$. Как известно (см. [4, с.75]), они удовлетворяют рекуррентному соотношению при k=1,2,...

$$\frac{2(k+\alpha+1)(k+\alpha+\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta+2)}R_{k+1}(z) =$$
$$= \left(z + \frac{\alpha^2-\beta^2}{(2k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta+2)}\right)R_k(z) - \frac{2k(k+\beta)}{(2k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta+1)}R_{k-1}(z),$$

$$R_0(z) = 1, \quad R_1(z) = \frac{\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)z}{2(\alpha + 1)}.$$

Ясно, что система косинус-полиномов Якоби

$$\phi_k(x) = \phi_k^{\alpha,\beta}(x) = R_k^{\alpha,\beta}(\cos x), \quad \phi_k(0) = 1,\ k \in \mathbf{Z}^+, \tag{1.1}$$

является ортогональной на отрезке $[0, \pi]$ с весом $\left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1}$

$$\int_0^\pi \phi_k(x)\phi_l(x) \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx = 0, \quad k \neq l, \quad k, l \in \mathbf{Z}^+.$$

Приведем известные примеры таких полиномов (см. [3, с.72, (4.1.7), (4.1.8)])

$$\phi_k^{-1/2,-1/2}(x) = \cos kx; \quad \phi_k^{1/2,1/2}(x) = \frac{\sin(k+1)x}{(k+1)\sin x};$$

$$\phi_k^{1/2,-1/2}(x) = \frac{\sin \frac{2k+1}{2} x}{(2k+1) \sin \frac{x}{2}}, \quad \phi_k^{-1/2,1/2}(x) = \frac{\cos \frac{2k+1}{2} x}{\cos \frac{x}{2}}.$$

Косинус-полиномы Якоби обладают следующими замечательными свойствами (см. [3, с.71, (4.1.5)]): при любых $\alpha > -1$, $k \in \mathbf{Z}^+$ справедливы равенства

$$\phi_k^{\alpha,-1/2}(x) = \phi_{2k}^{\alpha,\alpha}\left(\frac{x}{2}\right), \quad \phi_k^{\alpha,1/2}(x) = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \phi_{2k+1}^{\alpha,\alpha}\left(\frac{x}{2}\right). \tag{1.2}$$

Обозначим через $L^2 = L^2_{\alpha,\beta}$ пространство вещественных измеримых четных 2π-периодических функций вида $F(x) = f(\cos x)$, $x \in \mathbf{R}$, со скалярным произведением

$$(F, G) = \int_0^\pi F(x)G(x) \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx$$

и нормой $\|F\| = (F, F)^{1/2}$. Наилучшим приближением функции $F \in L^2$ пространством

$$C_{n-1} = \left\{G :\ G(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kx, \quad a_k \in \mathbf{R}\right\}$$

косинус-полиномов порядка $n - 1$ называется величина

$$E_{n-1}(F) = \min\{\|F - G\| :\ G \in C_{n-1}\}. \tag{1.3}$$

Для оценки сверху этой величины нам понадобится важное обобщение понятия сдвига (см. [5]) произвольной функции $F \in L^2$, основанное на ее разложении в ряд Фурье по косинус-полиномам Якоби

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu \phi_\nu(x), \quad F_\nu = \frac{(F, \phi_\nu)}{(\phi_\nu, \phi_\nu)}. \tag{1.4}$$

А именно, оператором (обобщенного) сдвига с шагом $t \in \mathbf{R}$ называется линейный оператор T_t, который действует на функции $F \in L^2$ вида (1.4) по закону

$$T_t F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu \phi_\nu(t) \phi_\nu(x). \tag{1.5}$$

Поскольку $\phi_0(t) = 1$, то, как нетрудно заметить, оператор сдвига (с любым фиксированным шагом $t \in \mathbf{R}$) переводит постоянные функции в себя, например, $T_t 1 = 1$. Кроме того, известно (см. [3, с.175, (7.32.2)]), что в случае

$$\alpha \geq \beta > -1, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2} \tag{1.6}$$

косинус-полиномы Якоби $\phi_k = \phi_k^{\alpha,\beta}$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$\max_{t \in \mathbf{R}} |\phi_k(t)| = \phi_k(0) = 1, \quad k \in \mathbf{Z}^+. \tag{1.7}$$

Следовательно, в этом случае норма оператора T_t, как оператора из L^2 в L^2, равна единице. Поэтому применима схема Грюнвальда — Летникова [6], [7] (см. также [8, §\nobreakspace {}20], [9], [10]) построения соответствующего разностного оператора (вещественного) порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbf{R}$

$$\Delta_t^r = (I - T_t)^{r/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{r/2}{k} T_t^k, \tag{1.8}$$

где I — тождественный оператор, $\binom{a}{0} = 1$, $\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — биномиальные коэффициенты. Модулем непрерывности порядка $r > 0$ функции $F \in L^2$ называется следующая функция переменного $\tau > 0$

$$\omega_r(F, \tau) = \sup\{\|\Delta_t^r F\| : \ |t| \leq \tau\}.$$

Следующая взаимосвязь между модулями непрерывности различных порядков получается путем повторения рассуждений, содержащихся в работах С.Б.Стечкина [11, лемма 2], Х.П.Рустамова [9, с.130, неравенство (1.8) и его обоснование]. Пусть $\alpha \geq \beta > -1,\ \alpha \geq -1/2,\ \tau > 0$. Тогда для любой функции $F \in L^2_{\alpha,\beta}$ выполняется неравенство

$$\omega_q(F,\tau) \leq 2^{(q-r)/2}\omega_r(F,\tau), \quad 0 < r < q. \tag{1.9}$$

Кроме того, из определений (1.8), (1.5) и равенства Парсеваля следует, что для каждой функции $F \in L^2_{\alpha,\beta}$ вида (1.4) справедливо соотношение

$$\|\Delta_t^r F\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^2\{1-\phi_k(t)\}^r, \quad t \in \mathbf{R}, \quad r > 0, \tag{1.10}$$

из которого следует, что при $r > 0$

$$\omega_r(F,\tau) \leq \omega_r(F,\pi), \quad 0 < \tau \leq \pi; \quad \omega_r(F,\tau) = \omega_r(F,\pi), \quad \tau \geq \pi. \tag{1.11}$$

Зафиксируем числа α, β, удовлетворяющие условиям (1.6), а также числа $\tau > 0,\ r > 0,\ n \in \mathbf{N}$ и рассмотрим классическую задачу о точной константе $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)$ в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2 = L^2_{\alpha,\beta}$

$$E_{n-1}(F) \leq \mathcal{K}\omega_r(F,\tau), \quad F \in L^2, \tag{1.12}$$

т.е. задачу о вычислении величины

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) = \sup\left\{\frac{E_{n-1}(F)}{\omega_r\left(F,\tau\right)}: \quad F \in L^2, \quad F \not\equiv \mathrm{const}\right\}. \tag{1.13}$$

Величину (1.13) мы будем иногда называть константой Джексона–Стечкина. Эта задача имеет большую историю, информация о качественной картине в этой области (вопросы ограниченности констант) содержится в работах М.К.Потапова [12], Х.П.Рустамова [10]. Что касается точных результатов в этой тематике, то соответствующие исторические сведения можно найти в работе автора [1]. Ниже мы перечислим лишь те из них, которые имеют непосредственное отношение к теме исследований данной статьи. Хотя некоторые авторы приводимых ниже результатов применяли иные модули непрерывности, но при доказательстве они переходили к задачам, которые возникают и в данной работе. Учитывая это обстоятельство, мы сформулируем указанные результаты в обозначениях, принятых здесь.

Точную константу в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L^2_{-1/2,-1/2}$ нашел Н.И.Черных в 1967 году [13]

$$\mathcal{K}_n^{-1/2,-1/2}(\tau, r) = \sqrt{\frac{2^r}{\binom{2r}{r}}}, \quad \tau \geq \frac{2\pi}{n}, \quad n > r, \quad r = 2, 3, \dots . \tag{1.14}$$

Для случая $r = 1$ он получил [14], [15] более тонкое утверждение относительно поведения величины $\mathcal{K}_n^{-1/2,-1/2}(\tau,1)$ по τ. Подробнее, Н.И.Черных нашел точку $\tau = \tau_n^{-1/2,-1/2}(1) = = \pi/n$, начиная с которой указанная величина выходит на свой глобальный минимум, равный единице

$$\mathcal{K}_n^{-1/2,-1/2}(\tau,1) = 1, \quad \tau \geq \frac{\pi}{n}, \quad n = 1,2,3,\dots; \tag{1.15}$$

$$\mathcal{K}_n^{-1/2,-1/2}(\tau,1) > 1, \quad 0 < \tau < \frac{\pi}{n}, \quad n = 1,2,3,\dots. \tag{1.16}$$

Положим

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(r) = \min_{\tau>0} \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau,r). \tag{1.17}$$

Используя определение (1.13) и свойство (1.11), легко заметить, что

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(r) = \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\pi,r) = \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau,r), \quad \tau \geq \pi. \tag{1.18}$$

Сейчас естественно ввести следующее

Определение 1.1 *Точкой Черныха в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$ называется точная нижняя грань положительных значений $\tau > 0$, для которых величина $\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau,r)$ (как функция переменной τ) принимает свое минимальное значение $\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(r)$*

$$\tau_n^{\alpha,\beta}(r) = \inf\{\tau > 0 : \ \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau,r) = \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(r)\}. \tag{1.19}$$

Следующий существенный шаг в этом направлении был сделан В.А.Юдиным [16], который получил точное неравенство Джексона (с первым модулем непрерывности) в пространстве $L^2(\mathbf{T}^m)$ функций на многомерном торе $\mathbf{T}^m$, $m \geq 2$. Ряд точных неравенств Джексона–Стечкина между наилучшим среднеквадратичным приближением функции (одной или нескольких переменных) и значением ее r-го модуля непрерывности в одной точке был получен в работах [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [1], [25], [**?**]Gorbachev), [27]. В частности, в работе автора [1, теоремы 2.1, 2.2, замечания $2.1 - 2.5$] содержится результат (см. теорему 1.1 ниже), относящийся к ультрасферическому случаю задачи (1.13) о точной константе в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L^2_{\alpha,\alpha}$, $\alpha \geq -1/2$, который тесно связан с аналогичной задачей в пространстве $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ функций на единичной сфере $\mathbf{S}^{m-1}$ вещественного евклидова пространства $\mathbf{R}^m$ размерности $m \geq 2$.

При $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $n \in \mathbf{N}$ обозначим через $x_n^{\alpha,\beta}$ первый положительный нуль косинус-полинома Якоби $\phi_n^{\alpha,\beta}$ (см. (1.1))

$$x_n^{\alpha,\beta} = \min\{x > 0 : \ \phi_n^{\alpha,\beta}(x) = 0\}. \tag{1.20}$$

Теорема 1.1 *Пусть* $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда выполняются следующие утверждения*

(A) *при* $\alpha \geq -1/2$ *для каждой функции* $F \in L^2_{\alpha,\alpha}$, $F \not\equiv \mathrm{const}$ *справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(F) < \omega_r(F, 2x_n^{\alpha,\alpha}), \quad r \geq 1, \tag{1.21}$$

$$E_{n-1}(F) < 2^{(1-r)/2}\omega_r(F, 2x_n^{\alpha,\alpha}), \quad 0 < r < 1; \tag{1.22}$$

(B) *при* $\alpha > -1/2$ *для любого* $\tau \in (0, \pi)$ *существует последовательность функций* G_k, $k = 1, 2, \ldots,$ *из* $L^2_{\alpha,\alpha}$, *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{E_{n-1}(G_k)}{\omega_r(G_k, \tau)} \geq 1, \quad r > 0.$$

(C) *при* $\alpha > -1/2$ *существует последовательность функций* G_k, $k = 1, 2, \ldots,$ *из* $L^2_{\alpha,\alpha}$, *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{E_{n-1}(G_k)}{\omega_r(G_k, \pi)} \geq 1, \quad 0 < r \leq 1.$$

Замечание 1.1.

1) Пункт (B) теоремы 1.1 принадлежит В.В.Арестову, который на самом деле установил более общее утверждение [24, теорема 1], [1, лемма 4.2].

2) Для $\alpha = -1/2$, $r = 1$ утверждения теоремы 1.1 получены Н.И.Черных [14].

3) При $\alpha = -1/2$, $r > 1$ неравенство (1.21) доказано В.В.Шалаевым [22].

4) В случаях $\alpha = 0, 1/2$, $n \geq 1, r \geq 1$ В.Ю.Попов получил неравенство [24, (6.4), (6.6)]

$$E_{n-1}(F) < \omega_r\left(F, \frac{2\pi}{n+1}\right), \quad F \in L^2, \quad F \not\equiv \mathrm{const},$$

которое при $\alpha = 0$, $n = 1$, $r \geq 1$ и $\alpha = 1/2$, $n \geq 1$, $r \geq 1$ совпадает с неравенством (1.21), а при $\alpha = 0$, $n \geq 2, r \geq 1$ неравенство (1.21) уточняет указанный результат В.Ю.Попова, т.к. $2x_n^{0,0} < 2\pi/(n+1)$ (см. [3, с.147, (6.6.4)]).

5) В силу известного свойства (1.9) модуля непрерывности первое неравенство в пункте (A) влечет второе. В работе [1] содержится также иное доказательство неравенства (1.22).

Замечание 1.2. Ниже (см. первое утверждение следствия 4.1) будет показано, что утверждение (B) теоремы 1.1 выполняется и при $\tau = \pi$ (а значит, и при любом $\tau > 0$).

Предложение 1.1 *Если $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$, $r > 0$, $n \in \mathbf{N}$, то с помощью функции $\phi_n^{\alpha,\beta}(x)$ легко показать (см. (1.10), (3.1)), что при $0 < \tau < x_n^{\alpha,\beta}$ точная константа $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)$ в неравенстве (1.12) будет строго больше единицы*

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) > 1, \quad 0 < \tau < x_n^{\alpha,\beta}.$$

Теорема 1.1, замечание 1.2 и предложение 1.1 позволяют локализовать точку Черныха (1.19) в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L^2_{\alpha,\alpha}$, при $\alpha > -1/2$, $r \geq 1$.

Следствие 1.1 *Пусть $\alpha > -1/2$. Тогда точная константа в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L^2_{\alpha,\alpha}$ удовлетворяет соотношениям*

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,\alpha}(\tau, r) > 1, \quad 0 < \tau < x_n^{\alpha,\alpha}, \quad r > 0, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,\alpha}(\tau, r) = 1, \quad \tau \geq 2x_n^{\alpha,\alpha}, \quad r \geq 1, \quad n \in \mathbf{N};$$

и потому имеют место оценки

$$x_n^{\alpha,\alpha} \leq \tau_n^{\alpha,\alpha}(r) \leq 2x_n^{\alpha,\alpha}, \quad r \geq 1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

2 Формулировка основного результата.

В данной работе найдена точная константа $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)$ в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$ при $\alpha > \beta \geq -1/2$, $r \geq 1, \tau \geq 2x_n^{\alpha,\beta}$, $n \geq \max\left\{2, 1 + \dfrac{\alpha - \beta}{2}\right\}$ при $\beta > -1/2$, $n \geq 1$ при $\beta = -1/2$, и локализована точка Черныха (1.19) в этом неравенстве. Приведена многомерная интерпретация этого результата на примере L^2-приближений функций, заданных на проективных пространствах, а также дополнен результат В.В.Арестова об оценке снизу для константы Джексона – Стечкина на многомерной сфере.

Теорема 2.1 *Пусть $\alpha > \beta \geq -1/2$. Тогда выполняются следующие утверждения*

(A) *для каждого натурального* $n \geq \max\left\{2, 1 + \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right\}$ *и произвольной функции* F *из пространства* $L^2_{\alpha,\beta}$ *справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(F) \leq \omega_r(F, 2x_n^{\alpha,\beta}), \quad r \geq 1, \tag{2.1}$$

$$E_{n-1}(F) \leq 2^{(1-r)/2}\omega_r(F, 2x_n^{\alpha,\beta}), \quad 0 < r < 1; \tag{2.2}$$

(B) *для каждого натурального числа* $n \in \mathbf{N}$ *и любого положительного числа* $\tau > 0$ *существует последовательность функций* G_k, $k \in \mathbf{N}$, *из* $L^2_{\alpha,\beta}$, *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{E_{n-1}(G_k)}{\omega_r(G_k,\tau)} \geq 1, \quad r > 0.$$

Замечание 2.1. Пункты 1), 5) замечания 1.1 остаются в силе и для теоремы 2.1.

Замечание 2.2. Ниже (см. следствие 4.1) будет показано, что при $\alpha > \beta = -1/2$ утверждение (A) теоремы 2.1 справедливо для любого натурального $n \geq 1$.

Замечание 2.3. В случае $\alpha > \beta > -1/2$ утверждения теоремы 2.1 были анонсированы автором [2] в иной эквивалентной форме.

С помощью теоремы 2.1, замечания 2.2 и предложения 1.1 получаем

Следствие 2.1 *Пусть* $\alpha > \beta \geq -1/2$, $n \geq \max\left\{2, 1 + \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right\}$, $\tau \geq 2x_n^{\alpha,\beta}$. *Тогда для точной константы (1.13) и точки Черныха (1.19) в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве* $L^2_{\alpha,\beta}$ *выполняются соотношения*

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) = 1, \quad r \geq 1; \tag{2.3}$$

$$1 \leq \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) \leq 2^{(1-r)/2}, \quad 0 < r < 1;$$

$$x_n^{\alpha,\beta} \leq \tau_n^{\alpha,\beta}(r) \leq 2x_n^{\alpha,\beta}.$$

Следствие 2.2 *Пусть* $\alpha > -1/2$, $n \in \mathbf{N}$, $\tau \geq \min\{\pi, 2x_n^{\alpha,-1/2}\}$. *Тогда имеют место соотношения*

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,-1/2}(\tau, r) = 1, \quad r \geq 1;$$

$$1 \leq \mathcal{K}_n^{\alpha,-1/2}(\tau, r) \leq 2^{(1-r)/2}, \quad 0 < r < 1;$$

$$x_n^{\alpha,-1/2} \leq \tau_n^{\alpha,-1/2}(r) \leq \min\{\pi, 2x_n^{\alpha,-1/2}\}.$$

Доказательство теоремы 2.1 будет проведено поэтапно. Вначале мы покажем, как из результата В.В.Арестова [24, теорема 1], [1, лемма 4.2] и известных свойств полиномов Якоби следует оценка снизу для величины (1.13), а затем, применяя идеи, содержащиеся в работах Н.И. Черных [13], [14] и В.А.Юдина [16], по аналогии с тем, как это уже делалось в ультрасферическом случае в статье автора [1], построим вес (допустимую функцию в двойственной задаче), который даст нужную оценку сверху для искомой величины.

3 Редукция к экстремальной задаче для полиномов Якоби. Оценка снизу.

Пусть $\alpha \geq \beta > -1,\ \alpha \geq -1/2$. По стандартной схеме (см., например, [1]), с помощью равенства Парсеваля, получаем, что для любой функции $F \in L^2_{\alpha,\beta}$ квадрат величины (1.3) ее наилучшего среднеквадратичного приближения косинус-полиномами порядка $n-1$ вычисляется по формуле

$$E^2_{n-1}(F) = \sum_{k=n}^{\infty} F_k^2, \quad F_k = \frac{(F, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)}, \tag{3.1}$$

где $\phi_k = \phi_k^{\alpha,\beta},\ k \in \mathbf{Z}^+$, – косинус-полиномы Якоби (1.1), а квадрат нормы ее разности порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbf{R}$ удовлетворяет равенству (1.10). Поэтому задача (1.13) сводится к следующей экстремальной задаче для косинус-полиномов Якоби. При фиксированных $\alpha \geq \beta > -1,\ \alpha \geq -1/2,\ \tau > 0,\ r > 0,\ n \in \mathbf{N}$ найти наилучшую константу $K = K_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)$ в неравенстве

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \leq K \max_{|t| \leq \tau} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k(t)\}^r, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{3.2}$$

Не трудно показать, что

$$K_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) = \sup \left\{ \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} \rho_k}{\max\limits_{0 \leq t \leq \tau} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k(t)\}^r} :\ 0 < \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k < \infty,\ \rho_k \geq 0,\ k \geq n \right\}. \tag{3.3}$$

Обратим внимание читателя на то, что суммирование во всех суммах в (3.3) ведется по k, начиная с n, и это не есть опечатка. Очевидно также, что справедливо равенство

$$\{\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)\}^2 = K_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) \tag{3.4}$$

при $\alpha \geq \beta > -1, \alpha \geq -1/2,\ \tau > 0,\ r > 0,\ n \in \mathbf{N}$. Задачу (3.3) можно преобразовать к виду

$$K_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) = \sup\left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k :\ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k\{1-\phi_k(t)\}^r \leq 1,\ t \in [0,\tau];\ \rho_k \geq 0,\ k \geq n\right\}. \tag{3.5}$$

Видно, что (3.5) есть задача (бесконечномерного) линейного программирования. Такого рода задачи возникают и в других областях математики, например, при исследовании границ упаковок некоторых метрических пространств по схеме Дельсарта ([28], [29], [30], [4], [31, гл.9, 13, 14], [25]), оценок снизу мощности дизайнов (см. [32]), а также в теории чисел (см. [33], [34] и приведенную там библиографию).

Для оценки снизу величины (3.3) нам понадобится следующее утверждение, доказанное В.В.Арестовым [24, теорема 1], [1, лемма 4.2]. Ниже мы будем использовать стандартное обозначение $\|f\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ равномерной нормы непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f.

Лемма 3.1 (В.В.Арестов). *Пусть на отрезке* $[0, \tau],\ \tau > 0$, *задана система непрерывных функций* $\psi_k,\ k \in \mathbf{N}$, *удовлетворяющая следующим условиям:* 1) $\psi_k(0) = 0,\ k \in \mathbf{N}$; 2) $\sup\limits_{k\in\mathbf{N}} \|\psi_k\|_{C[0,\tau]} < \infty$; 3) *для любого* $\xi \in (0, \tau]$ *выполняется неравенство*

$$\varlimsup_{k\to\infty}\{\max_{t\in[\xi,\tau]} \psi_k(t)\} \leq 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ *найдется функция*

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k\, \psi_k(t), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = 1,$$

с неотрицательными коэффициентами $\rho_k \geq 0,\ \ k = 1, 2, \ldots$, *такая, что*

$$F(t) \leq 1 + \varepsilon, \quad t \in [0, \tau].$$

Следствие 3.1 *Пусть* $\alpha > \beta > -1,\ \alpha > -1/2,\ \tau > 0,\ r > 0, n \in \mathbf{N}$. *Тогда для точной константы* $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)$ *(см. (1.13)) в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве* $L^2_{\alpha,\beta}$ *имеет место следующая оценка снизу*

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) \geq 1. \tag{3.6}$$

Доказательство. Из определения (1.17) и соотношения (1.18) вытекает, что неравенство (3.6) достаточно доказать при $\tau = \pi$. Известно (см. [3, §\nobreakspace {}7.32.]), что при $\alpha > \beta > -1,\ \alpha > -1/2$ косинус-полиномы Якоби (1.1) $\phi_k = \phi_k^{\alpha,\beta}$ для произвольного фиксированного $\xi \in (0, \pi]$ равномерно стремятся к нулю на отрезке $[\xi, \pi]$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \|\phi_k\|_{C[\xi,\pi]} = 0.$$

Отсюда, с учетом свойства (1.7), следует, что при каждом фиксированном $r > 0$ система функций

$$\psi_k(x) = \{1 - \phi_{n-1+k}(x)\}^r, \quad k \in \mathbf{N},$$

удовлетворяет условиям леммы 3.1 при $\tau = \pi$. И значит, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется функция $F \in L^2_{\alpha,\beta}$, такая, что

$$\frac{E_n^2(F)}{\omega_r^2(F,\pi)} = \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} F_k^2}{\max\limits_{0\le t\le\pi} \sum\limits_{k=n}^{\infty} F_k^2\{1-\phi_k(t)\}^r} \ge \frac{1}{1+\varepsilon}, \quad F_k = \frac{(F,\phi_k)}{(\phi_k,\phi_k)}.$$

Это соотношение и определение (1.13) влекут (3.6). Следствие доказано.

4 Неравенство Джексона—Стечкина в пространстве $L^2_{\alpha,-1/2}$.

В этом пункте, с помощью предыдущего следствия, первого равенства в (1.2), соотношений (3.3) — (3.5) и утверждения (А) теоремы 1.1 будет получено

Следствие 4.1 *Пусть $\alpha > -1/2$. Тогда имеют место следующие два утверждения*

1) *при любых $\tau > 0,\ r > 0,\ n \in \mathbf{N}$ для константы (1.13) Джексона—Стечкина в пространстве $L^2_{\alpha,-1/2}$ выполняются оценки*

$$1 \le \mathcal{K}_n^{\alpha,-1/2}(\tau, r) \le \mathcal{K}_{2n}^{\alpha,\alpha}\left(\frac{\tau}{2}, r\right) \le \mathcal{K}_{2n-1}^{\alpha,\alpha}\left(\frac{\tau}{2}, r\right);$$

2) *при $n \in \mathbf{N},\ \tau \ge \min\{\pi, 2x_n^{\alpha,-1/2}\}$ справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(F) \le \omega_r(F,\tau), \quad F \in L^2_{\alpha,-1/2}, \quad r \ge 1;$$

$$E_{n-1}(F) \le 2^{(1-r)/2}\omega_r(F,\tau), \quad F \in L^2_{\alpha,-1/2}, \quad 0 < r < 1.$$

Доказательство. В силу первого равенства в (1.2) для величины (3.5) при $\alpha > \beta = -1/2,\ \tau > 0,\ r > 0,\ n \in \mathbf{N}$ имеем

$$
\begin{aligned}
K_n^{\alpha,-1/2}(\tau,r) &= \sup\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k : \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k\{1-\phi_k^{\alpha,-1/2}(t)\}^r \le 1,\ t\in[0,\tau];\ \rho_k\ge 0,\ k\ge n\right\} = \\
&= \sup\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k : \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k\left\{1-\phi_{2k}^{\alpha,\alpha}\left(\frac{t}{2}\right)\right\}^r \le 1,\ t\in[0,\tau];\ \rho_k\ge 0,\ k\ge n\right\} = \\
&= \sup\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k : \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k\{1-\phi_{2k}^{\alpha,\alpha}(t)\}^r \le 1,\ t\in\left[0,\frac{\tau}{2}\right];\ \rho_k\ge 0,\ k\ge n\right\} \le \\
&\le \sup\left\{\sum_{k=2n}^{\infty}\rho_k : \sum_{k=2n}^{\infty}\rho_k\{1-\phi_{k}^{\alpha,\alpha}(t)\}^r \le 1,\ t\in\left[0,\frac{\tau}{2}\right];\ \rho_k\ge 0,\ k\ge 2n\right\} = \\
&= K_{2n}^{\alpha,\alpha}\left(\frac{\tau}{2},r\right) \le K_{2n-1}^{\alpha,\alpha}\left(\frac{\tau}{2},r\right),
\end{aligned}
$$

что вместе с равенством (3.4) и предыдущим следствием влечет первое утверждение данного следствия. Отсюда, принимая во внимание определение (1.13) и неравенство (1.21), получаем неравенства

$$
1 \le \mathcal{K}_n^{\alpha,-1/2}(\tau,r) \le \mathcal{K}_{2n}^{\alpha,\alpha}\left(\frac{\tau}{2},r\right) \le 1 \quad \text{при} \quad r\ge 1,\ \frac{\tau}{2} \ge 2x_{2n}^{\alpha,\alpha} = x_n^{\alpha,-1/2},\ n\in\mathbf{N},
$$

которые вместе со вторым равенством в (1.18) и (1.9) завершают доказательство второго утверждения следствия.

5 Двойственная задача.

Большую роль при исследовании задачи (1.13) или эквивалентной ей задачи (3.3), (3.5) играет двойственная задача, которая для случая $\alpha = \beta = -1/2$, по существу, содержится и успешно применена в 1967 г. Н.И.Черных [14], [13]. Соотношение двойственности для более общей, чем (3.3), задачи было явно сформулировано и обосновано в совместной работе В.В.Арестова и В.Ю.Попова [24, леммы 1,2], которое мы приведем (для задачи (3.3)) в форме, близкой к той, которую использовал автор в [20, теорема 1] в случае $\alpha = \beta = -1/2$.

Именно, пусть $\tau > 0,\ V_0^+ = V_0^+[0,\tau]$ – множество ограниченных, неубывающих на отрезке $[0,\tau]$ функций $\mu \not\equiv \mathrm{const}$, непрерывных в нуле ($\mu(0) = \mu(+0)$). Такие функции $\mu \in V_0^+$ будем называть весами.

Лемма 5.1 *Пусть выполнены условия*

$$
\alpha\ge\beta>-1,\quad \alpha\ge -1/2,\quad \tau>0,\quad r>0,\quad n\in\mathbf{N}. \tag{5.1}
$$

Тогда для величины (3.3) имеет место равенство

$$K_n^{\alpha,\beta}(\tau,r)=\min\left\{\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{\inf\limits_{k\ge n}\int_0^\tau\{1-\phi_k(t)\}^r d\mu(t)}\ :\ \mu\in V_0^+\right\}. \tag{5.2}$$

Из этой леммы следует, что каждый вес $\mu\in V_0^+$ дает для величины (3.3), а следовательно (см. (3.4)), и для искомой величины (1.13), оценки сверху

$$K_n^{\alpha,\beta}(\tau,r)\le\Phi(\mu),\quad \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau,r)\le\sqrt{\Phi(\mu)}, \tag{5.3}$$

где функционал $\Phi(\mu)=\Phi_n^{\alpha,\beta}(\mu,\tau,r)$ задается формулой

$$\Phi(\mu)=\frac{\mu(\tau)-\mu(0)}{\inf\limits_{k\ge n}\int_0^\tau\{1-\phi_k(t)\}^r d\mu(t)}. \tag{5.4}$$

Ниже (в пункте 6) при

$$\alpha>\beta>-\frac{1}{2},\quad n\ge\max\left\{2,1+\frac{\alpha-\beta}{2}\right\},\quad \tau=2x_n^{\alpha,\beta} \tag{5.5}$$

будет построен вес $\mu=\mu_\tau\in V_0^+[0,\tau]$, на котором значение функционала (5.4) равно единице $\Phi(\mu_\tau)=1$. И, значит, (см. (5.3)) в этом случае мы получим оценку сверху для величины (1.13), совпадающую с оценкой снизу (3.6), т.е. найдем величину $\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau,r)=1$ при выполнении условий (5.5). Для построения указанного веса нам понадобятся некоторые известные свойства обобщенного сдвига, вытекающие из его интегрального представления, которое, в свою очередь, следует из формулы умножения для полиномов Якоби $\phi_k^{\alpha,\beta}$ при $\alpha>\beta>-1/2$, установленной Дж. Гаспером [35], [36], а затем доказанной в другой эквивалентной форме Т. Курнвиндером [37], [38] (см. также [39, (4.2), (5.4), (5.5)]). При этом, как отмечается в [37], в случае $\alpha>\beta=0$ формула сложения (и, как следствие, формула умножения) для полиномов Якоби получена ранее Р.Л.Шапиро [40].

6 Некоторые свойства обобщенного сдвига.

В данном пункте приводятся известные свойства обобщенного сдвига T_t (см. (1.5)), действующего в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$ при $\alpha>\beta>-1/2$. Отметим, что в ультрасферическом случае $\alpha=\beta>-1/2$ важные свойства этого сдвига были установлены в 1817 году А.М.Лежандром (случай $\alpha=$

$\beta = 0$) [41, с.262, формула (x)] и в 1874 году — Л.Гегенбауэром (случай $\alpha = \beta > -1/2$) (см. [42, с.402]). А именно, ими была доказана так называемая формула умножения для ультрасферических полиномов $\phi_k^{\alpha,\alpha}(x) = R_k^{\alpha,\alpha}(\cos x), k \in \mathbf{Z}^+$,

$$\begin{aligned} T_t\phi_k^{\alpha,\alpha}(x) &= \phi_k^{\alpha,\alpha}(t)\phi_k^{\alpha,\alpha}(x) = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi R_k^{\alpha,\alpha}(\cos x\cos t+\sin x\sin t\cos\xi)(\sin\xi)^{2\alpha}d\xi. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Почти сто лет спустя Дж.Гаспер получил аналог этого результата для косинус-полиномов Якоби $\phi_k^{\alpha,\beta}$, $\alpha > \beta > -1/2$, $k \in \mathbf{Z}^+$, в следующей истокообразной форме [35], [36] (см. также [38, пункт 5])

$$\begin{aligned} T_t\phi_k^{\alpha,\beta}(2x) &= \phi_k^{\alpha,\beta}(2t)\phi_k^{\alpha,\beta}(2x) = \\ &= \int_0^\pi \phi_k^{\alpha,\beta}(2\xi)\mathcal{F}^{\alpha,\beta}(\sin t\sin x, \cos t\cos x, \cos\xi)(\cos\xi)^{2\beta+1}\sin\xi\, d\xi, \end{aligned} \tag{6.2}$$

здесь $0 < t,\ x < \pi/2$ и ядро $\mathcal{F}^{\alpha,\beta}$ задается формулой

$$\mathcal{F}^{\alpha,\beta}(a,b,c) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)a^{-2\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi (a^2-b^2-c^2+2bc\cos v)_+^{\alpha-\beta-1}(\sin v)^{2\beta}dv, \tag{6.3}$$

$$(x)_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & \text{е } x > 0, \\ 0, & \text{е } x \le 0. \end{cases}$$

Затем Т.Курнвиндер [37], [38] (см. также [39, пункты 4,5]) нашел эквивалентное выражение формулы умножения для косинус-полиномов Якоби $\phi_k^{\alpha,\beta}(x) = R_k^{\alpha,\beta}(\cos x)$, $k \in \mathbf{Z}^+$, по форме более близкой к формуле умножения Лежандра — Гегенбауэра (6.1)

$$\begin{aligned} &T_t\phi_k^{\alpha,\beta}(x) = \phi_k^{\alpha,\beta}(t)\phi_k^{\alpha,\beta}(x) = \\ &= \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1\int_0^\pi R_k^{\alpha,\beta}(\cos\Psi)(1-\rho^2)^{\alpha-\beta-1}\rho^{2\beta+1}(\sin\xi)^{2\beta}d\xi d\rho, \end{aligned} \tag{6.4}$$

здесь

$$\cos\Psi = \cos t\cos x + \rho\sin t\sin x\cos\xi + \frac{1}{2}(\rho^2-1)(1-\cos t)(1-\cos x), \tag{6.5}$$

$t, x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}^+$, $\alpha > \beta > -1/2$. Следовательно, в этом случае действие сдвига (1.5) на произвольную функцию $F(x) = f(\cos x) \in L^2_{\alpha,\beta}$ при $\alpha > \beta > -1/2$ выражается в следующей интегральной форме

$$T_tF(x) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1\int_0^\pi f(\cos\Psi)(1-\rho^2)^{\alpha-\beta-1}\rho^{2\beta+1}(\sin\xi)^{2\beta}d\xi d\rho, \tag{6.6}$$

где $t, x \in \mathbf{R}$ и $\cos\Psi$ вычисляется по формуле (6.5). Другое эквивалентное истокообразное представление этого сдвига получается с помощью ядра (6.3) в формуле умножения (6.2) [38, пункт 5], [39, пункт 4].

Необходимо сказать, что указанным выше результатам Дж.Гаспера и Т.Курнвиндера, как отмечается в работе [37], предшествовал результат Р.Л.Шапиро [40] (1968 г.) о формуле сложения для полиномов Якоби, из которого следует (6.6) при $\alpha > \beta = 0$.

Приведем несколько свойств сдвига, вытекающих из его интегрального представления. Эти свойства нам потребуются в следующем пункте.

Лемма 6.1 *Пусть $\alpha > \beta > -1/2$, $0 \le \tau \le \pi/2$, функция $F(x) = f(\cos x)$ непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}$ и*

$$F(x) = 0, \quad x \in [\tau, \pi].$$

Тогда функция $G(x) = T_\tau F(x)$ является непрерывной при всех $x \in \mathbf{R}$ и

$$G(x) = 0, \quad x \in [2\tau, \pi].$$

Доказательство. Непрерывность функции G легко следует из интегрального представления (6.6), (6.5) оператора сдвига. По условию леммы имеем

$$f(u) = 0, \quad u \in [-1, \cos\tau].$$

В силу интегрального представления (6.6), (6.5) сдвига для доказательства леммы достаточно показать, что функция

$$A(x, \tau, \rho, \xi) = \cos\Psi = \cos\tau\cos x + \rho\sin\tau\sin x\cos\xi + \frac{1}{2}(\rho^2 - 1)(1 - \cos\tau)(1 - \cos x)$$

удовлетворяет неравенствам

$$-1 \le A(x, \tau, \rho, \xi) \le \cos\tau, \tag{6.7}$$

если выполнены условия

$$0 < \tau \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \xi \le \pi, \quad 2\tau \le x \le \pi, \quad 0 \le \rho \le 1. \tag{6.8}$$

Вначале докажем первое неравенство в (6.7). Ясно, что из (6.8) следует, что $\sin\tau\sin x \ge 0$. Поэтому имеем

$$A(x, \tau, \rho, \xi) \ge A(x, \tau, \rho, \pi) = A_1(x, \tau, \rho) = \cos\tau\cos x - \rho\sin\tau\sin x + \frac{1}{2}(\rho^2 - 1)(1 - \cos\tau)(1 - \cos x).$$

Заметим, что функция $A_1(x,\tau,\rho)$ по третьей переменной ρ является параболой, причем ее глобальный минимум по этому аргументу достигается в точке
$$\rho^* = \frac{\sin\tau\sin x}{(1-\cos\tau)(1-\cos x)}.$$
То есть
$$A_1(x,\tau,\rho) \geq A_1(x,\tau,\rho^*) = -1,$$
и, значит, первое неравенство в (6.7) доказано.

Перейдем к доказательству второго неравенства в (6.7). Условия (6.8) влекут неравенство

$$A(x,\tau,\rho,\xi) \leq A(x,\tau,\rho,0) = A_2(x,\tau,\rho) = \cos\tau\cos x+\rho\sin\tau\sin x+\frac{1}{2}(\rho^2-1)(1-\cos\tau)(1-\cos x),$$

а также
$$A_2(x,\tau,\rho) \leq \max\{A_2(x,\tau,0), A_2(x,\tau,1)\}.$$
Имеем

$$A_2(x,\tau,0) = \cos\tau\cos x-\frac{1}{2}(1-\cos\tau)(1-\cos x) = \frac{1}{2}\{(1+\cos\tau)\cos x-1+\cos\tau\} \leq \cos\tau;$$

$$A_2(x,\tau,1) = \cos\tau\cos x+\sin\tau\sin x = \cos(x-\tau) \leq \cos\tau.$$

Лемма доказана.

В работе Дж.Гаспера [35] содержится следующее определение свертки двух функций F, G из $L^2_{\alpha,\beta}$ (а на самом деле – и для функций из $L^1_{\alpha,\beta}$), которое можно записать в виде

$$(F*G)(t) = \int_0^\pi \{T_x F(t)\}G(x)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx. \tag{6.9}$$

Кроме того, в указанной работе приведено свойство коммутативности этой операции
$$(F*G)(t) = (G*F)(t), \quad t\in\mathbf{R}. \tag{6.10}$$
Поскольку $T_xF(t) = T_tF(x)$ для любых $x, t \in \mathbf{R}$, то равенство (6.10) означает самосопряженность оператора сдвига. То есть справедлива лемма.

Лемма 6.2 *Пусть $\alpha > \beta > -1/2$, $t\in\mathbf{R}$. Тогда для любых двух функций $F, G \in L^2_{\alpha,\beta}$ выполняется равенство*

$$(T_tF, G) = (F, T_tG). \tag{6.11}$$

7 Оценка сверху.

В данном пункте будет построен вес $\mu \in V_0^+[0,\tau]$, на котором, при выполнении условий (5.5), достигается минимум в двойственной задаче (5.2).

Рассмотрим следующее множество функций

$$\mathcal{C}_n^{\alpha,\beta} = \left\{ F(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \phi_k^{\alpha,\beta}(x) : F(0) = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k = 1,\ \rho_k \geq 0,\ k \geq n \right\}, \quad (7.1)$$

где $\alpha \geq \beta > -1,\ \alpha \geq -1/2,\ n \in \mathbf{N}, \phi_k^{\alpha,\beta}$ – косинус-полином Якоби (1.1). Это множество является выпуклым подмножеством пространства $C[0,\pi]$ непрерывных на $[0,\pi]$ функций. Так же, как и в ультрасферическом случае [1, пункт\nobreakspace {}4], введем следующее

Определение 7.1 *Положительное число $\sigma = \sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha,\beta})$ назовем точкой Черныха для множества $\mathcal{C}_n^{\alpha,\beta}$, если одновременно выполняются следующие два условия*

(a) *для любой функции $F \in \mathcal{C}_n^{\alpha,\beta}$ найдется точка $x^* \in (0,\sigma)$, в которой $F(x^*) < 0$;*

(b) *для любого $\delta \in (0,\sigma)$ найдутся функция $F_\delta \in \mathcal{C}_n^{\alpha,\beta}$ и число $\varepsilon > 0$, такие, что $F_\delta(x) \geq \varepsilon$ при всех $x \in [0,\delta]$.*

Результаты Н.И.Черных [14], [15] (см. (1.15), (1.16)) эквивалентны равенству

$$\sigma(\mathcal{C}_n^{-1/2,-1/2}) = \frac{\pi}{n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

В.Ю.Попов [17, теорема\nobreakspace {}3] получил результат, из которого вытекает неравенство

$$\sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha,\alpha}) \leq \frac{2\pi}{n+1}, \quad \alpha = 0, \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

В работе автора [1, лемма\nobreakspace {}4.1] получены оценки

$$\tau_n^{\alpha,\alpha} \leq \sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha,\alpha}) \leq 2\tau_n^{\alpha,\alpha}, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

С помощью функции $\phi_n^{\alpha,\beta}$ легко доказать следующее утверждение.

Предложение 7.1 *При $\alpha \geq \beta > -1,\ \alpha \geq -1/2,\ n \in \mathbf{N}$ имеет место оценка снизу*

$$x_n^{\alpha,\beta} \leq \sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha,\beta}), \quad (7.2)$$

где $x_n^{\alpha,\beta}$ есть первый положительный нуль косинус-полинома Якоби $\phi_n^{\alpha,\beta}$ (см. (1.20)).

В дальнейшем нам потребуются известные оценки для $x_n^{\alpha,\beta}$ (см. [3, §\nobreakspace {}6.2]).

Предложение 7.2 *При* $\alpha > -1,\ \beta > -1, n \geq \max\left\{2, 1 + \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right\}$ *выполняются неравенства*

$$0 < x_n^{\alpha,\beta} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Основным результатом данного пункта является

Лемма 7.1 *Пусть* $\alpha > \beta > -1/2,\ n \geq \max\left\{2, 1 + \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right\}$. *Тогда справедлива оценка сверху*

$$\sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha,\beta}) \leq 2x_n^{\alpha,\beta}. \tag{7.3}$$

Доказательство. Доказательство будем проводить так же, как это сделано в ультрасферическом случае [1, лемма\nobreakspace {}4.1], внеся естественные изменения. Для краткости положим $x_n = x_n^{\alpha,\beta},\ \phi_k = \phi_k^{\alpha,\beta},\ k \in \mathbf{Z}^+$. Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{V}_n^{\alpha,\beta}$ есть четная 2π-периодическая функция, непрерывная на всей действительной оси $\mathbf{R}$, которую достаточно задать на отрезке $[0,\pi]$:

$$\mathcal{V}(x) = \begin{cases} \phi_n(x), & 0 \leq x \leq x_n, \\ 0, & x_n < x \leq \pi. \end{cases} \tag{7.4}$$

Определим четную 2π-периодическую функцию v, задав ее на отрезке $[0,\pi]$ формулой

$$v(x) = \left(\sin\frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} T_{x_n}\mathcal{V}(x), \quad x \in [0,\pi], \tag{7.5}$$

где T_t есть оператор (обобщенного) сдвига с шагом t (см. (1.5), (6.6)). Из определения (7.4), предложения 7.2, леммы 6.1 и формулы (6.6) следует, что

$$v(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}; \quad v(x) \not\equiv 0; \quad v(x) = 0, \quad x \in [2x_n^{\alpha,\beta}, \pi]. \tag{7.6}$$

Используя самосопряженность оператора сдвига (см. лемму 6.2) найдем следующие коэффициенты

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^{2x_n} v(x)\phi_k(x)dx = \int_0^{\pi} v(x)\phi_k(x)dx = (T_{x_n}\mathcal{V}, \phi_k) = (\mathcal{V}, T_{x_n}\phi_k) = \\ &= \phi_k(x_n)(\mathcal{V},\phi_k) = \phi_k(x_n)\int_0^{x_n}\phi_n(x)\phi_k(x)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2\beta+1}dx = \\ &= \phi_k(x_n)\int_0^{x_n}\varphi_n(x)\varphi_k(x)dx, \end{aligned} \tag{7.7}$$

где
$$\varphi_k(x) = \phi_k(x)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}, \quad k \in \mathbf{Z}^+. \tag{7.8}$$
Функции φ_k удовлетворяют дифференциальному уравнению (см. [3, с.79,§\nobreakspace {}4.24])
$$\varphi_k''(x) - q(x)\varphi_k(x) = -\left(k + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 \varphi_k(x), \quad k \in \mathbf{Z}^+, \tag{7.9}$$
где
$$q(x) = \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{\beta^2 - \frac{1}{4}}{4\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2}.$$
Рассмотрим выражение
$$c_k = \left\{\left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 - \left(k + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2\right\}\int_0^{x_n} \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx. \tag{7.10}$$
С помощью уравнения (7.9) получаем
$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^{x_n}\{\varphi_k''(x)\varphi_n(x) - \varphi_k(x)\varphi_n''(x)\}dx = \\ &= \{\varphi_k'(x)\varphi_n(x) - \varphi_k(x)\varphi_n'(x)\}\Big|_0^{x_n} = -\varphi_k(x_n)\varphi_n'(x_n) = \\ &= -\phi_k(x_n)\phi_n'(x_n)\left(\sin\frac{x_n}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{x_n}{2}\right)^{2\beta+1}. \end{aligned} \tag{7.11}$$
Из (7.7) – (7.11) видно, что
$$a_n = 0, \quad a_k \le 0 \quad \text{п} \quad k > n, \quad a_k \ge 0 \quad \text{п} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \tag{7.12}$$
так как $\phi_n'(x_n) < 0$, и при $k \ne n$ имеем
$$a_k = \frac{c_k}{\left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 - \left(k + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2} = \frac{\phi_k^2(x_n)\phi_n'(x_n)\left(\sin\frac{x_n}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{x_n}{2}\right)^{2\beta+1}}{\left(k + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 - \left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2},$$

Учитывая свойства (7.6) и (7.12), получаем, что для каждой функции $F(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \rho_k\phi_k(x)$ из множества $\mathcal{C}_n^{\alpha,\beta}$ (см. (7.1)) выполняется соотношение
$$\int_0^{2x_n} F(x)v(x)dx = \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k\int_0^{2x_n}\phi_k(x)v(x)dx = \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k a_k \le 0,$$
и, значит, найдется точка $x^* \in (0, 2x_n)$, в которой $F(x^*) < 0$. Отсюда следует (7.3). Лемма доказана.

8 Доказательство теоремы 2.1.

Следствие 4.1 влечет утверждения теоремы 2.1 при $\alpha > \beta = -1/2$. Пусть теперь $\alpha > \beta > -1/2$. В этом случае пункт (B) теоремы 2.1 содержится в следствии 3.1. В силу неравенства $1 - ru \le (1-u)^r$ при $|u| \le 1,\ r \ge 1$, и соотношений (3.3) – (3.5) для доказательства неравенства (2.1) достаточно доказать неравенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k < \max_{0\le t\le 2x_n^{\alpha,\beta}} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k\{1 - r\phi_k(t)\}, \quad \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k = 1, \quad \rho_k \ge 0, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{8.1}$$

Ряд в правой части (8.1) можно представить в виде

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k\{1 - r\phi_k(t)\} = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k - rF(t),$$

где $F \in \mathcal{C}_n^{\alpha,\beta}$ (см. (7.1)). В силу (7.3) и определения 7.1 найдется точка $x^* \in (0, 2x_n^{\alpha,\beta})$, в которой $F(x^*) < 0$, что эквивалентно (8.1).

Утверждение (2.2) доказывается аналогично с помощью неравенства $2^{r-1}(1-u) \le (1-u)^r$ при $0 < r < 1,\ |u| \le 1$. Теорема 2.1 доказана.

Как уже отмечалось выше, неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}$ при $\alpha = \beta = (m-3)/2, m = 2, 3, \ldots$, тесно связано с аналогичным неравенством в пространстве $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ комплексных функций, заданных на единичной сфере $\mathbf{S}^{m-1}$ вещественного евклидова пространства $\mathbf{R}^m$. В случае, когда α, β различные, указанное неравенство связано с аналогичным неравенством в пространстве L^2 комплексных функций, заданных на проективных пространствах $\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{R})$ (при $\alpha = (m-3)/2, \beta = -1/2,\ m \ge 3$) и $\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})$ (при $\alpha = m-2, \beta = 0,\ m \ge 3$) над полями $\mathbf{R}$ и вещественных и комплексных чисел, соответственно.

9 Неравенство Джексона–Стечкина в L^2 на сфере и проективных пространствах.

Прямые теоремы теории приближения функций многих переменных, в том числе – заданных на таких классических многообразиях как сфера, тор, евклидово и проективное пространство, изучались с начала этого века и до сих пор являются объектом интенсивных исследований. Некоторые исторические сведения по неравенствам Джексона–Стечкина на сфере и проективных пространствах содержатся в работах [43], [44], [45], [9], [1], [46].

Начнем со сферы. Здесь будет дополнен результат В.В.Арестова [1, утверждение (B) теоремы\nobreakspace {}2.2] об оценке снизу константы Джексона—Стечкина на сфере $\mathbf{S}^{m-1}, m \geq 3$. При этом мы будем использовать, в основном, обозначения и известные факты из гармонического анализа, применявшиеся в [1].

Итак, пусть $L^2(\mathbf{S}^{m-1}),\ m \geq 2$, есть пространство комплексных функций, заданных на единичной сфере $\mathbf{S}^{m-1}$ пространства $\mathbf{R}^m$, со скалярным произведением

$$(f,g) = \frac{1}{\mid \mathbf{S}^{m-1} \mid} \int_{\mathbf{S}^{m-1}} f(\xi)\overline{g}(\xi)\,d\xi \qquad (9.1)$$

и нормой $\|f\| = (f,f)^{1/2}$. Здесь $|\mathbf{S}^{m-1}| = \dfrac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$ — площадь сферы $\mathbf{S}^{m-1}$. Многочленом степени не выше n называется функция

$$p(x) = \sum c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}\, x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \leq n, \quad \alpha_k \in \mathbf{Z}^+,$$

с комплексными коэффициентами $c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$. Множество сужений таких многочленов на $\mathbf{S}^{m-1}$ обозначим через $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_{n,m}$. Наилучшим приближением функции $f \in L^2$ пространством P_n называется величина

$$E_n(f) = \min\{\|f-p\| :\ p \in \mathrm{P}_n\}.$$

Сдвигом с шагом $t \in \mathbf{R}$ называется (см., например, [44, формулы (1.1), (1.19)]) оператор M_t, действующий из $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ в $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ по правилу

$$M_t f(x) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{m-2}|} \int_{\mathbf{S}^{m-2}_{\pi/2}(x)} f(x\cos t + \xi \sin t) d\xi, \qquad (9.2)$$

здесь $x \in \mathbf{S}^{m-1}$, и интеграл берется по сфере $\mathbf{S}^{m-2}_{\pi/2}(x) = \{\xi \in \mathbf{S}^{m-1} :\ x\cdot\xi = \cos\frac{\pi}{2} = 0\}$, где $x\cdot\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_m\xi_m$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1,\ldots,x_m),\ \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_m)$ из $\mathbf{R}^m$. При $t \in (0,\pi)$ этот оператор можно представить в виде

$$M_t f(x) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{m-2}|(\sin t)^{m-2}} \int_{\mathbf{S}^{m-2}_t(x)} f(\xi) d\xi, \qquad (9.3)$$

где $\mathbf{S}^{m-2}_t(x) = \{\xi \in \mathbf{S}^{m-1} :\ x\cdot\xi = \cos t\}$. Разностным оператором порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbf{R}$ называется оператор [9]

$$\Delta^r_t = (I - M_t)^{r/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{r/2}{k} M_t^k,$$

где I — тождественный оператор. Соответствующим модулем непрерывности порядка $r > 0$ функции $f \in L_2(\mathbf{S}^{m-1})$ является следующая функция переменного $\tau > 0$

$$\omega_r(f,\tau) = \sup\{\|\Delta_t^r f\| : \ 0 \le t \le \tau\}.$$

Обозначим через $\mathcal{K}_n(\tau,r)_{L^2(\mathbf{S}^{m-1})}$, $\tau > 0, r > 0$, $m = 2,3,\ldots$, точную константу $\mathcal{K}$ в неравенстве Джексона—Стечкина в пространстве $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$

$$E_{n-1}(f) \le \mathcal{K}\omega_r(f,\tau), \quad f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1}).$$

То есть положим

$$\mathcal{K}_n(\tau,r)_{L^2(\mathbf{S}^{m-1})} = \sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\omega_r(f,\tau)} : \ f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1}), f \not\equiv \mathrm{const}\right\}, \qquad (9.4)$$

$n, m \in \mathbf{N}$, $m \ge 2, \tau > 0$, $r > 0$. Хорошо известно, что пространство $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ разлагается в ортогональную прямую сумму

$$L^2(\mathbf{S}^{m-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus H_k$$

конечномерных подпространств $H_k = H_{k,m}$, $\dim H_k = \dfrac{2k+m-2}{m-2}\dbinom{k+m-3}{k}$ сферических гармоник степени k (см., например, [4]). Напомним, что сферической гармоникой степени k называют сужение на сферу $\mathbf{S}^{m-1}$ однородного гармонического многочлена степени k

$$q(x) = \sum c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_m^{\alpha_m}, \quad \sum_{l=1}^{m}\alpha_l = k, \quad \alpha_l \in \mathbf{Z}^+, \quad \Delta q = 0,$$

где $\Delta = \sum\limits_{l=1}^{m}\dfrac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ есть оператор Лапласа. Оператор ортогонального проектирования $Y_k : \ L^2(\mathbf{S}^{m-1}) \to H_k$ имеет вид

$$Y_k f(x) = \frac{\dim H_k}{|\mathbf{S}^{m-1}|}\int_{\mathbf{S}^{m-1}} R_k^{\alpha,\alpha}(x\cdot\xi)f(\xi)d\xi, \quad \alpha = \frac{m-3}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}^+.$$

Иными словами, каждая функция $f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ единственным образом разлагается в ряд Фурье по сферическим гармоникам, сходящийся к ней в $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k f(x). \qquad (9.5)$$

Действие оператора сдвига M_t с шагом $t \in \mathbf{R}$ на функцию $f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ выражается формулой

$$M_t f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{\alpha,\alpha}(\cos t) Y_k f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^{\alpha,\alpha}(t) Y_k f(x), \quad \alpha = \frac{m-3}{2}.$$

Отсюда с помощью равенства Парсеваля получаются следующие известные соотношения

$$E_{n-1}^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \|Y_k f\|^2,$$

$$\|\Delta_t^r f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \{1 - \phi_k^{\alpha,\alpha}(t)\}^r \|Y_k f\|^2, \quad \alpha = \frac{m-3}{2}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Поэтому задача (9.4) сводится к задаче (3.3) при $\alpha = \beta = \dfrac{m-3}{2}$, то есть, с учетом равенства (3.4), имеем

$$\mathcal{K}_n^2(\tau, r)_{L^2(\mathbf{S}^{m-1})} = K_n^{\alpha,\alpha}(\tau, r) = \{\mathcal{K}_n^{\alpha,\alpha}(\tau, r)\}^2, \quad \alpha = \frac{m-3}{2}, \tag{9.6}$$

для $n, m \in \mathbf{N},\ m \geq 2,\ \tau > 0,\ r > 0$.

Теперь с помощью первого утверждения следствия 4.1 мы можем сформулировать отмеченное выше дополнение к результату В.В.Арестова об оценке снизу константы Джексона–Стечкина на сфере. А именно, в пункте (B) теоремы 2.2 из работы [1] условие $\tau \in (0, \pi)$ можно ослабить, заменив его на условие $\tau > 0$. Тем самым упрощается формулировка упомянутой теоремы.

Теорема 9.1 *Для каждого $n \in \mathbf{N}$ выполняются утверждения*

(A) *при $m = 2, 3, \ldots,\ \alpha = \dfrac{m-3}{2}$ для каждой функции $f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1}),\ f \not\equiv const$, выполняется неравенство*

$$E_{n-1}(f) < \max\{1, 2^{(1-r)/2}\}\omega_r(f, 2x_n^{\alpha,\alpha}), \quad r > 0;$$

(B) *при $m = 3, 4, \ldots,\ \tau > 0$ существует последовательность функций $g_k,\ k \in \mathbf{N}$, из $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$, такая, что*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{E_{n-1}(g_k)}{\omega_r(g_k, \tau)} \geq 1, \quad r > 0.$$

Замечание 9.1. В силу равенств (9.6) и определения (1.13) все пункты замечания 1.1 естественным образом переносятся и на теорему 9.1.

Перейдем к задаче о точном неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbf{P}^{m-1})$ комплексных функций, заданных на вещественном проективном пространстве $\mathbf{P}^{m-1} = \mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{R})$, $m = 3, 4, \ldots$. Как хорошо известно (см. [29], [4]), пространство $L^2(\mathbf{P}^{m-1})$ можно отождествить с подпространством всех четных функций f из пространства $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$. То есть можно считать, что

$$L^2(\mathbf{P}^{m-1}) = \{f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1}) : \ f(x) = f(-x), x \in \mathbf{S}^{m-1}\}.$$

Поскольку для четной функции $f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ разложение (9.4) в ряд Фурье содержит сферические гармоники лишь четной степени

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_{2k} f(x),$$

то для функции $f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1})$ величиной ее наилучшего приближения порядка $n-1$ естественно назвать следующее число

$$E_{n-1}(f) = \min\left\{\|f - g\| : \ g \in \sum_{k=0}^{n-1} H_{2k}\right\}.$$

В качестве оператора сдвига с шагом $t \in \mathbf{R}$ возьмем сужение оператора M_t, определенного формулой (9.2), на $L^2(\mathbf{P}^{m-1})$. Поэтому понятие модуля непрерывности порядка $r > 0$ функции f из $L^2(\mathbf{P}^{m-1})$ остается прежним. Задача о точной константе $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^2(\mathbf{P}^{m-1})}$ в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbf{P}^{m-1})$

$$E_{n-1}(f) \le \mathcal{K}\omega_r(f, \tau), \quad f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1}), \tag{9.7}$$

совпадает с задачей

$$\mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^2(\mathbf{P}^{m-1})} = \sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\omega_r(f, \tau)} : \ f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1}), \ f \not\equiv \mathrm{const}\right\}. \tag{9.8}$$

Эта задача по указанной выше схеме сводится к задаче о точной константе $K = \widetilde{K}_n^{\alpha,\alpha}(\tau, r), \alpha = \dfrac{m-3}{2}$ в неравенстве

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \le K \max_{0 \le t \le \tau} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_{2k}^{\alpha,\alpha}(t)\}^r, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \ge 0, \quad k \ge 1,$$

или, то же самое, (см. первое равенство в (1.2)) в неравенстве

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \le K \max_{0 \le t \le 2\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k^{\alpha,-1/2}(t)\}^r, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \ge 0, \quad k \ge 1.$$

Отсюда и (3.2) следует соотношение

$$\mathcal{K}_n^2(\tau, r)_{L^2(\mathbf{P}^{m-1})} = K_n^{\alpha,-1/2}(2\tau), \quad \alpha = \frac{m-3}{2},$$

при $n, m \in \mathbf{N},\ m \geq 3,\ \tau > 0,\ r > 0$, которое в силу (3.4), (1.13) и следствия 2.2 влечет утверждение

Следствие 9.1 *Пусть $n, m \in \mathbf{N},\ m \geq 3,\ r > 0,\ \tau \geq \min\{\pi/2, x_n^{(m-3)/2,-1/2}\}$. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1})$ справедливо неравенство Джексона–Стечкина*

$$E_{n-1}(f) \leq \max\{1, 2^{(1-r)/2}\}\omega_r(f, \tau),$$

причем оно является точным для произвольных фиксированных $n \in \mathbf{N}$ и $r \geq 1$.

Рассмотрим случай проективного пространства $\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}),\ m \geq 3$ над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Пусть $\mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{C}) = \{x \in \mathbf{C}^m : \ |x| = 1\}$ есть единичная сфера пространства $\mathbf{C}^m$, здесь $|x| = \sqrt{x \cdot x},\ x \cdot y = x_1\overline{y}_1 + \ldots x_m\overline{y}_m$ – скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_m),\ y = (y_1, \ldots, y_m)$ из $\mathbf{C}^m$. Так же, как и выше, используя известную (см. [43], [29], [4]) интерпретацию $\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})$, в терминах классов эквивалентностей на единичной сфере $\mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{C})$, пространство $L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$ можно отождествить с подпространством функций $f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{C}))$, которые являются "четными"в следующем смысле $f(x) = f(cx)$ при $x \in \mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{C})$ и $c \in \mathbf{S}^0(\mathbf{C})$. То есть можно считать, что

$$L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})) = \{f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{C})) : f(x) = f(cx),\ c \in \mathbf{C},\ |c| = 1\}.$$

Пространство $L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$ разлагается в ортоганальную прямую сумму (см. [4])

$$L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus V_k$$

конечномерных подпространств $V_k = V_{k,m},\ \dim V_k = \binom{m+k-1}{k}^2 - \binom{m+k-2}{k-1}^2$ многочленов $q(x) = q(x_1, x_2, \ldots, x_m, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m)$ однородных степени k как относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, так и относительно сопряженных переменных $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m$, и гармонических в том смысле, что

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 q}{\partial x_l \partial \overline{x}_l} = 0.$$

Таким образом, каждая функция $f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$ единственным образом разлагается в следующий ряд Фурье, сходящийся к ней в $L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k f(x), \quad P_k f \in V_k.$$

Поэтому величина ее наилучшего приближения

$$E_{n-1}(f) = \inf \left\{ \|f - g\| : \ g \in \sum_{k=0}^{n-1} V_k \right\}$$

порядка $n-1, \ n \in \mathbf{N}$, удовлетворяет равенству

$$E_{n-1}^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \|P_k f\|^2.$$

В работе В.И.Иванова и О.И.Смирнова [47, с.101] (см. также [48, с.100]) доказано, что оператор среднего значения (см. [49, гл.1, §\nobreakspace {}4]) (аналог оператора M_t, см. (9.3)) для функций, заданных на компактных сильно однородных (или, что тоже самое, духточечно-однородных или дважды однородных) метрических пространствах, выражается через зональные сферические функции. В частности, учитывая явное выражение зональных сферических функций на $\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})$ (см. [37], [29], [4]) через многочлены Якоби $R_k^{m-2,0}$, получаем, что указанный оператор среднего значения в пространстве $L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$ эквивалентен следующему оператору обобщенного сдвига

$$\mathcal{U}_t f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{m-2,0}(\cos 2t) P_k f(x)\,, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Далее, по аналогии с тем, как это уже делалось раньше, на основе обобщенного сдвига определяются разностный оператор порядка $r > 0$ с шагом $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и соответствующий модуль непрерывности функции $f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$, который мы будем обозначать также через $\omega_r(f, t)$. Затем, с помощью теоремы 2.1, получаем

Следствие 9.2 *Пусть* $m = 3, 4, \ldots, \ n \geq \max\left\{2, \dfrac{m-2}{2}\right\}, \ r \geq 0$. *Тогда для любой функции* $f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$ *справедливо неравенство Джексона–Стечкина*

$$E_{n-1}(f) \leq \max\{1, 2^{(1-r)/2}\} \omega_r(f, x_n^{m-2,0}),$$

причем оно является точным для любых фиксированных $n \geq \max\left\{2, \dfrac{m-2}{2}\right\}$ *и* $r \geq 1$.

Из утверждений, содержащихся в работах [47], [48], [37] следует, что наряду с указанными выше тремя важными приложениями частных случаев теоремы 2.1, относящихся к неравенствам Джексона—Стечкина в пространствах $L^2_{(m-3)/2,(m-3)/2}$, $L^2_{(m-3)/2,-1/2}$, $L^2_{m-2,0}$, $m = 2,3,\ldots$ имеются, по крайней мере, еще два. А именно, к задачам о константах Джексона—Стечкина в пространствах $L^2_{2m-1,1}$, $m = 2,3,\ldots$ и $L^2_{7,3}$ сводятся соответственно аналогичные задачи в пространствах $L^2(\mathbf{P}^{4m}(\mathbf{H})), m = 2,3,\ldots$ и $L^2(\mathbf{P}^{16}(\mathbf{Cay}))$. Здесь $\mathbf{P}^{4m}(\mathbf{H})$ есть проективное пространство над телом кватернионов $\mathbf{H} = \{x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k : \ x_\nu \in \mathbf{R}\}$, $\mathbf{P}^{16}(\mathbf{Cay})$ — проективная плоскость Кэли. Верхние индексы $4m$ и 16 обозначают вещественную размерность соответствующих многообразий.

Список литературы

[1] **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона—Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Матем. заметки, 1996. Т.60, в.3. С.333—355.

[2] **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 с весом Якоби // Материалы международной конференции и Чебышевских чтений, посвященных 175-летию со дня рождения П.Л.Чебышева. Т.1. М.: изд-во МГУ, 1996. С.40—43.

[3] **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз. 1962, 500 с.

[4] **Левенштейн В.И.** Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 1983. Т.40. С.44—110.

[5] **Lofstrem J., Peetre J.** Approximation Theorems Connected with Generalized Translations // Math. Ann. 1969. V.181. PP. 255—268.

[6] **Grunwald A.K.** Uber «begrenzte» Derivationen und deren Anwendung // Z. angew. Math. und Phys. 1867, bd.12. S. 441-480.

[7] **Летников А.В.** Теория дифференцирования с произвольным указателем // Матем. сб. 1868. Т.3. С.1-68.

[8] **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[9] **Рустамов Х.П.** О приближении функций на сфере // Известия Академии наук, серия матем. 1993. Т.57, N 5. С.127—148.

[10] **Рустамов Х.П.** Модули гладкости высших порядков, связанные с разложением Фурье — Якоби, и приближение функций алгебраическими многочленами // ДАН. 1995. Т.344, N 5. С.593—596.

[11] **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР, серия матем. 1951. Т.15. С.219—242.

[12] **Потапов М.К.** О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1. Матем., механ., 1983, N 4. С.43-52.

[13] **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т.2, в.5. С.513—522.

[14] **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИ АН СССР. 1967. Т.88. С.71—74.

[15] **Arestov V.V., Chernykh N.I.** On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // In: Approximation and functions spaces.— Proc. Conf. Gdan′sk, 1979.— Amsterdam: North-Holland, 1981. PP.25—43.

[16] **Юдин В.А.** Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т.29, в.2. С.309—315.

[17] **Попов В.Ю.** О точных константах в неравенствах Джексона для наилучших сферических среднеквадратичных приближений // Изв. вузов. Математика. 1981. N 12. С.67—78.

[18] **Попов В.Ю.** Многомерные приближения в $L_2(T_m)$ // Теория функций и приближений. — Труды 3-й Саратовской зимней Школы (27 января — 7 февраля 1986 г.) Межвузовский научный сборник. Ч.3.— Саратов: Саратовский университет, 1988. С.22—25.

[19] **Попов В.Ю.** Приближение на сфере в L_2 // ДАН СССР. 1988. Т.301, N 4. С.793—797.

[20] **Бабенко А.Г.** О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т.39, в.5. С.651—664.

[21] **Бабенко А.Г.** О неравенстве Джексона в пространстве L^2 // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С.4–14.

[22] **Шалаев В.В.** О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Украинский матем. журн. 1991. Т.43, N 1. С.125–129.

[23] **Шакенова М.Ж.** О точном неравенстве между наилучшими приближениями и модулем гладкости положительного порядка в $L_p[0, 2\pi]^2$ // Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. Тез. докл.– Алматы, 1993. С.178–179.

[24] **Арестов В.В., Попов В.Ю.** Неравенство Джексона на сфере L_2 // Известия вузов. Математика. 1995. N 8 (399). С.13–20.

[25] **Иванов В.И., Смирнов О.И.** О теореме Джексона в пространстве $l_2(\mathbf{Z}_2^n)$ // Матем. заметки. 1996. Т.60, N 3. С.390–405.

[26] **Горбачев Д.В.** Точные константы Джексона на группе $SU(2)$ // Алгебра и анализ. Тезисы докладов школы-конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М.Гагаева (16–22 июня 1997 г., г.Казнь). Казань: изд-во Казанского матем. об-ва, 1997. С.61–63.

[27] **Смирнов О.И.** О константах Джексона в пространстве $l_2(\mathbf{Z}_2^n)$ // Алгебра и анализ. Тезисы докладов школы-конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М.Гагаева (16–22 июня 1997 г., г.Казнь). Казань: изд-во Казанского матем. об-ва, 1997. С.199–200.

[28] **Дельсарт Ф.** Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976.

[29] **Кабатянский Г.А., Левенштейн В.И.** О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Проблемы передачи информации. 1978. Т.14, вып.1. С.3–25.

[30] **Odlyzko A.M., Sloane N.J.A.** New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions // J. of Combinatorial Theory, Series A 26. 1979. P.210–214.

[31] **Конвей Дж., Слоэн Н.** Упаковки шаров, решетки и группы. Т.1,2. М.: Мир, 1990. 791 с.

[32] **Юдин В.А.** Нижние оценки для сферических дизайнов // Известия АН СССР. Серия матем. 1987. Т.61, N 3. С.213–223.

[33] **Стечкин С.Б.** О нулях дзета-функции Римана // Матем. заметки. 1970. Т.8, вып.4. С.419–429.

[34] **Арестов В.В.** Об экстремальных свойствах неотрицательных тригонометрических полиномов // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН, 1992. Т.1. С.50–70.

[35] **Gasper G.** Positivity and the convolution structure for Jacobi series // Ann. of Math. 1971. V.93. PP.112-118.

[36] **Gasper G.** Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel // Ann. of Math. 1972. V.95. PP.261-280.

[37] **Koornwinder T.** The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics // SIAM J. Appl. Math. 1973. V.25, N 2. PP.236-246.

[38] **Koornwinder T.** Jacobi polynomials, II. An analytic proof of the product formula // SIAM J. Math. Anal. 1974. V.5, N 1. PP.125-137.

[39] **Gasper G., and Trebels W.** Multiplier criteria of Marcinkiewicz type for Jacobi expansions // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V.231, N 1. PP.117-132.

[40] **Шапиро Р.Л.** Специальные функции, связанные с представлением группы $SU(n)$ класса I относительно $SU(n-1)$ $((n-1) \geq 3)$ // Известия вузов. Математика. 1968. N 4 (71). С.97–107.

[41] **Le Gendre A.M.** Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures. T.2. Paris, 1817.

[42] **Ватсон Г.Н.** Теория бесселевых функций. Ч.1 – М.: ИЛ, 1949. 798 с.

[43] **Ragozin D.L.** Constructive polynomial approximation on spheres and pojective spaces// Transactions of the Amer. Math. Soc. 1971. V.162. PP. 157-170.

[44] **Никольский С.М., Лизоркин П.И.** Аппроксимация функций на сфере // Известия АН СССР. Серия матем. 1987. Т.51, N 3. С.635–651.

[45] **Федоров В.М.** Приближение функций на сфере // Вестн. Моск. Ун–та. Сер. 1, Математика. Механика. 1990. N 1. С.15–23.

[46] **Платонов С.С.** О теоремах джексоновского типа на компактном симметрическом пространстве ранга 1 // ДАН. 1997. Т.353, N 4. С.445–448.

[47] **Иванов В.И., Смирнов О.И.** Константы Джексона в пространствах L_2 на метрических компактах// Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 1996. Т.2. Выпуск 1. С.93–118.

[48] **Иванов В.И.** Константы Джексона в пространствах L_p на метрических компактах// Алгебра и анализ. Тезисы докладов школы-конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М.Гагаева (16–22 июня 1997 г., г.Казнь). Казань: изд-во Казанского матем. об-ва, 1997. С.98–101.

[49] **Хелгасон С.** Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. 735 с.

Институт математики и механики
Уральского отделения РАН
620219, Екатеринбург, ГСП–384, ул. С. Ковалевской, 16.
Телефон: (34–32) 49–32–35 (служебный).
Факс: (34–32) 74–25–81.
E-mail: Alexander.Babenko@imm.uran.ru
Бабенко Александр Григорьевич