Статья опубликована в сборнике:
Труды международной школы С.Б.Стечкина по теории функций (Россия, г. Миасс Челябинской обл., 24 июля – 3 авг. 1998 г.). Екатеринбург: УрО РАН, 1999. С. 38–63. Библиогр.: 33 назв.

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА – СТЕЧКИНА ДЛЯ L^2-ПРИБЛИЖЕНИЙ НА ПОЛУПРЯМОЙ С ВЕСОМ ЛАГЕРРА *

А.Г. Бабенко
(Екатеринбург, Институт математики и механики УрО РАН)

Данная работа посвящена изучению точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина между наилучшим среднеквадратичным приближением произвольной комплексной функции на полупрямой с весом Лагерра $t^a e^{-t}$, $a > -1/2$, алгебраическими многочленами заданной степени с одной стороны и ее модулем непрерывности вещественного порядка $r > 0$, порожденного обобщенным сдвигом (см. [1]), построенном на основе ряда Фурье – Лагерра функции с другой стороны. Интегральное представление указанного сдвига может быть получено с помощью формулы умножения для многочленов Лагерра, которую установили Харди (при $a = 0$) и Ватсон (при $a > -1/2$) [2]. Соответствующие прямые и обратные теоремы теории приближения исследовались в работах [3]–[7], а в статье [8] указанные теоремы установлены в терми-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 96-01-00121, № 96-01-00122).

нах модуля непрерывности, построенного на основе нового оператора обобщенного сдвига.

В этой заметке найдено наименьшее значение точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина с (обобщенным) модулем непрерывности порядка $r \geq 1$ и локализована точка, начиная с которой указанная константа (как функция аргумента модуля непрерывности) выходит на свой минимум, равный единице. Содержащиеся здесь результаты, частично, анонсированы автором в [9].

Первые точные результаты в прямых теоремах теории приближения функций одной и нескольких переменных получили Н.П. Корнейчук [10], [11], Н.И. Черных [12]–[14], В.А. Юдин [15]. Более подробная история этого вопроса и информация о дальнейшем развитии темы о точных неравенствах Джексона – Стечкина на некоторых классических многообразиях содержится в [16]. Среди последних работ в этом направлении отметим [17]–[24].

Введение. Рассмотрим пространство $L^2 = L^2_a = L^2(\mathbb{R}_+, t^a e^{-t})$, $a > -1$, комплексных функций, измеримых по Лебегу на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, квадрат модуля которых суммируем с весом $t^a e^{-t}$ на $\mathbb{R}_+$. Это пространство наделено скалярным произведением и нормой

$$(f, g) = \int_0^\infty f(t)\bar{g}(t) t^a e^{-t}\, dt, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}. \qquad (1.1)$$

Обозначим через $\mathbf{P}_n$ множество всех многочленов $p(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n$ степени не выше $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ с комплексными коэффициентами. *Наилучшим приближением* функции f из L^2 множеством $\mathbf{P}_n$ называют величину

$$E_n(f) = \min\{\|f - p\| : \ p \in \mathbf{P}_n\}.$$

Величину наилучшего приближения функции $f \in L^2$ можно выразить через её коэффициенты Фурье по системе многочленов Лагерра. Подробнее, рассмотрим сначала стандартизованные многочлены Лагерра

$$L_n^{(a)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \binom{n+a}{n-k} (-t)^k, \quad n \in \mathbb{Z}_+\,. \tag{1.2}$$

Эти многочлены являются ортогональными в смысле скалярного произведения (1.1) (см. [25, формулы (5.1.1), (5.1.6)])

$$(L_n^{(a)}, L_m^{(a)}) = \Gamma(a+1) \binom{n+a}{n} \delta_m^n = \Gamma(a+1) L_n^{(a)}(0) \delta_m^n,$$

где δ_m^n есть символ Кронекера

$$\delta_m^n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n \neq m \end{cases} \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+\,.$$

Введем многочлены $R_n = R_n^{(a)}$, положив

$$R_n(t) = L_n^{(a)}(t) / L_n^{(a)}(0), \quad n \in \mathbb{Z}_+\,; \tag{1.3}$$

такое определение корректно, поскольку

$$L_n^{(a)}(0) = \binom{n+a}{n} > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+\,. \tag{1.4}$$

Очевидно, выполняются следующие соотношения

$$R_n(0) = 1; \quad (R_n, R_m) = \frac{\Gamma(a+1)}{L_n^{(a)}(0)} \delta_m^n = \frac{\Gamma(a+1)}{\binom{n+a}{n}} \delta_m^n \tag{1.5}$$

для целых неотрицательных чисел n и m. Функции $f \in L^2$ соответствует ряд Фурье по системе многочленов (1.3)

$$f(t) = \sum_{k \geq 0} c_k R_k(t), \quad c_k = c_k(f) = \binom{k+a}{k} \frac{(f, R_k)}{\Gamma(a+1)}. \quad (1.6)$$

Наилучшее приближение функции (1.6) множеством $\mathbf{P}_{n-1}$ вычисляется с помощью известной формулы

$$E_{n-1}^2(f) = \Gamma(a+1) \sum_{k \geq n} \frac{c_k^2}{\binom{k+a}{k}}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}. \quad (1.7)$$

С настоящего момента мы будем рассматривать лишь случай $a \geq -1/2$. Как обычно, через $C[\delta, \tau]$ будем обозначать пространство вещественных функций, непрерывных на отрезке $[\delta, \tau]$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C[\delta,\tau]} = \max\{\, |f(x)| : \delta \leq x \leq \tau \,\}.$$

В силу известных асимптотических свойств стандартизованных многочленов Лагерра $L_k^{(a)}$ (см. [25, §7.6, §8.22]) имеет место следующее утверждение. **Предложение 1.1.** *Пусть $a \geq -1/2$, $\tau > 0$. Тогда многочлены $R_k(t) = L_k^{(a)}(t)/L_k^{(a)}(0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ равномерно ограничены на отрезке $[0, \tau]$, т.е.*

$$\sup\{\|R_k\|_{C[0,\tau]} : k \in \mathbb{Z}_+\} < \infty.$$

Кроме того, если $a > -1/2$, и δ – произвольное число из открытого интервала $(0, \tau)$, то последовательность многочленов R_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ равномерно сходятся к нулю на отрезке $[\delta, \tau]$ при $k \to \infty$ со скоростью $k^{-(a+1/2)/2}$, и ,в частности, имеет место соотношение

$$\lim_{k \to \infty} \|R_k\|_{C[\delta,\tau]} = 0, \quad a > -1/2, \quad 0 < \delta < \tau < \infty.$$

На основе разложения (1.6) функции $f \in L^2$ в ряд Фурье – Лагерра определим её *(обобщенный) модуль непрерывности порядка* $r > 0$ (не обязательно целого) в точке $\tau \geq 0$, положив

$$\omega_r(f,\tau) = \sqrt{\sup_{0\leq h\leq\tau} \Gamma(a+1) \sum_{k\geq 1} \frac{c_k^2}{\binom{k+a}{k}} |1-R_k(h)|^r}\,. \qquad (1.8)$$

Сейчас мы покажем, что при $a > -1/2$ такое определение модуля непрерывности является естественным обобщением общепринятого.

Оператором обобщенного сдвига с шагом $h > 0$ называют оператор T_h, действующий в пространстве L^2 по правилу [1]

$$T_h f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k R_k(h) R_k(t), \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k R_k(t) \in L^2. \quad (1.9)$$

Видно, что оператор T_h является линейным, кроме того, из предложения 1.1, следует его ограниченность как оператора из L_a^2 в L_a^2, $a \geq -1/2$ (см., например, [7]). В случае $a > -1/2$ этот оператор имеет важное интегральное представление (1.13), которое использует следующее определение и обозначения.

Функцией Бесселя первого рода индекса q (см. [26, §3.1, формула (8)], [25, формула (1.71.1)]) называется функция

$$J_q(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+q+1)} \left(\frac{u}{2}\right)^{q+2k}. \qquad (1.10)$$

Положим

$$\Lambda_q(u)=\Gamma(q+1)\Big(\frac{2}{u}\Big)^q J_q(u), \quad \mu(a)=1\Big/\int_0^\pi (\sin\varphi)^{2a}d\varphi,$$
$$\mathbf{V}(t,h,\varphi)=\exp\left(-\sqrt{th}\cos\varphi\right)\Lambda_{a-1/2}\left(\sqrt{th}\sin\varphi\right)(\sin\varphi)^{2a}. \tag{1.11}$$

Благодаря формуле умножения для многочленов Лагерра [2]

$$R_k(h)R_k(t)=$$
$$=\mu(a)\int_0^\pi R_k\left(t+h+2\sqrt{th}\cos\varphi\right)\mathbf{V}(t,h,\varphi)d\varphi, \tag{1.12}$$

установленной Харди при $a=0$ и Ватсоном при $a>-1/2$, оператор обобщенного сдвига можно записать в следующей интегральной форме (см. [5], [7])

$$T_h f(t)=\mu(a)\int_0^\pi f\left(t+h+2\sqrt{th}\cos\varphi\right)\mathbf{V}(t,h,\varphi)d\varphi. \tag{1.13}$$

Отметим, что оператор обобщенного сдвига с шагом $h=0$ является тождественным оператором; это следует как из формулы (1.13), так и из определения (1.9) с учетом первого равенства в (1.5).

Пусть $1\le p\le\infty,\ a>-1/2$, обозначим через L^p_a пространство комплексных функций, измеримых по Лебегу на полуоси $\mathbb{R}_+$ с конечной нормой

$$\|f\|_p=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^\infty |f(t)t^{a/2}e^{-t/2}|^p\,dt\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty,\\ ess\sup|f(t)t^{a/2}e^{-t/2}|, & p=\infty.\end{cases} \tag{1.14}$$

Известно [5], что при $a \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ оператор сдвига $T_h = T_{h,a}$ является линейным ограниченным оператором из пространства L^p_a в себя.

При $a \geq -1/2$ обозначим через $\xi(a)$ наибольшее неотрицательное число, удовлетворяющее условию

$$|R_k(h)| \leq 1 \quad \text{для всех} \quad h \in [0, \xi(a)] \quad \text{и} \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (1.15)$$

Из известных свойств многочленов Лагерра (см. ниже (2.2)) следует, что

$$\xi(-\frac{1}{2}) = 0, \quad a + \frac{1}{2} \leq \xi(a) \leq 2a + 2 \text{ при } a > -\frac{1}{2}.$$

Поэтому при $a > -1/2$ является корректной и содержательной схема Грюнвальда – Летникова [27], [28] (см. также [29, §20], [30]) построения *разностного оператора* Δ^r_h *вещественного (не обязательно целого) порядка* $r > 0$ *с шагом* $h \in [0, \xi(a)]$

$$\Delta^r_h = (I - T_h)^{r/2} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \psi^{(k)}_r(0) T^k_h \, ,$$

где $\psi_r(u) = (1-u)^{r/2}$, I – тождественный оператор, $T^0_h = I$ и T^k_h есть k-ая итерация оператора T_h. Стандартным образом (см.[7], [30]) приходим к соотношению

$$\|\Delta^r_h f\|^2 = \Gamma(a+1) \sum_{k \geq 1} \frac{c^2_k}{\binom{k+a}{k}} \{1 - R_k(h)\}^r, \quad 0 \leq h \leq \xi(a), \quad r > 0,$$

которое выполняется для любой функции $f(x) = \sum\limits_{k \geq 0} c_k R_k(x)$ из пространства L^2. Отсюда и (1.15) видно, что модуль непрерывности, определенный формулой (1.8), удовлетворяет равенству

$$\omega_r(f,\tau)=\sup\{\|\Delta_h^r f\|:\ 0\le h\le\tau\}\quad \text{при}\quad 0\le\tau\le\xi(a).$$

Для фиксированных $\tau>0$, $n\in\mathbb{N}$, $r>0$, $a\ge -1/2$ рассмотрим задачу о точной константе $K=K(\tau,n,r,a)$ в неравенстве Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(f)\le K\omega_r(f,\tau),\quad f\in L_a^2, \tag{1.16}$$

т.е. задачу о вычислении величины

$$K(\tau,n,r,a)=\sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\omega_r(f,\tau)}:\quad f\in L_a^2\right\}. \tag{1.17}$$

Здесь и в аналогичных ситуациях ниже мы считаем, что

$$\frac{\lambda}{0}=+\infty\quad \text{при}\quad \lambda>0,\qquad \text{и}\quad \frac{0}{0}=0. \tag{1.18}$$

В работах [3]–[7] оператор сдвига T_h применялся, в частности, для построения модуля непрерывности и доказательства соответствующих прямых и обратных теорем теории приближения. Известно [3]–[7], что величина $K(n^{-1},n,2,a)$ ограничена по n при каждом фиксированном $a>-1/2$.

Для $\tau>0$, $n\in\mathbb{N}$, $r>0$, $a\ge -1/2$, наряду с задачей (1.17), рассмотрим задачу о точной константе $\text{æ}=\text{æ}(\tau,n,r,a)$ в неравенстве

$$\sum_{k\ge n}\rho_k\le \text{æ}\sup_{0\le h\le\tau}\sum_{k\ge n}\rho_k|1-R_k(h)|^r,\quad \{\rho_k\}_{k=n}^{\infty}\in l_+^n, \tag{1.19}$$

где l_+^n – класс всех неотрицательных и суммируемых последовательностей $\{\rho_k\}_{k=n}^{\infty}$, т.е.

$$l_+^n = \left\{ \{\rho_k\}_{k=n}^{\infty} : \quad \sum_{k\geq n} \rho_k < \infty, \quad \text{все } \rho_k \geq 0 \right\}.$$

Очевидно, что

$$\text{æ}(\tau, n, r, a) =$$

$$= \sup \left\{ \frac{\sum\limits_{k\geq n} \rho_k}{\sup\limits_{0\leq h\leq \tau} \sum\limits_{k\geq n} \rho_k |1 - R_k(h)|^r} : \quad \{\rho_k\}_{k=n}^{\infty} \in l_+^n \right\}. \quad (1.20)$$

Здесь, также как и в (1.17), действует соглашение (1.18). Из (1.7), (1.8) вытекает равенство

$$K^2(\tau, n, r, a) = \text{æ}(\tau, n, r, a) \qquad (1.21)$$

при $\tau > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r > 0, \quad a \geq -1/2.$

В.В. Арестов получил довольно общий результат [31, лемма 3] , [16, лемма 4.2] (см. ниже лемму 2.2), из которого следует оценка снизу

$$K(\tau, n, r, a) \geq 1 \qquad (1.22)$$

при $\tau > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r > 0, \quad a > -1/2.$

В данной заметке указана некоторая область изменения параметров τ, n, r, a, при которых неравенство (1.22) обращается в равенство. Для точной формулировки результата нам необходимы следующие обозначения:

j_q – первый положительный нуль функции Бесселя J_q первого рода индекса $q > -1$, определение которой дано выше (см. (1.10));

$\tau_{n,a}$ – минимальный нуль многочлена Лагерра $L_n^{(a)}$, $a > -1$, $n \in \mathbb{N}$ (см. (1.2)).

Относительно j_q известны следующие утверждения (см. [26, §15.2, §15.6]):

$$j_{-1/2} = \frac{\pi}{2} \le j_q \le \pi = j_{1/2} \quad \text{при} \quad -\frac{1}{2} \le q \le \frac{1}{2};$$

$$\sqrt{q(q+2)} < j_q \quad \text{при} \quad q \ge 1;$$

j_q при $q > 0$ возрастает с ростом q. Кроме того, в работе [32] получена оценка сверху

$$j_q < \sqrt{q+1}\left\{\sqrt{q+2}+1\right\} \quad \text{при} \quad q > -1.$$

Для $\tau_{n,a}$ выполняются неравенства (см. [25, формула (6.31.12)])

$$\frac{j_a^2}{2(2n+a+1)} < \tau_{n,a} \le \frac{(a+1)(a+3)}{2n+a+1} \tag{1.23}$$

при $n \in \mathbb{N}$, $a > -1$.

Напомним, что из общих свойств ортогональных многочленов (см. [25, теорема 3.3.2]) и верхней оценки в (1.23) следует, что $\tau_{n,a}$, строго убывая, стремится к нулю при возрастании n к бесконечности. Поэтому для каждого числа $a > -1/2$ существует минимальное натуральное число $n = n(a)$, начиная с которого выполняется неравенство: $2\tau_{n,a} \le j_{a-1/2}$, т.е.

$$n(a) = \min\{n \in \mathbb{N} : \ 2\tau_{n,a} \le j_{a-1/2}\}. \tag{1.24}$$

Аналогично, определим число

$$N(a) = \min\left\{n \in \mathbb{N} : \ 2\tau_{n,a} \le \min\left\{\frac{\xi(a)}{2}, j_{a-1/2}\right\}\right\}.$$

При $a > -1/2$ с помощью (1.23) получаем оценки

$$n(a) \le (a+1)\left\{\frac{a+3}{j_{a-1/2}} - \frac{1}{2}\right\} + 1,$$

$$N(a) \le (a+1)\left\{\frac{a+3}{\min\{\xi(a)/2, j_{a-1/2}\}} - \frac{1}{2}\right\} + 1.$$

Основным результатом данной работы являются оценки сверху величины (1.17), которые выполняются при $a > -1/2$

$$K(\tau, n, r, a) \le 1, \quad r \ge 1, \quad n \ge n(a), \quad \tau \ge 4\tau_{n,a};$$

$$K(\tau, n, r, a) \le 2^{(1-r)/2}, \quad 0 < r < 1, \quad n \ge N(a),$$
$$4\tau_{n,a} \le \tau \le \xi(a).$$

Более точная формулировка полученного здесь результата содержится в следующем утверждении.

Теорема 1.1. *Пусть $a > -1/2$. Тогда на множестве функций $f \in L^2_a$, отличных от постоянной, справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(f) < 1 \cdot \omega_r(f, \tau) \tag{1.25}$$

при $r \ge 1, \quad n \ge n(a), \quad \tau \ge 4\tau_{n,a};$

$$E_{n-1}(f) < 2^{(1-r)/2} \cdot \omega_r(f, \tau) \tag{1.26}$$

при $0 < r < 1, \quad n \ge N(a), \quad 4\tau_{n,a} \le \tau \le \xi(a).$

Причем, в случае $r \ge 1$ множитель 1, стоящий перед модулем непрерывности в неравенстве (1.25), *нельзя заменить на меньший.*

Для доказательства неравенств (1.25), (1.26) используются идеи, содержащиеся в работах Н.И. Черных [12], [13] и В.А. Юдина [15], а также схема работы автора [16]. Последнее утверждение теоремы 1.1 следует из неравенства (1.22).

В пункте 4 приводится доказательство теоремы 1.1, которое основано на утверждениях предыдущих пунктов. Пункт 5 посвящен неравенству Джексона – Стечкина со смешанным обобщенным модулем непрерывности. В заключении данного пункта, отметим, что в случае $a = -1/2$ задача (1.17) остается открытой.

2. Оценка снизу. Вначале приведем несколько утверждений, которые являются следствиями известных свойств многочленов Лагерра.

Из явного выражения (1.2) и неравенства (1.4) для стандартизованных многочлена Лагерра следует, что многочлены (1.3), наряду со свойством: $R_k(0) = 1,\ k \in \mathbb{Z}_+$, обладают свойством: $R_k'(0) < 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a \geq -1/2$. Поэтому при $a \geq -1/2$ числа

$$\xi_k(a) = \sup\{t \geq 0 : |R_k(x)| \leq 1 \text{ при } 0 \leq x \leq t\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

являются строго положительными. Очевидно, что

$$\xi_1(a) = 2a + 2, \quad a \geq -1/2. \tag{2.1}$$

Положим

$$\xi(a) = \inf\{\xi_k(a) : k \in \mathbb{N}\}, \quad a \geq -1/2.$$

Для оценки снизу $\xi(a)$ используем известное утверждение [25, теорема\nobreakspace {}7.6.1].

Теорема 2.1. *Пусть a – произвольное вещественное число и n – произвольное натуральное число. Последовательность, образованная относительными максимумами функции $|L_n^{(a)}(x)|$ и значением этой функции в точке*

$x = 0$, *является убывающей при* $x < a + 1/2$ *и возрастающей при* $x > a + 1/2$.

Из этой теоремы, предложения 1.1 и равенства (2.1) вытекают следующие утверждения для величины $\xi(a)$

$$\xi\left(-\frac{1}{2}\right) = 0; \quad a + \frac{1}{2} \le \xi(a) \le 2a + 2, \quad a > -\frac{1}{2}; \qquad (2.2)$$

если $a \ge -1/2$, $0 \le \tau < \infty$, то величина

$$M_a(\tau) = \sup\{\|R_k\|_{C[0,\tau]} : \ k \in \mathbb{N}\}$$

удовлетворяет соотношениям

$$M_a(\tau) = 1 \quad \text{при} \quad 0 \le \tau \le \xi(a), \quad M_a(\tau) < \infty \quad \text{при} \quad \tau > \xi(a).$$

Отсюда следует такое утверждение

Лемма 2.1. *Пусть* $a \ge -1/2$, $r > 0$, $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда функции*

$$P_k(t) = |1 - R_{n+k}(t)|^r, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

обладают следующими свойствами: $P_k \in C[0,\tau]$, $P_k(0) = 0$, $\sup\{\|P_k\|_{C[0,\tau]} : \ k \in \mathbb{Z}_+\} \le \{1 + M_a(\tau)\}^r < \infty$.

Кроме того, если $a > -1/2$, *то при любом* $\delta \in (0,\tau]$ *выполняется соотношение:* $\lim_{k\to\infty} \|P_k\|_{C[\delta,\tau]} = 1$.

Для более общих систем функций В.В. Арестов [16, лемма 4.2] доказал следующее утверждение (двойственный аналог которого доказан им ранее в [31, лемма 3]).

Лемма 2.2. *Пусть на отрезке* $[0,\tau]$, $\tau > 0$, *задана система непрерывных вещественных функций* F_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *удовлетворяющая условиям:* $F_k(0) = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$; *существует абсолютная константа* $1 \le M < \infty$

такая, что $|F_k(t)| \le M$ при $0 \le t \le \tau, \quad k \in \mathbb{Z}_+$; *для любого числа* $\delta \in (0, \tau]$ *выполняется соотношение*

$$\liminf_{k\to\infty}(\max\{F_k(t) : \delta \le t \le \tau\}) \le 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ *найдется функция*

$$F(t) = \sum_{k\ge 0} \rho_k F_k(t), \quad \sum_{k\ge 0} \rho_k = 1,$$

с неотрицательными коэффициентами $\rho_k \ge 0, \quad k \ge 0$, *такая, что*

$$F(t) \le 1 + \varepsilon \quad \text{при всех} \quad t \in [0, \tau].$$

Следствие 2.1. *Если* $a > -1/2, \quad r > 0, \quad \tau > 0, \quad n \in \mathbb{N}$, *то существует последовательность функций* f_l, $l = 1, 2, 3, \ldots$, *из* L_a^2 *такая, что*

$$\lim_{l\to\infty} \frac{E_{n-1}(f_l)}{\omega_r(f_l, \tau)} \ge 1.$$

Доказательство. Рассмотрим систему функций

$$P_k(t) = |1 - R_{n+k}(t)|^r, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \in \mathbb{R}_+ .$$

Как следует из леммы 2.1, эта система функций удовлетворяет условиям леммы 2.2, поэтому для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует функция F_ε вида

$$F_\varepsilon(t) = \sum_{k\ge 0} \rho_k |1 - R_{n+k}(t)|^r, \quad \sum_{k\ge 0} \rho_k = 1$$

с неотрицательными коэффициентами $\rho_k \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, такая, что при всех $t \in [0, \tau]$ выполняется неравенство: $F_\varepsilon(t) \leq 1 + \varepsilon$. В силу (1.7), (1.8) для функции

$$f_\varepsilon(t) = \sum_{k \geq 0} \sqrt{\binom{n+k+a}{n+k}\rho_k} R_{n+k}(t) \in L_a^2$$

выполняется неравенство

$$\frac{E_n^2(f_\varepsilon)}{\omega_r^2(f_\varepsilon, \tau)} \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)}.$$

Устремляя ε к нулю, приходим к требуемому утверждению.

Следствие 2.1 влечет оценку (1.22) для величины (1.17).

3. Вспомогательные утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть $a > -1/2$, $0 < 2\tau \leq j_{a-1/2}$, функция F неотрицательна и непрерывна на $\mathbb{R}_+$, кроме того, ее носитель сосредоточен на полуинтервале $[0, \tau)$, т.е. $F(t) = 0$ при $t \geq \tau$. Тогда функция $F_\tau(t) = T_\tau F(t)$ является неотрицательной и непрерывной на $\mathbb{R}_+$ с носителем на $[0, 4\tau)$, т.е. $F_\tau(t) = 0$ при $t \geq 4\tau$.*

Доказательство. вытекает из определения (1.13) сдвига и следующих двух легко проверяемых неравенств

$$\begin{aligned}
\tau \leq t + \tau + 2\sqrt{t\tau}\cos\varphi \quad &\text{при} \quad t \geq 4\tau, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \\
0 \leq \sqrt{\tau t}\sin\varphi < j_{a-1/2} \quad &\text{при} \quad 0 < \tau \leq j_{a-1/2}/2, \\
&\qquad\quad 0 \leq t < 4\tau, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi; \\
\Lambda_{a-1/2}(u) > 0 \quad &\text{при} \quad 0 \leq u < j_{a-1/2}, \quad a > -1/2;
\end{aligned}$$

последнее из них следует из определения (1.11) функции Λ_q.

Как уже отмечалось в первом пункте статьи, следствием результата (1.12) Харди и Ватсона является интегральное представление (1.13) для оператора сдвига T_h. Кроме того, из определения (1.9) вытекает свойство самосопряженности оператора сдвига T_h (см. [6]).

Лемма 3.2. *Пусть $a \geq -1/2$, $h \geq 0$. Тогда для любых двух функций f, g из L_a^2 выполняется равенство*

$$(T_h f, g) = (f, T_h g).$$

Рассмотрим следующее множество $G_n = G_{n,a}, \quad n \in \mathbb{N}$, $a \geq -1/2$ функций, заданных на $\mathbb{R}_+$

$$G_n = \left\{ f(x) = \sum_{k \geq n} \rho_k R_k(x) : \sum_{k \geq n} \rho_k = 1, \ \rho_k \geq 0, \ k \geq n \right\}. \tag{3.1}$$

Это множество является выпуклым, замкнутым подмножеством пространства $C[0, \tau]$ при любом $0 < \tau < \infty$.

Важной характеристикой системы многочленов Лагерра является точка Черных множества G_n, которая определяется следующим образом

Определение 3.1. Положительное число $\sigma = \sigma(G_n)$ называется *точкой Черных* для множества G_n, если одновременно выполняются следующие два условия

(a) для любой функции f из G_n найдется точка $x^* = x^*(f)$ из открытого интервала $(0, \sigma)$, в которой $f(x^*) < 0$;

(b) для любого числа $\delta \in (0, \sigma)$ существует функция $f_\delta \in G_n$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $f_\delta(x) \geq \varepsilon$ при всех $x \in [0, \delta]$.

Первые результаты, связанные с такой же характеристикой системы косинусов, принадлежат Н.И.Черных. Он доказал [12], [14] утверждения , которые эквивалентны равенству

$$\sigma(C_n) = \frac{\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$C_n = \left\{ f(x) = \sum_{k \geq n} \rho_k \cos kx : \quad \sum_{k \geq n} \rho_k = 1, \quad \text{все} \quad \rho_k \geq 0 \right\}.$$

Напомним (см. (1.24)), что для $a > -1/2$ через $n(a)$ мы обозначили минимальное натуральное число n, начиная с которого выполняется неравенство: $2\tau_{n,a} \leq j_{a-1/2}$. Основным результатом этого пункта является

Лемма 3.3. *Пусть $a > -1/2$. Тогда для точки Черных множества G_n справедливы оценки*

$$\tau_{n,a} \leq \sigma(G_n) \quad \textit{при} \quad n \geq 1, \tag{3.2}$$

$$\sigma(G_n) \leq 4\tau_{n,a} \quad \textit{при} \quad n \geq n(a). \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка снизу (3.2) вытекает из того, что функция R_n принадлежит G_n и удовлетворяет неравенству

$$R_n(x) \geq R_n(\delta) > 0 \quad \text{при} \quad x \in [0, \delta], \quad \delta \in (0, \tau_{n,a}).$$

Здесь мы воспользовались тем, что нули производной R'_n перемежаются с нулями R_n, а также равенством $R_n(0) = 1$ и неравенством $R'_n(0) < 0$.

Доказательство оценки сверху (3.3) будем проводить по схеме Н.И.Черных [12] . Именно, построим вес - неотрицательную, ненулевую и интегрируемую на отрезке $[0, 4\tau_{n,a}]$

функцию $v(x) = v_{n,a}(x)$, удовлетворяющую условиям

$$\int_0^{4\tau_{n,a}} R_k(x)v(x)dx \le 0, \quad k \ge n. \tag{3.4}$$

Эти условия и повлекут справедливость оценки (3.3), т.к. тогда для каждой функции

$$f(x) = \sum_{k\ge n} \rho_k R_k(x), \quad f(0) = \sum_{k\ge n} \rho_k = 1, \quad \rho_k \ge 0, \quad k \ge n$$

из G_n будут выполнятся соотношения

$$\int_0^{4\tau_{n,a}} f(x)v(x)dx = \sum_{k\ge n} \rho_k \int_0^{4\tau_{n,a}} R_k(x)v(x)dx \le 0,$$

из которых, ввиду нетривиальности и неотрицательности v, будет следовать существование точки x^* из открытого интервала $(0, 4\tau_{n,a})$, такой что $f(x^*) < 0$.

Идея построения искомого веса v близка к той, которая применялась В.А. Юдиным в работе [15]. Положим

$$V(x) = \begin{cases} R_n(x) & , \quad x \in [0, \tau_{n,a}) \\ 0 & , \quad x \ge \tau_{n,a}. \end{cases}$$

Искомый вес v определим по формуле

$$v(x) = x^a e^{-x} T_{\tau_{n,a}} V(x).$$

Для $n \ge n(a)$ имеем $0 < 2\tau_{n,a} \le j_{a-1/2}$. Поэтому, в силу неотрицательности и непрерывности функции V на $\mathbb{R}_+$ с носителем на $[0, \tau_{n,a})$, с помощью леммы 3.1 получаем, что функция v непрерывна и неотрицательна на $\mathbb{R}_+$, причем

$v(x) = 0$ для $x \geq 4\tau_{n,a}$. Применяя лемму 3.2, получаем, что величина

$$a_k = \int_0^{4\tau_{n,a}} v(x) R_k(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}$$

удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^{\infty} v(x) R_k(x) dx = \int_0^{\infty} x^a e^{-x} \{T_{\tau_{n,a}} V(x)\} R_k(x) dx = \\ &= (T_{\tau_{n,a}} V, R_k) = (V, T_{\tau_{n,a}} R_k). \qquad (3.5) \end{aligned}$$

Учитывая формулу умножения (1.12) для многочленов Лагерра, получаем

$$\begin{aligned} a_k &= R_k(\tau_{n,a})(V, R_k) = R_k(\tau_{n,a}) \int_0^{\tau_{n,a}} x^a e^{-x} R_n(x) R_k(x) dx = \\ &= R_k(\tau_{n,a}) \int_0^{\tau_{n,a}} \frac{\varphi_n(x)\varphi_k(x)}{x} dx, \qquad (3.6) \end{aligned}$$

где

$$\varphi_k(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{a+1}{2}} R_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Известно (см.[25, формула (5.1.2)]), что функции φ_k удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$x\varphi_k''(x) - xq(x)\varphi_k(x) = -\left(k + \frac{a+1}{2}\right)\varphi_k(x), \qquad (3.7)$$

в котором

$$q(x) = \frac{1}{4} - \frac{a^2 - 1}{4x^2}.$$

Рассмотрим числа

$$c_k = \left\{ \left(n + \frac{a+1}{2}\right) - \left(k + \frac{a+1}{2}\right) \right\} \int_0^{\tau_{n,a}} \frac{\varphi_n(x)\varphi_k(x)}{x} dx =$$

$$= \int_0^{\tau_{n,a}} \frac{(2n+a+1)\varphi_n(x)\varphi_k(x) - (2k+a+1)\varphi_k(x)\varphi_n(x)}{2x}\,dx.$$

Применяя стандартный прием с использованием уравнения (3.7), приходим к равенствам

$$c_k = \int_0^{\tau_{n,a}} \{[\varphi_k''(x) - q(x)\varphi_k(x)]\varphi_n(x)$$

$$-[\varphi_n''(x) - q(x)\varphi_n(x)]\varphi_k(x)\}dx =$$

$$= \int_0^{\tau_{n,a}} \{\varphi_k''(x)\varphi_n(x) - \varphi_n''(x)\varphi_k(x)\}dx =$$

$$= \{\varphi_k'(x)\varphi_n(x) - \varphi_n'(x)\varphi_k(x)\}\big|_0^{\tau_{n,a}} =$$

$$= x^{a+1}e^{-x}\{R_k'(x)R_n(x) - R_n'(x)R_k(x)\}\big|_0^{\tau_{n,a}} =$$

$$= -\tau_{n,a}^{a+1}e^{-\tau_{n,a}}R_k(\tau_{n,a})R_n'(\tau_{n,a}).$$

Отсюда и соотношений (3.5)–(3.6) получаем

$$a_n = 0, \quad a_k = \frac{1}{k-n}\tau_{n,a}^{a+1}e^{-\tau_{n,a}}R_k^2(\tau_{n,a})R_n'(\tau_{n,a}), \quad k > n.$$

И поскольку $R_n'(\tau_{n,a}) < 0$ для $n \in \mathbb{N}$, то $a_k \le 0$ при $k \ge n$.

Таким образом, мы нашли вес v, удовлетворяющий условиям (3.4), что завершает доказательства леммы 3.3.

В дальнейшем нам понадобится очевидное

Предложение 3.1. *Имеют место следующие неравенства*

$$|1-u|^r \ge 1 - ru \quad \textit{при} \quad r \ge 1, \quad -\infty < u < +\infty;$$

$$|1-u|^r \ge 2^{r-1}(1-u) \quad \textit{при} \quad 0 < r < 1, \quad u \ge -1.$$

4. Доказательство. теоремы 1.1. Рассмотрим случай $r \geq 1$. Докажем неравенство (1.25). В силу (1.8), (1.19), (1.21) и предложения 3.1 нам достаточно установить неравенство

$$\sum_{k\geq n} \rho_k < \sup_{0\leq t\leq 4\tau_{n,a}} \sum_{k\geq n} \{1 - rR_k(t)\}\rho_k, \quad n \geq n(a), \tag{4.1}$$

для любой последовательности $\{\rho_k\}_{k=n}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям

$$\sum_{k\geq n} \rho_k = 1, \quad \text{все} \quad \rho_k \geq 0.$$

Заметим, что ряд, находящийся в правой части (4.1), можно представить в виде

$$\sum_{k\geq n} \{1 - rR_k(t)\}\rho_k = \sum_{k\geq n} \rho_k - rF(t), \quad F(t) = \sum_{k\geq n} \rho_k R_k(t),$$

причем функция F принадлежит множеству G_n (см. (3.1)). По лемме 3.3 точка Черных множества G_n удовлетворяет неравенству $\sigma(G_n) \leq 4\tau_{n,a}$ при $n \geq n(a)$. Следовательно (см. определение 3.1, часть (a)), для F найдется точка $x^* \in (0, 4\tau_{n,a})$, в которой $F(x^*) < 0$. Поэтому справедливо неравенство

$$\sup_{0<t\leq 4\tau_{n,a}} \left\{ \sum_{k\geq n} \rho_k - rF(t) \right\} > \sum_{k\geq n} \rho_k,$$

которое совпадает с (4.1).

Неравенство (1.26) доказывается аналогично. Следствие 2.1. влечет последнее утверждение теоремы 1.1, чем и завершается её доказательство теоремы 1.1.

5. Неравенство Джексона – Стечкина со смешанным обобщенным модулем непрерывности. В последнее время возрос интерес к прямым и обратным теоремам теории приближения в терминах смешанного обобщенного модуля непрерывности, основанного на операторе обобщенного сдвига, который строится с помощью двух различных систем функций (система функций, определяющая сдвиг, отличается от ортогональной системы функций, задающей базис гильбертова пространства). Так в совместной работе М.К. Потапова и С.К. Танкаевой [8] был введен новый оператор обобщенного сдвига, который в гильбертовом случае можно задать с помощью двух систем многочленов Лагерра с различными показателями.

Подробнее. Для вещественной неубывающей на полуоси $\mathbb{R}_+$ функции μ обозначим через $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ пространство комплексных функций со скалярным произведением и нормой

$$(f, g) = \int_0^\infty f(t)\bar{g}(t)\, d\mu(t), \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ есть полная ортогональная система функций в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$; $\Psi = \{\psi_k\}_{k=0}^\infty$ – система вещественных непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций, равномерно ограниченных на каждом конечном отрезке вида $[0, \tau]$ и удовлетворяющих свойству: $\psi_k(0) = 1,\ k \geq 0$. С помощью этих двух систем функций определяется *оператор* $T_h(f,t) = T_h(f,t)_{\Psi,\Phi,d\mu}$ *(смешанного обобщенного) сдвига с шагом* $h \geq 0$, действующий в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ по закону

$$T_h(f,t) = \sum_{k=0}^\infty c_k \psi_k(h)\varphi_k(t), \quad f(t) = \sum_{k=0}^\infty c_k \varphi_k(t) \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu).$$

Для функции $f(t) = c_0\varphi_0(t) + c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \ldots$ из пространства $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, по аналогии с тем как это делалось выше (см. (1.8)), определим её *(смешанный обобщенный) модуль непрерывности порядка $r > 0$ в точке $\tau \geq 0$*, соответствующий сдвигу $T_h(f,t)_{\Psi,\Phi,d\mu}$,

$$\omega_r(f,\tau) = \omega_r(f,\tau)_{\Psi,\Phi,d\mu} = \\ = \sqrt{\sup_{0\leq h\leq\tau} \sum_{k\geq 0} \|c_k\varphi_k\|^2 |1-\psi_k(h)|^r}\,. \qquad (5.1)$$

Обозначим через Φ_n множество всех полиномов $p(t) = c_0\varphi_0(t) + c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t)$ с комплексными коэффициентами $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Наилучшим приближением функции f из $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ множеством Φ_n называют величину

$$E_n(f) = E_n(f)_{\Phi,d\mu} = \min\{\|f-p\| : \ p \in \Phi_n\}.$$

Для функции $f(t) = c_0\varphi_0(t) + c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \ldots$ из пространства $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ эта величина удовлетворяет равенству

$$E^2_{n-1}(f) = \sum_{k\geq n} \|c_k\varphi_k\|^2.$$

Отсюда и (5.1) видно, что в случае, когда система Ψ, задающая оператор сдвига, совпадает с системой $\Re^{(a)} = \{R_k^{(a)}\}_{k=0}^{\infty}$ многочленов Лагерра с показателем $a \geq -1/2$, задача о точной константе $K = K(\tau, n, r, \Re^{(a)}, \Phi, d\mu)$ в неравенстве Джексона – Стечкина

$$E_n(f)_{\Phi,d\mu} \leq K\omega_r(f,\tau)_{\Re^{(a)},\Phi,d\mu}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu),$$

сводится к задаче (1.20), и как следствие, получается равенство

$$K(\tau, n, r, \Re^{(a)}, \Phi, d\mu) = K(\tau, n, r, a),$$

справедливое при $\quad \tau > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r > 0, \quad a \geq -\frac{1}{2}.$

Приведем один конкретный пример оператора смешанного обобщенного сдвига, построенного в [8], для которого имеется изящное интегральное представление. Именно, в работе [8] был введен новый оператор обобщенного сдвига, действующий в пространстве L^p_β (см. 1.14) по закону

$$T^a_h(f,t) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\Theta) \left(\frac{\Theta}{t} \right)^{a/2} e^{-\sqrt{th}\cos\varphi} \cos\left(a\chi - \sqrt{th}\sin\varphi \right) \, d\varphi, \tag{5.2}$$

где

$$a \in \mathbb{Z}_+\,, \quad t \geq 0, \quad h \geq 0, \quad 0 \leq \chi \leq \pi,$$

$$\Theta = t + h + 2\sqrt{th}\cos\varphi, \quad \cos\chi = \frac{\sqrt{t} + \sqrt{h}\cos\varphi}{\Theta}.$$

В указанной работе приводится важное свойство этого оператора, а именно, формула умножения для многочленов Лагерра с показателями 0 и $a \in \mathbb{Z}_+$

$$T^a_h(R^{(a)}_k, t) = R^{(0)}_k(h) R^{(a)}_k(t), \quad k \in \mathbb{Z}_+\,, \quad t \geq 0, \quad h \geq 0. \tag{5.3}$$

Как отмечается в [8], эта формула следует из результатов, полученных в статье [33]. Формула (5.3) влечет следующее представление сдвига (5.2)

$$T^a_h(f,t) = \sum_{k=0}^\infty c_k R^{(0)}_k(h) R^{(a)}_k(t),$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^\infty c_k R^{(a)}_k(t) \in L^2_a, \quad a \in \mathbb{Z}_+\,,$$

которое можно записать также в виде

$$T_h^a(f,t) = T_h(f,t)_{\Re^{(0)},\Re^{(a)},t^a e^{-t}\,dt}, a \in \mathbb{Z}_+, \quad t \geq 0, \quad h \geq 0.$$

Список литературы

[1] **Löfstrëm J., Peetre J.** Approximation Theorems Connected with Generalized Translations // Math. Ann. 1969. V. 181. P. 255–268.

[2] **Watson G.N.** Another note in Laguerre polynomials // J. London Math. Soc. 1939. V. 14. P. 19–22.

[3] **Ржавинская Е.В.** О приближении функций в среднем суммами Фурье – Лагерра // Известия вузов. Математика. 1979. № 11. С. 87–93.

[4] **Федоров В.М.** О приближении с весом Лагерра // Некоторые вопросы математики и механики / Под ред. А.Н. Колмогорова. М., 1979. С. 46–47.

[5] **Федоров В.М.** Аппроксимация многочленами на полуоси // Конструктивная теория функций – 81. София: БАН, 1983. С. 181–184.

[6] **Танкаева С.** О теоремах Джексона на отрезке $[-1,1]$ и полуоси $[0,\infty]$ // Изв. АН Республики Казахстан. Сер. физ.-матем. 1992. № 5. С. 45–49.

[7] **Абилов В.А.** Приближение функций суммами Фурье – Лагерра // Матем. заметки. 1995. Т. 57. Вып. 2. С. 163–170.

[8] **Potapov M.K. and Tankaeva S.K.** On approximation of functions on the half-line by algebraic polynomials // Analysis Mathematica. 1994. T. 20. F. 2. O. 107–115.

[9] **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона в пространстве L^2 с весом Лагерра // Алгоритмический и численный анализ некорректных задач: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции, посвященной памяти В.К.Иванова (Екатеринбург, 27 февраля - 3 марта 1995 г.). Екатеринбург: УрГУ, 1995. С. 25–26.

[10] **Корнейчук Н.П.** Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 3. С. 514–515.

[11] **Корнейчук Н.П.** О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. 1982. Т. 32. Вып. 3. С. 669–674.

[12] **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 71–74.

[13] **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2. Вып. 5. С. 513–522.

[14] **Arestov V.V., Chernykh N.I.** On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric

polynomials // Approximation and functions spaces. / Proc. Conf. Gdan′sk, 1979. Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.

[15] **Юдин В.А.** Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т. 29. Вып. 2. С. 309–315.

[16] **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Матем. заметки. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 333–355.

[17] **Иванов В.И., Смирнов О.И.** Константы Джексона в пространствах L_2 на метрических компактах // Изв. ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 1997. Т. 2. Вып. 1. С. 93–118.

[18] **Babenko A.G.** Jackson–Stechkin constant in L^2 on the segment with Jacobi weight, on the sphere and projective spaces // V Jornadas Zaragoza–Pau Mat. Apl. y Estadistica, JACA, 15–16 Sept. 1997: Zaragoza–Pau, 1997. P. 14.

[19] **Горбачев Д.В.** Точные константы Джексона на группе $SU(2)$ // Изв. ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 1997. Т. 3. Вып. 1. С. 15–27.

[20] **Горбачев Д.В.** Приближение в L_2 по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 9-ой Саратовской зимней школы (Саратов, 26 января – 1 февраля 1998 года). Саратов: Саратовский университет, 1997. С. 48.

[21] **Московский А.В.** Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ // Изв. ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 1997. Т. 3. Вып. 1. С. 44–70.

[22] **Горбачев Д.В., Пискорж М.С.** Точное неравенство Джексона в L_2 на гиперболоиде // Теория приближений и гармонический анализ: Тезисы докладов международной конференции.– Тула: ТулГУ, 1998. С. 83.

[23] **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(R^m)$ // Труды ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1998. Т. 5. С. 183–198.

[24] **Попов В.Ю.** Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 на гиперболоиде // Труды ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1998. Т. 5. С. 254–266.

[25] **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962.

[26] **Ватсон Г.Н.** Теория бесселевых функций. Часть первая. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1949.

[27] **Grünwald A.K.** Über "begrenzte"Derivationen und deren Anwendung // Z. angew. Math. und Phys. 1867. Bd. 12. S. 441–480.

[28] **Летников А.В.** Теория дифференцирования с произвольным указателем // Матем. сб. 1868. Т. 3. С. 1–68.

[29] **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

[30] **Рустамов Х.П.** О приближении функций на сфере // Изв. АН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 127–148.

[31] **Арестов В.В., Попов В.Ю.** Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Известия вузов. Математика. 1995. № 8. С. 13–20.

[32] **Chambers Ll.G.** An upper bound for the first zero of Bessel functions // Mathematics of Computation. 1982. V. 38. № 158. P. 589–591.

[33] **Виленкин Н.Я.** Многочлены Лагерра, функции Уиттекера и представления группы окаймленных матриц // Матем. сб. 1968. Т. 75. С. 432–444.