PACS 02.10.Ox, 02.60.-x, 89.20.Ff

© 2007 г. Вл. Д. Мазуров, д-р физ.-мат. наук
(Уральский государственный университет
им. А.М.Горького, Екатеринбург),
М. Ю. Хачай, д-р физ.-мат. наук
(Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург)

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И КОМИТЕТНЫЕ КОНСТРУКЦИИ[1]

Статья содержит исторический обзор результатов, подтверждающих глубинную связь между параллельными вычислениями и процедурами обучения слоистых нейронных сетей, одной из формализаций которых является теория комитетных конструкций. Кроме того рассматриваются две комбинаторные задачи, связанные с обучением распознаванию образов в классе аффинных комитетов: задача проверки существования аффинного разделяющего комитета из трех элементов (3-ASC) и задача о минимальном по числу элементов аффинном разделяющем комитете (MASC). Показано, что задача 3-ASC NP-полна, а задача MASC NP-трудна и не принадлежит классу Apx.

1. Введение

Слоистые нейронные сети (персептроны) — одна из наиболее популярных математических моделей, используемых при создании алгоритмов обучения распознаванию образов. При этом алгоритмы обучения таких сетей, как правило, не требуют распараллеливания, будучи параллельными по своей природе. Тем не менее, несмотря на внутренний параллелизм этих алгоритмов обучения, задачи оптимизации, связанные с обучением персептронов, зачастую не лишены проблем, присущих многим комбинаторным задачам, высокой вычислительной сложности, слабой аппроксимируемости и др. Настоящая статья условно может быть разделена на две части. Первая играет концептуальную роль, выявляя историческую взаимосвязь между параллельными вычислениями и теорией комитетных решений, описывающей, в частности, процедуру обучения персептрона. Вторая часть посвящена новым результатам, касающимся оценивания вычислительной и аппроксимативной сложности нескольких комбинаторных задач, связанных с обучением распознаванию в классе аффинных комитетных классификаторов.

2. Комитетный подход к распараллеливанию процедуры обучения распознаванию

Идея распараллеливания вычисления характеристик объектов и использования (для выявления тех или иных глобальных свойств объектов) локальных предикатов эксплуатировалась в распознавании образов с самого зарождения этой дисциплины,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 07-07-00168 и 07-01-399) и Совета по грантам Президента Российской Федерации (гранты НШ-5595.2006.1 и МД-6768.2006.1).

т.е. с 1950-х г. И еще раньше, сто лет тому назад, Рассел и Уайтхед поставили проблему генерирования общих понятий — универсалий — на основе обобщения локальных данных. Мак-Каллох и Питтс для реализации этой идеи использовали линейные пороговые функции; впоследствии такого сорта функции были названы формальными нейронами. Программа построения глобальных решений через решения подзадач была объявлена Розенблаттом в 1950-х г. при исследовании им частного вида сетей — персептронов (сетей с тремя слоями линейных пороговых элементов с обучением в одном слое). Однако достаточно скоро было доказано, что персептрон Розенблатта неспособен к экстраполяции прецедентных данных. И тогда возникла необходимость построения более общей теории параллельных вычислительных устройств, которая позволила бы точно оценивать разрешимость проблемы анализа данных с помощью локальных предикатов. Исследования по теории комитетов $[1, 2]$ позволили доказать необходимые теоремы. Дело в том, что комитет — это трехслойная сеть с обучением во всех слоях. Задача становится нелинейной, но были найдены методы ее решения. Это особенно важно потому, что речь идет о распараллеливании решений не только полностью определенных, но и неформализованных задач.

Нейронные сети вырабатывают решения, устанавливая принадлежность объекта данному классу, суммируя данные обработки локальных участков массива данных. Если X — входной массив данных, то решение $f(X)$ соответствующей задачи $Z(X)$ можно получить в два этапа: сначала вычислить функции $f_1(X), \ldots, f_q(X)$ (фактически, это функции от части массива X, локальные функции), а затем построить результирующую функцию $f(X) = g(f_1(X), \ldots, f_q(X))$ путем настройки коэффициентов всех функций. Если при этом функции g и f_i представляют собой линейные пороговые элементы, то f — комитет большинства.

Это одна из возможных интерпретаций комитетных решений. Есть и другие интерпретации, связанные с принципом распараллеливания процессов обработки данных и знаний. Комитет — одна из моделей размытого множества. Это также обобщение решения несовместной задачи — решение, не сконцентрированное в точке, это множество точек — каждая со своим весом присутствия в упомянутом множестве. Как для теории линейных неравенств, так и для практических задач важно исследовать несовместные системы линейных неравенств с помощью комитетных конструкций, дающих одно из направлений понятия решения. Комитетом системы линейных неравенств над линейным пространством называется конечный набор элементов этого пространства, обладающий свойством: каждому неравенству системы удовлетворяет большинство его элементов. Комитетные конструкции — некоторый класс обобщений понятия решения для задач математического программирования и распознавания образов, которые могут быть как совместными, так и несовместными. Это класс дискретных аппроксимаций для противоречивых задач, их можно также соотнести с размытыми решениями. Метод комитетов в настоящее время определяет одно из направлений анализа и решения задач эффективного выбора вариантов, оптимизации, диагностики и классификации. Приведём для примера определение еще одной из основных комитетных конструкций, а именно: p-комитетом системы включений для заданного числа $0 < p < 1$ называется такой набор элементов, в котором каждому включению удовлетворяет более чем p-я доля его элементов.

Комитетные конструкции можно рассматривать и как некоторый класс обобщений понятия решения на случай несовместных систем уравнений, неравенств и включений и как средство распараллеливания в решении задач выбора, диагностики и прогнозирования. Как обобщение понятия решения задачи комитетные конструкции представляют собой наборы элементов, обладающие некоторыми (но, как правило, не всеми) свойствами решения, — это вид размытых решений. Например, комитет системы ограничений — это набор элементов такой, что каждому ограничению удовлетворяет более половины элементов из набора.

Как средство распараллеливания комитетные конструкции непосредственно выступают в многослойных нейронных сетях, а именно, в [1, 3] показано, что для обучения нейронной сети точному решению задачи классификации можно применить метод построения комитета некоторой системы аффинных неравенств.

Исходя из сказанного, можно заключить, что метод комитетов связан с одним из важных направлений исследования и численного анализа как задач диагностики и выбора вариантов, так и задач настройки нейронных сетей с целью получения требуемого их реагирования на входную информацию по той или иной проблеме лица, принимающего решения.

После экспериментов Ф. Розенблатта, Н. Нильсон и ряд других американских авторов рассматривали ассоциативные машины (начало 60-х г.) и вплотную подошли к понятию комитета системы линейных неравенств. Наконец, в 1965 г. Эблау и Кейлор [4] явно сформулировали понятие комитета системы линейных неравенств. После этого данная тематика широко исследовалась, но чисто математическая теория с полными и строгими доказательствами развивалась только в Екатеринбурге в Институте математики и механики АН СССР, ныне — ИММ УрО РАН.

Необходимо отметить, что сведение решения задачи к решениям подзадач можно проследить также на примере несовместных задач, имеющих прозрачный практический смысл, исторически это направление можно проследить ещё с XVIII в. Так например, ещё Лежандр, Гаусс, а позднее Лаплас, предложившие и исследовавшие метод наименьших квадратов, работали с переопределёнными, следовательно, как правило, противоречивыми системами линейных алгебраических уравнений. Другая сторона вопроса о комитетных конструкциях связана с понятием коалиций при выработке коллективных решений, при этом ситуации резко различаются в случае коллективных предпочтений (здесь много подводных камней) и в случае правил коллективной классификации, в этом случае процедуры можно строго обосновать и они имеют более широкие возможности. Поэтому важно уметь сводить задачи принятия решений к классификационным задачам.

Рассмотрим коалиции в задаче коллективного предпочтения. Пусть X — множество вариантов, из которых требуется выбрать — по некоторым критериям — определённый вариант x. Пусть проблемой такого выбора занимается набор экспертов или лиц, принимающих решения, — набор C. В случае, когда выбор осуществляется на основе предпочтений, каждый представитель f набора C — это фактически бинарное отношение предпочтения $r(f)$. Это значит, что для некоторых x, y из X может иметь место утверждение $x\, r(f)\, y$, что значит: «для f x предпочтительнее, чем y». Коллективное предпочтение $r = r(C)$ можно считать некоторой функцией от индивидуальных предпочтений: $r = \varphi(r(f) :\ f$ пробегает набор $C)$. На первый взгляд такое предположение кажется естественным, но именно оно является источником дальнейших противоречий. Оказалось, что коллективное предпочтение не может быть универсальным правилом, оно зависит от конкретных вариантов x, y и от предпочтений $r(f)$. Иными словами, правило φ не может быть универсальным, оно должно быть локальным.

Вообще, исторически можно выделить три направления, приводящие к комитетным конструкциям:

1) от обобщения понятия решения, это началось с метода наименьших квадратов, потом были работы Чебышева по приближённым решениям систем линейных неравенств (приложения - в теории механизмов), затем работы Черникова и Ерёмина по теории чебышевских приближений для несовместных систем линейных неравенств и, наконец, метод комитетов для таких систем;

2) от методов обучения нейронных сетей: у Розенблатта были персептроны с обучением в одном слое, что обеспечивало решение узкого класса задач, сводимых к линейному разделению конечных множеств; у Нильсона уже были эвристические методы обучения нейросетей в двух слоях, а затем метод комитетов позволил получить точные результаты и обоснованные процедуры обучения, которые позволяют решать широкий класс задач, сводимых к разделению конечных множеств с единственным требованием непустоты их пересечения.

3) третье направление связано с процедурами голосования.

В сфере голосования ситуация крайне сложна, и здесь на каждом шагу встречаются парадоксы. Известно, что противоречий удаётся избежать в случае, когда решение задачи выбора сведено к серии задач классификации, и в этом случае метод комитетов даёт хорошие результаты. Методу комитетов отвечает трёхслойная нейронная сеть, и из теорем существования комитетов следует, что такую сеть можно обучить по прецедентам решению любой задачи, если оно выражается словом в каком-либо конечном алфавите. Декомпозиция и распараллеливание задач — это важные процедуры, которые могут осуществляться как некоторые из основных функций методов распознавания и методов нейронных систем. Один из методов обучения нейронных систем — метод комитетов — по существу ориентирован на распараллеливание обработки данных и знаний, что видно из самого определения комитета: если задача может быть несовместной, то комитет как обобщение понятия решения есть такой набор элементов, что каждому условию задачи удовлетворяют более половины этих элементов, т.е. за удовлетворение каждого условия задачи голосует большинство членов комитета [1]. При этом каждый представитель комитета отвечает за свою часть решаемой задачи. Рассмотрим возможности декомпозиции для достаточно широкого класса задач. А именно рассмотрим декомпозицию для класса задач, сводимых к задаче $DA(A, B, F)$, т.е. к следующей задаче дискриминантного анализа: найти функцию f из функционального класса F, разделяющую множества A, B так, что

$$f(x) > 0 \text{ для } x \in A, \quad f(x) < 0 \text{ для } x \in B. \tag{1}$$

Это означает, например, что A — множество условий задачи Z, при которых ответ должен быть «Да», а B — множество условий, при которых ответ — «Нет». Класс задач Z, сводимых к (1), весьма широк: это задачи, условия которых параметризуемы, а ответ кодируется конечной дискретной последовательностью. В свою очередь система (1) сводится к линейным неравенствам в том общем случае, когда F — линейное пространство или выпуклое многогранное множество в линейном пространстве. Класс задач Z, сводимых к (1), становится еще более широким, если ослабить требование поиска функции f и искать разделяющий комитет. Разделяющим комитетом называется набор $C = [f_1, \ldots, f_q]$ такой, что каждому неравенству системы (1) удовлетворяют более половины функций из C. Итак, декомпозиция задачи Z сведена к декомпозиции задачи дискриминантного анализа. Если множества A и B достаточно велики по объему, то могут понадобиться последовательные декомпозиции

$$A = A_1 \cup A_2,\ B = B_1 \cup B_2,\ \ldots,\ A_i = A_{i_1} \cup A_{i_2},\ B_i = B_{i_1} \cup B_{i_2} \ldots$$

и т.д.

3. Вычислительная сложность некоторых комбинаторных задач, связанных с комитетными алгоритмами распознавания

С конца 80-х гг. прошлого столетия исследователей интересует вычислительная сложность задачи обучения оптимальной по тому или иному критерию нейронной сети. Особый интерес вызывают результаты, касающиеся оценок вычислительной сложности задачи обучения простейших сетей — классических персептронов, представляющих собой двуслойную сеть без скрытых слоев с q входными нейронами и одним выходным. Функция активации i-го нейрона имеет классическую форму:

$$f^i(a) = \begin{cases} \ \ 1, & (\beta^i, a) + \gamma^i > 0, \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, персептрон реализует решающее правило

$$F(z \,|\, (\beta^1, \gamma^1), \ldots, (\beta^{q+1}, \gamma^{q+1})) : \mathbb{Q}^n \to \{-1, 1\}.$$

Задавшись выборкой $(a_1, a_2, \ldots, a_{m_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{m_2})$, в которой $a_i \in A$, $b_j \in B$ и конечные множества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$ составлены из представителей, соответственно, 1-го и 2-го классов, можно поставить задачу обучения персептрона, т.е. подбора значений параметров β и γ так, чтобы

$$\begin{aligned} F(a_i) &= \ \ 1 \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, m_1\} = \mathbb{N}_{m_1}), \\ F(b_j) &= -1 \qquad (j \in \mathbb{N}_{m_2}). \end{aligned}$$

«Обученный» персептрон, параметры которого настроены в результате успешного решения задачи обучения, принято называть *корректным.* С процедурой обучения связаны постановки двух комбинаторных задач.

Задача 1. «ОБУЧАЕМОСТЬ» [5]. *Заданы натуральное число q и выборка $(a_1, a_2, \ldots, a_{m_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{m_2})$. Существует ли корректный персептрон с не более чем q входными нейронами?*

Задача 2. «ОПТИМАЛЬНЫЙ КОРРЕКТНЫЙ ПЕРСЕПТРОН» [6]. *Задана выборка $(a_1, a_2, \ldots, a_{m_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{m_2})$. Требуется определить параметры корректного персептрона с наименьшим возможным числом q.*

Известно [7], что задача ОБУЧАЕМОСТЬ в общем случае NP-полна и остается такой при $q = 2$ (в то время как при $q = 1$ задача полиномиально разрешима), а задача ОПТИМАЛЬНЫЙ КОРРЕКТНЫЙ ПЕРСЕПТРОН NP-трудна [6]. Доказательство труднорешаемости обеих задач было в свое время получено в качестве следствия теоремы об NP-полноте задачи "Quadrant" [7]. Известны [6] аналогичные результаты, обосновывающие труднорешаемость задач обучения нейронных сетей с более сложной архитектурой, также опирающиеся на этот результат.

В данной работе показано, что задача обучения персептрона остается труднорешаемой даже при наложении достаточно сильных дополнительных ограничений на его архитектуру. Рассматривается задача обучения в классе персептронов, у которых q нечетно, а параметры выходного нейрона фиксированы: $\beta = [1, 1, \dots, 1]^T$ и $\gamma = 0$, что соответствует голосованию согласно правилу простого большинства. Вопросы обучения таких сетей удобно формулировать в терминах так называемых *аффинных разделяющих комитетов* и *комитетных решений* подходящих систем линейных неравенств.

Определение 1 [8]. *Аффинным разделяющим комитетом для множеств* $A, B \subset \mathbb{Q}^n$ *называется конечная последовательность* $Q = (f^1, \dots, f^q)$ *функций* $f^i(z) = \operatorname{sign}((\beta^i, z) + \gamma^i)$ *такая, что*

$$\sum_{i=1}^{q} f^i(a) \geqslant 1 \quad (a \in A),$$
$$\sum_{i=1}^{q} f^i(b) \leqslant -1 \quad (b \in B).$$

Понятие аффинного разделяющего комитета тесно связано с понятием комитетного решения системы линейных неравенств.

Определение 2 [4]. *Последовательность* $Q' = (x^1, \dots, x^q)$, $x^i \in \mathbb{Q}^n$, *называется комитетным решением системы неравенств*

$$(a_j, x) > b_j \quad (i \in \mathbb{N}_m), \tag{2}$$

если справедливо условие

$$\bigl|\{i \in \mathbb{N}_q \,|\, (a_j, x^i) > b_j\}\bigr| > \frac{q}{2} \quad (j \in \mathbb{N}_m).$$

Видно, что последовательность $Q = (f^1, \dots, f^q)$ является аффинным разделяющим комитетом множеств A и B тогда и только тогда, когда последовательность $Q' = ((\beta^1, \gamma^1), \dots, (\beta^q, \gamma^q))$ является комитетным решением системы неравенств

$$\begin{cases} (\beta, a) + \gamma > 0 & (a \in A), \\ (\beta, b) + \gamma < 0 & (b \in B) \end{cases}$$

и определяет веса входного слоя соответствующего корректного персептрона. Известно [9], что задача MCLE поиска комитетного решения системы (2) с наименьшим возможным числом элементов (минимального комитета) NP-трудна.

Ниже показано, что

— задача проверки, существует ли для заданных множеств A и B аффинный разделяющий комитет из трех элементов (3-ASC), NP-полна;

— задача построения минимального по числу элементов аффинного разделяющего комитета для множеств A и B (MASC) NP-трудна и не принадлежит классу Apx.

Рассмотрим следующую комбинаторную задачу.

З а д а ч а 3. *«АФФИННЫЙ РАЗДЕЛЯЮЩИЙ КОМИТЕТ ИЗ 3-Х ЭЛЕМЕНТОВ* (3-ASC)*» Заданы множества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$. Существует ли аффинный разделяющий комитет из трех элементов для этих множеств?*

Т е о р е м а 1. *Задача* 3-ASC *NP-полна.*

При доказательстве теоремы используется техника полиномиальной сводимости к задаче 3-ASC известной NP-полной задачи о раскраске графа в 3 цвета.

З а д а ч а 4. *«РАСКРАСКА ГРАФА В 3 ЦВЕТА* (3-COLORABILITY)*»*
Задан конечный граф $G = (V, E)$. Раскрашиваем ли он в 3 цвета, другими словами, существует ли функция $\varphi : V \to \{1, 2, 3\}$ такая, что для произвольных $u, v \in V$, $(\{u, v\} \in E) \ \Rightarrow \ (\varphi(u) \neq \varphi(v))$?

Показано, что конечному графу G за полиномиальное время (от длины его записи) могут быть сопоставлены множества точек $A = A(G)$ и $B = B(G)$ так, что граф может быть раскрашен в три цвета тогда и только тогда, когда для построенных множеств существует разделяющий комитет из трех элементов.

П р и м е р 1. Графу $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ сопоставим (Рис. 1) подмножества $A, B \subset \mathbb{Q}^3$

$$\begin{aligned} A &= \{[2, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 2]\}, \\ B &= \{[1, 1, 0], [1, 0, 1], [0, 1, 1]\} \end{aligned} \tag{3}$$

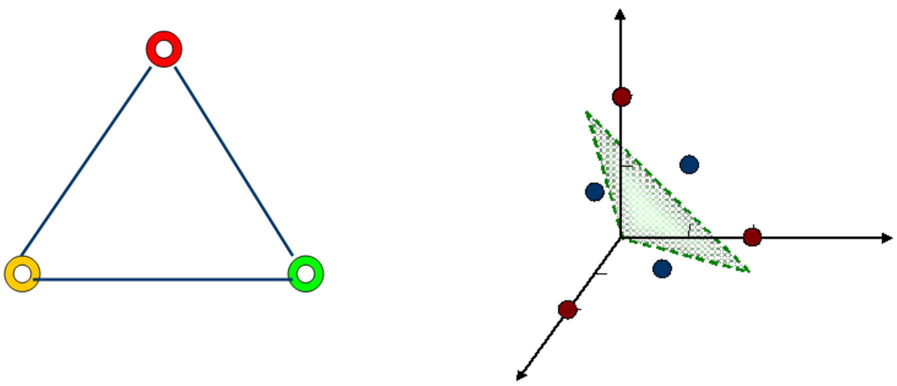

Рис. 1. Пример сведения задачи 3-COLORABILITY к задаче 3-ASC.

Множества (3) разделимы комитетом (f^1, f^2, f^3), где

$$\begin{array}{rcrcrcr} f^1(x) & = & -2x_1 & + & x_2 & + & x_3, \\ f^2(x) & = & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3, \\ f^3(x) & = & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3, \end{array}$$

индуцирующим раскраску G в три цвета.

З а м е ч а н и е 1. Нетрудно убедиться в том, что задача 3-ASC остается NP-полной, если ограничиться рассмотрением множеств $A \cup B \subset \{z \in \{0,1,2\}^n : |z| \leqslant 2\}$.

Перейдем к рассмотрению задачи об обучении в классе аффинных разделяющих комитетов, заданную в оптимизационной постановке.

З а д а ч а 5. «МИНИМАЛЬНЫЙ ПО ЧИСЛУ ЭЛЕМЕНТОВ АФФИННЫЙ РАЗДЕЛЯЮЩИЙ КОМИТЕТ (MASC)*» Заданы множества* $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2})$, *причем* $A \cap B = \emptyset$. *Требуется построить аффинный разделяющий комитет для множеств* A *и* B *с наименьшим числом элементов.*

Т е о р е м а 2. Задача MASC NP*-трудна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения теоремы следует из теоремы 1 ввиду легко проверяемой полиномиальной сводимости (по Тьюрингу) задачи 3-ASC к задаче MASC.

Традиционный подход к исследованию NP-трудных задач предполагает рассмотрение полиномиально разрешимых подклассов NP-трудной задачи, анализ аппроксимационных свойств задачи и разработку приближенных алгоритмов.

Как обычно, приближенным алгоритмом (с точностью аппроксимации r) для задачи комбинаторной минимизации назовем алгоритм, позволяющий для каждой ее конкретной постановки

$$f^* = \min\{f(x) \,|\, x \in M\}$$

за полиномиальное время находить допустимое решение $x_{app} \in M$ с условием

$$\frac{f(x_{app})}{f^*} \leqslant r.$$

Класс Apx составляют задачи комбинаторной оптимизации, обладающие приближенным алгоритмом с фиксированной точностью r. Многие NP-трудные задачи, например задача коммивояжера (TSP), принадлежат этому классу. К сожалению, известны и примеры задач, не принадлежащих этому классу. Вероятно, наиболее известной среди таких задач является задача о наибольшей клике (CLIQUE), для которой показано [10], что для произвольного $\varepsilon > 0$ не существует полиномиального приближенного алгоритма с точностью аппроксимации $n^{1-\varepsilon}$. Убедимся, что описанная выше задача MASC также не может быть решена приближенно ни с какой фиксированной точностью.

Т е о р е м а 3. Задача MASC *не принадлежит классу* Apx.

В доказательстве теоремы обосновывается сводимость по Тьюрингу к задаче MASC задачи раскраски однородного двуцветного гиперграфа.

З а д а ч а 6. «РАСКРАСКА 3-ОДНОРОДНОГО 2-ЦВЕТНОГО ГИПЕРГРАФА В k *ЦВЕТОВ* (3-UHC)*». Заданы конечный однородный гиперграф* $\Gamma = (V, H)$, $|h| = 3, h \in H$ *и натуральное число* $k \geqslant 3$. *Известно, что* Γ *раскрашиваем в 2 цвета. Требуется указать раскраску гиперграфа* Γ *в* k *цветов, т.е. такую функцию* $\varphi : V \to \mathbb{N}_k$, *что*

$$(\{u, v, w\} \in H) \Rightarrow (|\{\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)\}| > 1).$$

Известно [11], что задача 3-UHC NP-трудна и остается NP-трудной при произвольном фиксированном $k \geqslant 3$.

Заметим, что наиболее точный [12] из известных приближенных алгоритмов для задачи MASC имеет, вообще говоря, точность $O(m)$, хотя известен нетривиальный подкласс этой задачи, в котором алгоритм является точным.

4. Заключение

Приведенные в работе результаты свидетельствуют о труднорешаемости в общем случае задач оптимального обучения распознаванию в классе аффинных разделяющих комитетов. Однако вопрос оценки труднорешаемости частных случаев этих задач при некоторых дополнительных ограничениях до сих пор остается открытым. Речь идет, например, об оценке вычислительной сложности этих задач при фиксированной размерности исходного пространства и некоторых других, важных для конкретных приложений случаев. Авторы надеются, что ответы на эти вопросы удастся получить в ближайшее время.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1.

1. Задача 3-ASC, очевидно, принадлежит классу NP, поскольку проверка того, что заданная последовательность функций $Q = (f^1, f^2, f^3)$ является аффинным разделяющим комитетом множеств A и B, может быть произведена за полиномиальное время от размера записи условия задачи.

2. Для обоснования NP-полноты докажем полиномиальную сводимость к задаче 3-ASC задачи 3-COLORABILITY. В самом деле, пусть задан граф $G = (V, E)$, определяющий условие задачи 3-COLORABILITY. Без ограничения общности, можем полагать, что $V = \mathbb{N}_n$. Сопоставим графу G множества A и B в $\mathbb{Q}^n$ следующим образом:

$$\text{(П.1)}\qquad \begin{array}{l} A = \{2e^i\}_{i=1}^n, \\ B = \{e^i + e^j \mid \{i,j\} \in E\} \end{array} \qquad \text{где } e^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

и покажем, что графа раскрашиваем в три цвета тогда и только тогда, когда для множеств A и B существует аффинный разделяющий комитет из трех элементов, т.е. найдутся пары $(x^1, y^1), (x^2, y^2)$ и (x^3, y^3) такие, что последовательность $Q = ((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^3, y^3))$ — комитетное решение системы неравенств

$$\text{(П.2)}\qquad \begin{cases} 2x_i + y < 0 & (i \in V), \\ x_i + x_j + y > 0 & (\{i,j\} \in E). \end{cases}$$

Пусть разбиение $V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup V_3$ задает раскраску графа G в три цвета. Легко проверить, что последовательность $((x^1, 0), (x^2, 0), (x^3, 0))$, в которой

$$x^i_k = \begin{cases} 2, & k \in V_i, \\ -1, & k \notin V_i, \end{cases} \qquad (i \in \mathbb{N}_3)$$

является комитетным решением системы (П.2).

С другой стороны, пусть $Q = ((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^3, y^3))$ — произвольное комитетное решение системы (П.2). Введем обозначения:

$$V_k = \{i \in V \mid 2x_i^p + y^p < 0 \ (p \in \mathbb{N}_3 \setminus \{k\})\} \quad (k \in \mathbb{N}_3).$$

Так как Q — комитетное решение системы (П.2), справедливо равенство $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V$. Без ограничения общности можем полагать, что $V_k \neq \emptyset$ и $V_{k_1} \cap V_{k_2} = \emptyset$ для произвольных k и $k_1 \neq k_2$ из $\mathbb{N}_3$. Построенное разбиение задает искомую раскраску графа G. В самом деле, допустим от противного, что ребро $\{i, j\} \subset V_1$ (случаи с V_2 и V_3 могут быть рассмотрены по аналогии). По построению множества V_1 справедливы неравенства

$$2x_i^2 + y^2 < 0, \quad 2x_i^3 + y^3 < 0,$$
$$2x_j^2 + y^2 < 0, \quad 2x_j^3 + y^3 < 0,$$

следовательно, и

$$x_i^2 + x_j^2 + y^2 < 0 \quad \text{и} \quad x_i^3 + x_j^3 + y^3 < 0,$$

в то время как с необходимостью, в силу того что Q — комитетное решение системы (П.2), справедливо хотя бы одно из неравенств:

$$x_i^2 + x_j^2 + y^2 > 0 \quad \text{или} \quad x_i^3 + x_j^3 + y^3 > 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что задача 3-UHC при $k = \binom{2s+1}{s+1}$ для произвольного натурального s сводится по Тьюрингу к задаче поиска аффинного разделяющего комитета из $2s+1$ элемента для подходящих множеств. В самом деле, пусть заданы однородный гиперграф $\Gamma = (V, H)$, в котором $V = \mathbb{N}_n, H \neq \emptyset$ и $|h| = 3$ для каждого ребра $h \in H$ и число $s \in \mathbb{N}$. Пусть разбиение $V_1 \dot\cup V_2 = V$ определяет раскраску Γ в 2 цвета. Требуется указать раскраску Γ в $\binom{2s+1}{s+1}$ цветов. Аналогично доказательству теоремы 1, сопоставим гиперграфу Γ такие подмножества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, что

$$A = \{3e^i\}_{i=1}^n, \qquad \text{где } e_j^i = \delta_{ij},$$
$$B = \{e^i + e^j + e^k \mid \{i, j, k\} \in H\}$$

и систему неравенств

$$\text{(П.3)} \qquad \left\{ \begin{array}{rll} 3x_i + y & < 0 & (i \in V), \\ x_i + x_j + x_k + y & > 0 & (\{i, j, k\} \in H). \end{array} \right.$$

Очевидно, эти построения могут быть проведены за полиномиальное время от размера записи Γ. Убедимся в справедливости следующих предложений.

(a) Система (П.3) несовместна и обладает комитетным решением из трех элементов.

(b) Произвольное комитетное решение $Q = ((x^1, y^1), \ldots, (x^{2s+1}, y^{2s+1}))$ системы (П.3) индуцирует раскраску гиперграфа Γ в $\binom{2s+1}{s+1}$ цветов.

(a). Поскольку $H \neq \emptyset$, система (П.3) несовместна по теореме Карвера. Далее, нетрудно убедиться, что последовательность $((x^1, 0), (x^2, 0), (x^3, 0))$, в которой

$$x_i^1 = \begin{cases} -1, & i \in V_1, \\ 3, & i \in V_2, \end{cases} \quad x_i^2 = \begin{cases} 3, & i \in V_1, \\ -1, & i \in V_2, \end{cases} \quad \text{и} \ \ x^3 = [-1, -1, \ldots, -1]^{\mathrm{T}},$$

является ее комитетным решением. В самом деле, неравенству $3x_i + y < 0$ при произвольном $i \in V_1$ (случай V_2 может быть рассмотрен по аналогии) удовлетворяют $(x^1, 0)$ и $(x^3, 0)$, а произвольному неравенству $x_i + x_j + x_k + y > 0$ удовлетворяют $(x^1, 0)$ и $(x^2, 0)$.

(b). Пусть $Q = ((x^1, y^1), \ldots, (x^{2s+1}, y^{2s+1}))$ — комитетное решение системы (П.3). Каждому подмножеству $P \subset \mathbb{N}_{2s+1}$, $|P| = s + 1$ сопоставим множество

$$V_P = \{i \in V \mid 3x_i^p + y^p < 0 \ (p \in P)\}.$$

Через $\mathcal{P}$ обозначим множество $\{P \subset \mathbb{N}_{2s+1} \ : \ |P| = 2s+1\}$. По построению, $|\mathcal{P}| = \binom{2s+1}{s+1}$ и $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} V_P = V$. Без ограничения общности, полагаем, что $V_P \neq \emptyset$ для каждого $P \in \mathcal{P}$ и $(P_1 \neq P_2) \Rightarrow (V_{P_1} \cap V_{P_2} = \emptyset)$. Разбиение

$$V_{P_1} \dot{\cup} V_{P_2} \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} V_{P_{\binom{2s+1}{s+1}}} = V$$

задает искомую раскраску гиперграфа Г. В самом деле, предположим от противного, что ребро $\{i, j, k\} \subset V_P$ для некоторого $P \in \mathcal{P}$. По выбору ребра, справедливы неравенства:

$$\begin{cases} 3x_i^p + y^p < 0, \\ 3x_j^p + y^p < 0, & (p \in P), \\ 3x_k^p + y^p < 0 \end{cases}$$

следовательно,

$$x_i^p + x_j^p + x_k^p + y^p < 0 \quad (p \in P).$$

С другой стороны, поскольку Q — комитетное решение системы (П.3), с необходимостью найдется номер $p_0 \in P$ такой, что $x_i^{p_0} + x_j^{p_0} + x_k^{p_0} + y^{p_0} > 0$. Найденное противоречие подтверждает корректность раскраски.

Предположим от противного, что задача MASC принадлежит классу Apx и существует полиномиальный приближенный алгоритм с фиксированной оценкой точности r. Тогда, с учетом п. (a), алгоритм построит комитетное решение системы (П.3), соответствующей гиперграфу Г, состоящее из $2s + 1$ элемента, где $2s + 1 \leqslant 3r$, указав тем самым (согласно п. (b)) раскраску гиперграфа в $\binom{2s+1}{s+1}$ цветов. Найденное противоречие завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мазуров Вл.Д.* О комитете системы выпуклых неравенств // Тр. Междунар. конгресса мат. М.: МГУ. 1966. №14. С.41.

2. *Мазуров Вл.Д.* Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. М.: Наука, 1990.

3. *Mazurov Vl.D.* Consistent completion of systems of algorithms to committee technologies // Pattern Recognit. and Image Anal. 1998. V. 8. No. 4. P. 501–506.

4. *Ablow C.M., Kaylor D.J.* Inconsistent Homogeneous Linear Inequalities // Bull. Amer. Math. Soc., 1965. V. 71, No. 5. P. 724.

5. *Judd J.S.* Neural Network Design and Complexity of Learning. N.Y.: MIT Press, 1990.

6. *Lin J.H., Vitter J.S.* Complexity Results on Learning by Neural Nets // Machine Learning. 1991. V. 6. P. 211–230.

7. *Blum A.L., Rivest R.L.* Training a 3-node Neural Network is NP-complete // Neural Networks. 1992. V.5, P. 117–127.

8. *Мазуров Вл.Д.* Комитеты систем неравенств и задача распознавания // Кибернетика. 1971. №3. С. 140–146.

9. *Хачай М.Ю.* О вычислительной сложности задачи о минимальном комитете и смежных задач // ДАН. 2006. Т. 406. №6. С. 742–745.

10. *Hastad J.* Clique is hard to approximate within $n^{1-\varepsilon}$ // Acta Mathematica. 1999. V. 182, No. 13. P. 105–142.

11. *Dinur I., Regev O. and Smyth C.* The hardness of 3-uniform hypergraph coloring. // Proc. 43rd Ann. IEEE Sympos. on Foundat. of Comput. Sci., November 2002.

12. *Хачай М.Ю.* О вычислительной и аппроксимационной сложности задачи о минимальном разделяющем комитете // Таврич. вест. информатики и мат. 2006. №1. С. 34–43.