ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ, РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ И АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С КОМИТЕТНОЙ ОТДЕЛИМОСТЬЮ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

М.Ю. Хачай
Институт математики и механики УрО РАН

Аннотация

В работах [1, 2] получены результаты по вычислительной и аппроксимационной сложности задачи *MASC* о минимальном аффинном разделяющем комитете для конечных множеств $A, B \subset \mathbb{Q}^n$. В частности, показано, что эта задача *NP* трудна и не принадлежит классу *Apx* (в предположении, что $P \neq NP$). Тем не менее, открытыми оставались вопросы получения оценок порога ее эффективной аппроксимируемости и оценки вычислительной сложности ряда важных для приложений частных случаев задачи, получаемых наложением дополнительных ограничений, например, фиксации размерности пространства. В настоящей статье приводится нижняя оценка порога полиномиальной аппроксимируемости задачи в общем случае и обосновывается труднорешаемость задачи в пространствах фиксированной размерности, большей единицы. В частности, показывается, что задача о комитетной отделимости остается труднорешаемой, даже будучи сформулированной на плоскости (т. е. в наиболее простом нетривиальном случае). Справедливость этого факта следует из полиномиальной сводимости к исследуемой задаче известной задачи *PC* о покрытии прямыми конечного множества на плоскости, труднорешаемость которой доказана [3]. Методика сведения представляет собой модификацию методики, описанной в [4], использовавшейся в этой работе для обоснования труднорешаемости задачи о кусочно-линейной отделимости конечных множеств на плоскости.

Введение

Вычислительная сложность комбинаторных задач, связанных с построением оптимальных процедур обучения распознаванию образов, интересует исследователей с 80 гг. прошлого столетия. К сожалению, подавляющее большинство этих задач – труднорешаемы. Поэтому поиск их полиномиально разрешимых подклассов исследуемых задач (равно как и обоснование их труднорешаемости), а также разработка полиномиальных приближенных алгоритмов их решения, несомненно, остаются актуальными и в настоящее время. Исследуемая в данной работе задача о минимальном по числу элементов разделяющем комитете для конечных множеств (*MASC*) тесно связана одновременно с задачей обучения простейшего классического персептрона и задачей о полиэдральной отделимости множеств, являясь, по сути, частным случаем обеих задач.

Классическим персептроном обычно называется 2-слойная нейронная сеть без скрытых слоев, с q входами и одним выходом. Функция активации i-го нейрона

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & c_i^{\mathrm{T}} x - d_i > 0, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

Фактически, персептрон реализует отображение

$F(x \mid (c_1, d_1), \ldots, (c_{q+1}, d_{q+1})) : \mathbb{Q}^n \to \{-1, 1\}$, определяемое параметрами $(c_1, d_1), \ldots, (c_{q+1}, d_{q+1})$. Персептрон F называется *корректным* на выборке

$$(a_1, \ldots, a_{m_1}, b_1, \ldots, b_{m_2}), \tag{2}$$

если

$$F(a_i) = 1 \quad (i \in \{1, \ldots, m_1\} = \mathbb{N}_{m_1}),$$
$$F(b_j) = -1 \quad (j \in \mathbb{N}_{m_2}).$$

С процедурой обучения (настройки весов сети по заданной выборке) связано несколько комбинаторных задач.

Задача «Обучение (загрузка) персептрона)». Заданы натуральное число q и выборка (2). Существует ли корректный на выборке персептрон с не более чем q входными нейронами?

Задача «Оптимальный корректный персептрон» (*OCP*). Задана обучающая выборка (2). Требуется определить параметры корректного на данной выборке персептрона с наименьшим числом входов.

Известны следующие результаты.

Теорема 1 [5]. Задача обучения персептрона *NP*-полна и остается таковой при произвольном фиксированном $q \geq 2$.

Теорема 2 [6]. Задача *OCP NP* трудна.

Как будет показано ниже, задача о минимальном аффинном разделяющем комитете является частным случаем задачи *OCP*, в котором параметры выходного нейрона – фиксированы $c_{q+1} = [1,\ldots,1]^{\mathrm{T}}$ и $d_{q+1} = 0$, что соответствует правилу голосования согласно правилу простого большинства.

Другие задачи, специализацией которых является задача о минимальном комитете, относятся к вычислительной геометрии и связаны с построением оптимальных кусочно-линейных разделяющих поверхностей для множеств с пересекающимися выпуклыми оболочками. Приведем их возможные формулировки, следуя [4]. Каждой гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$, $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^{\mathrm{T}}x = d\}$ сопоставим предикат $\Pi[H] : \mathbb{R}^n \to \{true,\ false\}$ по правилу, аналогичному (1):

$$\Pi(H)[x] = \begin{cases} true, & c^{\mathrm{T}}x - d > 0, \\ false, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Зададимся множествами A и B и булевой формулой $\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_k)$. Будем говорить, что гиперплоскости $H_1,\ldots,H_k$ разделяют множества A и B по формуле (правилу) φ, если

$$\begin{aligned} &\varphi(\Pi[H_1](a),\ldots,\Pi[H_k](a)) = true \quad (a \in A), \\ &\varphi(\Pi[H_1](b),\ldots,\Pi[H_k](b)) = false \quad (b \in B). \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим следующие комбинаторные задачи.

Задача «k-полиэдральная отделимость при заданной булевой формуле». Заданы конечные множества $A = \{a_1,\ldots,a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1,\ldots,b_{m_2}\}$, число $k \in \mathbb{N}$ и булева формула $\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_k)$. Существуют ли гиперплоскости $H_1,\ldots,H_k$, разделяющие множества A и B по формуле φ?

В случае, когда формула (логика) разделения φ заранее неизвестна, может быть сформулирована более общая задача.

Задача «(свободная) k-полиэдральная отделимость». Заданы конечные множества $A = \{a_1,\ldots,a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1,\ldots,b_{m_2}\}$ и число $k \in \mathbb{N}$. Существуют ли гиперплоскости $H_1,\ldots,H_k$, разделяющие множества A и B по правилу: для каждой пары (a,b), $a \in A,\ b \in B$, найдется такой номер

$$j = j(a,b),$$

что $\Pi\left[H_{j(a,b)}\right](a) = true$ и $\Pi\left[H_{j(a,b)}\right](b) = false.$

Как показано в [4], последняя задача имеет положительный ответ тогда и только тогда, когда существует подходящая формула φ, при которой предыдущая задача также обладает положительным ответом (для тех же множеств).

Результат проведенного в работе [4] исследования вычислительной сложности сформулированных выше задач приведен в следующей теореме.

Теорема 3 [4].

1. Обе задачи *NP*-полны и остаются труднорешаемыми при произвольном фиксированном $k \geq 2$.
2. Задача о свободной отделимости остается *NP*-полной при произвольном фиксированном $n > 1$.
3. Задача о свободной отделимости при произвольных фиксированных k и n полиномиально разрешима.

Как станет ясно ниже, задача о минимальном комитете является частным случаем оптимизационного варианта задачи о k-полиэдральной отделимости при заданной булевой формуле (принимающей значение *true* тогда и только тогда, когда большинство ее аргументов также принимает значение *true*).

К сожалению, задача *MASC*, как и описанные выше более общие задачи, труднорешаема [1-2]. В данной работе обсуждается несколько новых результатов, касающихся вычислительной сложности и аппроксимируемости задачи *MASC* и ее специальных случаев.

1. Задача о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC)

Определение. Конечная последовательность функций $Q = (f_1,\ldots,f_q)$, $f_i(x) = c_i^{\mathrm{T}}x - d_i$ называется аффинным комитетом, разделяющим множества $A, B \subset \mathbb{R}^n$, если выполнено условие

$$\left|\left\{i \in \mathbb{N}_q : f_i(a) > 0\right\}\right| > \frac{q}{2} \quad (a \in A),$$

$$\left|\left\{i \in \mathbb{N}_q : f_i(b) < 0\right\}\right| > \frac{q}{2} \quad (b \in B).$$

Число q называется числом элементов (членов) комитета Q.

По критерию Мазурова [7] множества A и B отделимы аффинным комитетом тогда и только тогда, когда $A \cap B = \varnothing$. Однако по ряду причин особый интерес представляют разделяющие комитеты с наименьшим числом элементов, называемые *минимальными*.

Задача «Минимальный аффинный разделяющий комитет» (*MASC*). Заданы множества $A = \{a_1,\ldots,a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1,\ldots,b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^n$. Требуется указать аффинный комитет с наименьшим числом элементов, разделяющий множества A и B.

Следующее утверждение характеризует вычислительную сложность задачи в общем случае.

Теорема 4 [1-2]. Задача *MASC* – *NP*-трудна и остается труднорешаемой при дополнительном условии $A \cup B \subset \left\{x \in \{0,1,2\}^n : \|x\|_2 \leq 2\right\}$.

Традиционный подход к исследованию *NP*-трудных задач комбинаторной оптимизации предполагает, в частности, разработку полиномиальных приближенных алгоритмов решения задачи *MASC*. В работе [2] описан один приближенный алгоритм решения данной задачи, обладающий точностью $O\left(m/n\right)$, и доказана следующая теорема.

Теорема 5 [2]. Задача *MASC* не принадлежит классу *Apx* (задач комбинаторной оптимизации, обладающих полиномиальными алгоритмами с постоянной точностью), если $P \neq NP$.

Следующий раздел настоящей статьи посвящен обоснованию нового результата, уточняющего результат Теоремы 5.

2. Аппроксимируемость задачи MASC

Результат данного раздела, как и Теорема 5 базируется на полиномиальной сводимости к задаче *MASC* известной *NP*-трудной задачи о раскраске 2-цветного 3-однородного гиперграфа в k цветов. Как показано в [9], данная задача остается трудно-решаемой при произвольном фиксированном $k \geq 3$.

Теорема 6. *Если* $NP \not\subset DTIME(2^{poly(\log(n))})$, *задача MASC не обладает полиномиальными приближенными алгоритмами с точностью*

$O(\log\log\log m)$.

Доказательство. Пусть условие частной задачи о раскраске задается конечным гиперграфом $\Gamma = (\mathbb{N}_n, H)$, в котором $H \neq \varnothing$ и $|h| = 3$ для каждого $h \in H$. По условию, гиперграф Γ – двуцветный, т. е. существует такая функция $\varphi_0 : \mathbb{N}_n \to \{1,2\}$, что

$$(\forall h \in H) \Rightarrow \left(\left|\varphi_0(h)\right| > 1\right).$$

Другими словами, существует такое разбиение $V_1 \dot\cup V_2 = \mathbb{N}_n$, что

$$(\forall h \in H) \Rightarrow (h \cap V_1 \neq \varnothing) \wedge (h \cap V_2 \neq \varnothing).$$

К сожалению, ни множества V_1 и V_2, ни отображение φ_0 не заданы. Требуется указать раскраску $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_k$ гиперграфа Γ с некоторым фиксированным k.

По аналогии с методикой, описанной в работе [2], сопоставим данной частной задаче о раскраске подходящую частную задачу *MASC*, для чего зададимся множествами $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, определяемыми по правилу:

$$A = \left\{3e_i \mid i \in \mathbb{N}_n\right\},$$

$$B = \left\{e_i + e_j + e_k \mid \{i,j,k\} \in H\right\}.$$

Здесь, как обычно, e_i используется для обозначения i-го единичного орта. Нетрудно убедиться в том, что

1) $\mathrm{conv}(A) \cap \mathrm{conv}(B) \neq \varnothing$, следовательно, множества A и B не могут быть разделены гиперплоскостью, и минимальный аффинный разделяющий (эти множества) комитет содержит более одного элемента;

2) множества A и B отделимы комитетом из трех элементов. В самом деле, определим линейные функции $f_i(x) = c_i^{\mathrm{T}} x$, задав координаты векторов c_i правилом:

$$c_{1j} = \begin{cases} 1, & j \in V_1, \\ -3, & j \in V_2, \end{cases} \quad c_{2j} = \begin{cases} 1, & j \in V_2, \\ -3, & j \in V_1, \end{cases}$$

$$c_{3j} = 1, \quad j \in \mathbb{N}_n.$$

В силу следующих неравенств

$$f_1(3e_i) > 0 \ \ и \ \ f_3(3e_i) > 0 \qquad (i \in V_1),$$

$$f_2(3e_i) > 0 \ \ и \ \ f_3(3e_i) > 0 \qquad (i \in V_2),$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1\left(e_i + e_j + e_k\right) < 0 \\ f_2\left(e_i + e_j + e_k\right) < 0 \end{array}\right\} \quad \left(\{i,j,k\} \in H\right),$$

справедливых, по построению, последовательность $Q = (f_1, f_2, f_3)$ является искомым комитетом, разделяющим A и B.

Пусть далее $Q = (f_1, f_2, \ldots, f_{2s+1})$, $f_i(x) = c_i^{\mathrm{T}} x + d_i$ – произвольный комитет, разделяющий множества A и B. По теореме Мазурова [см., например, 8],

$$2s + 1 \leq |A \cup B| \leq \binom{n}{3} + n.$$

Убедимся в том, что комитет индуцирует раскраску исходного гиперграфа Γ в t цветов, где $1 \leq t \leq \min\left\{n, \binom{2s+1}{s+1}\right\}$. По определению, каждому номеру $j \in \mathbb{N}_n$ соответствует такое подмножество $I(j) \subset \mathbb{N}_{2s+1}$, $|I(j)| = s + 1$, что

$$f_i(3e_j) > 0 \quad (i \in I(j)).$$

Произведём последовательный перебор вершин Γ и построим разбиение $V_1 \dot\cup \ldots \dot\cup V_t = \mathbb{N}_n$, следуя следующему алгоритму.

Шаг 1. Положить $V_1 := \{1\}$, $t := 1$, $j := 1, k := 1$.

Шаг 2. Если $j = n$, СТОП, иначе продолжить.

Шаг 3. Положить $j := j + 1$.

Шаг 4. Если $I(j) = I(k)$, положить $V_t := V_t \cup \{j\}$ и вернуться на Шаг 3, в противном случае перейти на Шаг 5.

Шаг 5. Положить $t := t+1,\ k := j,\ V_t = \{j\}$. Перейти на Шаг 3.

Очевидно, данное построение (равно как и все описанные выше) может быть произведено за время, ограниченное сверху полиномом от n. Построенное в результате разбиение задает искомую раскраску (в t цветов). Для обоснования ее корректности убедимся в том, что множество H не содержит монохромных ребер. В самом деле, пусть, от противного, найдутся такие ребро $h \in H$ и номер $r \in \mathbb{N}_t$, что $h \subset V_r$. Без ограничения общности можно полагать $h = \{1,2,3\}$ и $r = 1$. Тогда, по построению, для произвольного $p \in I(1)$ справедливы неравенства

$$3c_p^{\mathrm{T}} e_l + d_p > 0 \quad (l = 1,2,3),$$

а, следовательно, и

$$c_p^{\mathrm{T}}(e_1 + e_2 + e_3) + d_p > 0.$$

С другой стороны, поскольку Q – разделяющий комитет для множеств A и B, с необходимостью найдется номер $p_0 \in I(1)$, для которого

$$c_{p_0}^{\mathrm{T}}(e_1 + e_2 + e_3) + d_{p_0} < 0.$$

Найденное противоречие подтверждает корректность раскраски.

Далее, пусть задача *MASC* обладает приближенным полиномиальным алгоритмом с точностью $r = r(m)$. Здесь, как обычно, r – натуральнозначная функция натурального аргумента – мощности множества $|A \cup B|$. Без ограничения общности можно полагать $r = 2\rho + 1$. Из п. 2 следует, что, результатом применения его к сформулированной выше частной задаче будет разделяющий комитет из не более чем $3r = 6\rho + 3$ элементов, что повлечет построение (за полиномиальное время) раскраски Γ в t цветов, где

$$t \le \min\left\{n, \binom{6\rho+3}{3\rho+2}\right\}.$$

Согласно [9], $t > C\sqrt[3]{\log\log n}$ при условии $NP \not\subset DTIME(2^{poly(\log(n))})$, откуда при том же условии имеем

$$\binom{6\rho+3}{3\rho+2} > C\sqrt[3]{\log\log n}.$$

Воспользовавшись известным асимптотическим представлением для наибольшего биномиального коэффициента $\binom{2k}{k} \sim \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}$, произведя несложные преобразования с учетом того, что в данном случае $m = O(n^3)$, получим искомое неравенство

$$\rho > D\log\log\log n = O(\log\log\log m).$$

Теорема доказана.

3. Труднорешаемость задачи MASC в пространствах фиксированной размерности

Известно, что многие *NP*-трудные в общем случае задачи комбинаторной оптимизации становятся полиномиально (или псевдополиномиально) разрешимыми при дополнительных ограничениях: при фиксации размерности пространства, числа ограничений и т. п. Например, общая задача целочисленного линейного программирования, сформулированная в пространстве фиксированной размерности – полиномиально разрешима.

Известно [см., например, 8], что задача *MASC*, заданная в одномерном пространстве также может быть решена за полиномиальное время. До настоящего времени открытым оставался вопрос о вычислительной сложности данной задачи в пространствах большей размерности. В данном разделе показывается, что задача *MASC* становится *NP*-трудной, будучи сформулированной в пространстве $\mathbb{Q}^n$ при произвольном фиксированном $n > 1$. Для обоснования этого факта, очевидно, достаточно показать труднорешаемость задачи на плоскости.

Задача о комитетной отделимости конечных множеств на плоскости (PASC). Заданы множества $A = \{a_1,\ldots,a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1,\ldots,b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^2$, и число $t \in \mathbb{N}$. Существует ли аффинный комитет Q, разделяющий множества A и B и состоящий из не более чем t элементов?

Нетрудно убедиться в том, что задача *PASC* принадлежит классу *NP*. Цель данного раздела состоит в обосновании полиномиальной сводимости к ней известной *NP*-полной задачи о покрытии конечного множества точек плоскости множеством прямых (*PC*) и, как следствие, принадлежности задачи *PASC* классу *NP*-полных задач.

Определение. Множество прямых $L = \{l_1,\ldots,l_s\}$, $l_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : c_j^{\mathrm{T}} x = d_j\}$, где $c_j \ne 0$, называется покрытием множества $P = \{p_1,\ldots,p_k\} \subset \mathbb{R}^2$, если для каждой точки $p \in P$ найдется прямая $l = l(p) \in L$ такая, что $p \in l$.

Задача о покрытии прямыми конечного множества на плоскости (*PC*). Заданы множество $P = \{p_1,\ldots,p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ и число $s \in \mathbb{N}$. Существует ли покрытие L множества P, по мощности не превосходящее s?

Теорема 7 [3]. Задача *PC NP*-полна в строгом смысле.

Договоримся использовать следующие обозначения: $B(x_0,\varepsilon)=\left\{x\in\mathbb{R}^2:\|x-x_0\|_2\le\varepsilon\right\}$ для круга с центром в x_0 и радиусом ε; $\mathrm{aff}(P)$ – для аффинной оболочки множества P и dim – размерности аффинного (линейного) многообразия. Для дальнейших построений нам потребуется следующее утверждение, приводимое ввиду его важности для дальнейших построений с доказательством.

Утверждение 1 [3].
Пусть заданы множество $P=\{p_1,\ldots,p_k\}\subset\mathbb{Z}^2$, число $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{1}{6(2\rho+1)}\right)$, где $\rho=\max\left\{\|p_j\|_2: j\in\mathbb{N}_k\right\}$, и непустое подмножество $J\in\mathbb{N}_k$. Для существования прямой $l=l(J)$ такой, что

$$B(p_j,\varepsilon)\cap l\ne\varnothing \quad (j\in J) \tag{4}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\dim\mathrm{aff}\{p_j: j\in J\}\le 1.$$

Доказательство. Утверждение, очевидно, справедливо при $|J|\le 2$, поэтому далее, без ограничения общности, полагаем $|J|\ge 3$. Достаточность может быть доказана непосредственной проверкой. Остановимся на доказательстве необходимости. Пусть l – произвольная прямая, удовлетворяющая условию (4) для некоторого J, и пусть, от противного, точки p_j не лежат на одной прямой. При нашем предположении, найдутся числа $j_1,j_2,j_3\in J$ (без ограничения общности, полагаем $j_1=1,\ldots,j_3=3$) такие, что $\dim\mathrm{aff}\{p_1,p_2,p_3\}=2$. По условию, существуют векторы $w_j=[\xi_j,\eta_j]^{\mathrm{T}}$ такие, что

$$p_j+w_j\in B(p_j,\varepsilon)\cap l \qquad (j=1,2,3).$$

Введя обозначение $p_j=[x_j,y_j]^{\mathrm{T}}$, имеем, по выбору w_j,

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1+\xi_1 & x_2+\xi_2 & x_3+\xi_3\\ y_1+\eta_1 & y_2+\eta_2 & y_3+\eta_3\end{vmatrix}=0.$$

С другой стороны,

$$|\Delta|\ge\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}-12\rho\varepsilon-6\varepsilon^2,$$

откуда, в силу целочисленности и неколлинеарности точек p_1,p_2 и p_3 и выбору ε,

$$|\Delta|\ge 1-12\rho\varepsilon-6\varepsilon>0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство необходимости условия и утверждения в целом.

Пусть далее условие частной задачи *PC* задается множеством $P=\{p_1,\ldots,p_k\}\subset\mathbb{Z}^2$ и числом $s\in\mathbb{N}$. Вычислим $\rho=\max\left\{\|p_j\|_2: j\in\mathbb{N}_k\right\}$, и положим $\varepsilon=\dfrac{1}{6(2\rho+1)+1}$. Зафиксируем вектор σ, $\|\sigma\|_2=1$ так, чтобы для любого $\{i,j\}\subset\mathbb{N}_k$ отрезки $[p_i-\varepsilon\sigma,p_i+\varepsilon\sigma]$ и $[p_j-\varepsilon\sigma,p_j+\varepsilon\sigma]$ не лежали на одной прямой.

Сопоставим исходной задаче *PC* частную задачу *PASC* с условием: $A=P$, $B=(P-\varepsilon\sigma)\cup(P+\varepsilon\sigma)$ и $t=2s+1$ (рис. 1).

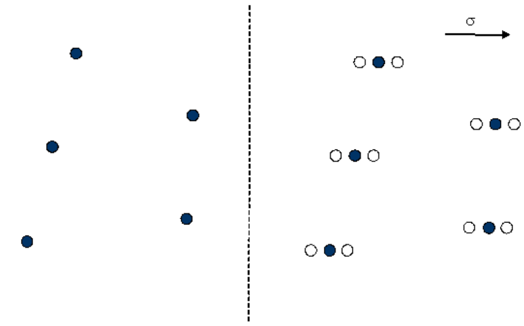

Рис. 1. Схема сведения задачи PC к задаче PASC

Легко убедиться в том, что описанные выше действия могут быть произведены за время, ограниченное сверху полиномом от длины записи условия задачи *PC*. Для завершения обоснования полиномиальной сводимости достаточно показать, что задача *PC* и поставленная ей в соответствие задача *PASC* имеют положительные или отрицательные ответы одновременно. Другими словами, что множество P обладает покрытием из не более, чем s прямых тогда и только тогда, когда соответствующие ему множества A и B отделимы аффинным комитетом, число элементов которого не превосходит $2s+1$.

Теорема 8. Множество $P=\{p_1,\ldots,p_k\}\subset\mathbb{Z}^2$ обладает покрытием из s прямых тогда и только тогда, когда множества $A=P$ и $B=(P-\varepsilon\sigma)\cup(P+\varepsilon\sigma)$ отделимы аффинным комитетом из $2s+1$ элемента.

Доказательство. **1.** Пусть $L=\{l_1,\ldots,l_s\}$ – покрытие множества P. Каждой прямой $l_j=\{x\in\mathbb{R}^2: c_j^{\mathrm{T}}x=d_j\}$ сопоставим подмножества $A(j)=P(j)=P\cap l_j$ и $B(j)=(P(j)+\varepsilon\sigma)\cup(P(j)-\varepsilon\sigma)$. Без ограничения общности можно полагать, что $A(j)\ne\varnothing$ и для каждой точки $a\in A(j)$ справедливо неравенство

$$(c_j^{\mathrm{T}}(a-\varepsilon\sigma)-d_j)(c_j^{\mathrm{T}}(a-\varepsilon\sigma)+d_j)<0. \tag{5}$$

Зафиксируем произвольное число $0 < \delta_j < \varepsilon$ и определим функции f_{2j-1} и f_{2j} по формулам

$$f_{2j-1}(x) = c_j^{\mathrm{T}} x - d_j + \delta_j,$$
$$f_{2j}(x) = -c_j^{\mathrm{T}} x + d_j + \delta_j .$$

так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} f_{2j-1}(a-\varepsilon\sigma)\cdot f_{2j}(a-\varepsilon\sigma) < 0, \\ f_{2j-1}(a+\varepsilon\sigma)\cdot f_{2j}(a+\varepsilon\sigma) < 0 \end{cases} \quad (a \in A(j)). \tag{6}$$

В силу справедливости неравенства (5), такое построение возможно. Очевидно, что наряду с неравенствами (6), по выбору ε, также будут выполнены неравенства

$$\begin{cases} f_{2j-1}(a) > 0,\ f_{2j}(a) > 0 & (a \in A(j)) \\ f_{2j-1}(p)\cdot f_{2j}(p) < 0 & (p \in (A\cup B)\setminus(A(j)\cup B(j)). \end{cases}$$

По построению, последовательность функций $(f_1,\dots,f_{2s})$ обладает свойством

$$\left|\{k: f_k(a) > 0\}\right| \ge s+1 \quad (a \in A),$$
$$\left|\{k: f_k(b) < 0\}\right| = s \quad (b \in B).$$

Дополнив ее произвольной аффинной функцией f_0, удовлетворяющей условиям

$$f_0(x) < 0 \quad (x \in A\cup B),$$

непротиворечивым ввиду конечности множества $A\cup B$, получаем искомый комитет $Q = (f_0, f_1,\dots,f_{2s})$, разделяющий множества A и B (рис. 2).

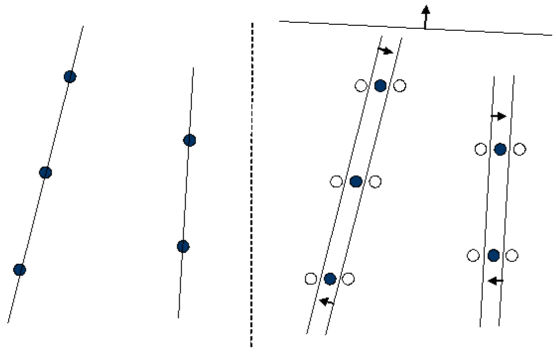

Рис. 2. Построение разделяющего комитета по заданному покрытию.

2. Множество P, очевидно, обладает покрытием, состоящим из не более чем $\left\lceil k/2 \right\rceil$ прямых. Обозначим через s мощность его минимального (по числу элементов) покрытия. Покажем, что сопоставленные множеству P согласно описанной выше схеме множества A и B не могут быть отделимы аффинным комитетом с числом элементов $q < 2s+1$.

Пусть $Q = (f_1,\dots,f_q)$, где $f_i(x) \equiv c_i^{\mathrm{T}} x - d_i$ – произвольный комитет аффинных функций, разделяющий множества A и B. По теореме Мазурова [8], для каждой точки $a \in A$ найдутся такие номера $i_1 = i_1(a)$ и $i_2 = i_2(a)$, что

$$f_{i_1(a)}(a) > 0, \quad f_{i_1(a)}(a+\varepsilon\sigma) < 0, \tag{7}$$

$$f_{i_2(a)}(a) > 0, \quad f_{i_2(a)}(a-\varepsilon\sigma) < 0. \tag{8}$$

Введем следующие обозначения: через $I_1(a)$ обозначим множество всех номеров $i_1(a)$, удовлетворяющих условию (7), аналогично, обозначим через $I_2(a)$ множество номеров $i_2(a)$, удовлетворяющих условию (8). Далее определим множества I_1 и I_2 равенствами

$$I_1 = \bigcup_{a\in A} I_1(a) \quad \text{и} \quad I_2 = \bigcup_{a\in A} I_2(a).$$

В силу (7)-(8), справедливы неравенства

$$c_i^{\mathrm{T}}\sigma < 0 \quad (i \in I_1),$$
$$c_i^{\mathrm{T}}\sigma > 0 \quad (i \in I_2),$$

следовательно, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Для произвольного номера $i \in I_1$ обозначим через $A'(i)$ подмножество $\{a \in A: i \in I_1(a)\}$. По построению, прямая $f_i(x) = 0$ для каждого $a \in A'(i)$ пересечет отрезок $[a, a+\varepsilon\sigma]$. Следовательно, в силу утверждения 1 и выбора ε, $\dim \operatorname{aff} A'(i) \le 1$, откуда $|I_1| \ge s$, по выбору s (в качестве мощности наименьшего покрытия множества $A = P$. Аналогично обосновывается неравенство $|I_2| \ge s$. Таким образом,

$$q \ge |I_1| + |I_2| \ge 2s. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться в справедливости более сильного неравенства $q \ge 2s+1$. В самом деле, в противном случае комитет Q из $2s$ элементов путем исключения произвольного элемента (см., например, [6]) может быть преобразован в аффинный комитет, разделяющий множества A и B и состоящий из $2s-1$ члена, что противоречит (9). Теорема доказана.

Следствие 1. Задача *PASC NP*-полна в строгом смысле. Задача *ASC*[1], сформулированная в пространстве фиксированной размерности $n > 1$ – также *NP*-полна в строгом смысле.

Следствие 2. Задача *MASC,* сформулированная в $\mathbb{Q}^n$ при произвольном фиксированном $n > 1$, – *NP*-трудна.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Президента РФ (гр. НШ-5595.2006.1 и МД-6768.2006.1) и РФФИ (гр. 07-01-399 и 07-07-168).

[1] Задача об аффинном разделяющем комитете в форме задачи распознавания свойства.

Литература

1. Хачай М.Ю. О вычислительной сложности задачи о минимальном комитете и смежных задач // ДАН, 2006. - 406. - №6. - С. 742-745.
2. Хачай М.Ю. О вычислительной и аппроксимационной сложности задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете // Таврический вестник информатики и математики. 2006. - №1. - С.34–43.
3. Megiddo N., Tamir A. On the complexity of locating linear facilities in the plane // Operations research letters. 1982. - Vol. 1. - No. 5. - P. 194-197.
4. Megiddo N. On the complexity of polyhedral separability // Discrete and Computational Geometry. 1988. – 3. - P. 325-337.
5. Blum A.L., Rivest R.L. Training a 3-node Neural Network is NP-complete // Neural Networks. 1992. - Vol. 5. - P. 117–127.
6. Lin J.H., Vitter J.S. Complexity Results on Learning by Neural Nets // Machine Learning. 1991. - Vol 6. – P. 211–230.
7. Мазуров Вл.Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания // Кибернетика. 1971. - №3. - С. 140–146.
8. Mazurov Vl.D., Khachai M.Yu., Rybin A.I. Committee Constructions for Solving Problems of Selection, Diagnostics and Prediction. {\it Proceedings of the Steklov Institute of mathematics}. Suppl. 1, (2002), S67–S101.
9. Dinur I., Regev O. and Smyth C. The hardness of 3-uniform hypergraph coloring. In: Proc. of the 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, November 2002.