УДК 519.86

Вл. Д. Мазуров, М. Ю. Хачай

КОМИТЕТНЫЕ КОНСТРУКЦИИ*

Введение

Метод комитетов определяет одно из направлений исследований задач оптимизации и классификации. Он связан с построением конструкций, обобщающих понятие решения системы уравнений и неравенств, позволяющих наряду с разрешимыми задачами анализировать задачи с противоречивыми условиями. В чистом виде одна из простейших комитетных конструкций появилась в 1965 году как способ построения некоторой обучающейся нейронной сети. Однако стоит заметить, что изучение несовместных задач, обладающих ясным практическим смыслом, имеет достаточно давнюю историю. Так, еще Лежандр, Гаусс, а позднее Лаплас при разработке метода наименьших квадратов имели дело с переопределенными, а значит, как правило, противоречивыми, системами линейных уравнений.

Метод комитетов использует построение составных решающих правил диагностики и выбора, имеющих вид голосования базисных решающих правил. При этом, в частности, используется правило принятия решений по большинству голосов. В теории принятия решений правило большинства впервые, видимо, исследовал Кондорсе. Он, в частности, показал нетранзитивность коллективных предпочтений, устанавливаемых по правилу большинства. Вопросы корректности процедур голосования исследовались в дальнейшем многими авторами. Так, широко известен парадокс Эрроу: при определенных естественных условиях возможна только одна тривиальная форма коллективного договора — диктатура. Но это в том случае, если мы ищем универсальную форму договора, т.е. такую демократию, которую можно применять во всех ситуациях выбора. Во всяком случае, необходимо изучать различные способы разрешения этого противоречия, причем каждый способ соотнесен с конкретной ситуацией выбора и диагностики.

Противоречивые системы уравнений и неравенств в моделях оптимизации и классификации возникают закономерно, они не являются результатами случайных ошибок или логически некорректных рассуждений. Это просто реальные постановки задач, которые являются только исходным

*Работа поддержана РФФИ, гранты №96-15-96247 и №99-01-00136.

пунктом для построения конструкций, определенным строго оговоренным способом разрешающих противоречивые системы ограничений.

Понятие committee solution, по-видимому, впервые было введено в работе [61]. Математическому исследованию этого понятия, а также более общих комитетных конструкций посвящены работы Вл.Д.Мазурова и других екатеринбургских исследователей. В последнее время особый интерес вызывали вопросы сложности комитетных решающих правил и вычислительной сложности их построения. Изучение их повлекло необходимость введения новых понятий — таких, например, как гиперграф максимальных по включению совместных подсистем систем ограничений.

Настоящая статья посвящена обзору результатов теории комитетных конструкций противоречивых систем ограничений и их приложений к анализу несобственных задач распознавания образов, принятия решений и оптимизации. Необходимость такого обзора обусловлена появлением ряда новых результатов в теории комитетов и зарождением некоторых новых подходов в этой проблематике.

Статья состоит из пяти разделов и библиографии. Первый раздел содержит основные определения и понятия; второй — теоремы существования комитетных конструкций для различных классов систем неравенств; в третьем разделе на языке теории графов описываются свойства множества максимальных совместных подсистем несовместной системы ограничений; четвертый раздел посвящен задаче о минимальном по числу членов комитете и, наконец, в пятом дается краткий обзор основных алгоритмов поиска комитетов системы линейных неравенств.

При построении математических моделей для целого ряда практических задач в таких трудноформализуемых областях знания, как медицина, биология, экономика и др., часто приходится иметь дело с плохо формализованными или противоречивыми системами ограничений [16],[47],[67],[68],[69]. Одним из способов разрешения этих противоречий является введение в модель процедуры распознавания образов — дискриминантного анализа, или таксономии [14],[28],[34],[39],[47].

Пусть заданы множество $M \subset R^n$ и класс функций $F \subset \{R^n \to R\}$. Известно, что $M = K_1 \dot{\bigcup} K_2$, причем множества K_1 и K_2 заданы своими конечными подмножествами $A \subset K_1$, $B \subset K_2$. Задачей дискриминантного анализа назовем [47] задачу нахождения функции $f \in F$ такой, что

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(a) & > & 0 \quad \text{при } a \in A, \\ f(b) & < & 0 \quad \text{при } b \in B. \end{array} \right. \tag{1}$$

Если такая функция найдена, то полагаем $K_1 = \{x \in M |\ f(x) > 0\}$ и $K_2 = \{x \in M |\ f(x) \leq 0\}$. Предполагается, что класс F содержит функции наиболее простого вида: линейные или кусочно-линейные (см., например, [31]). Во всяком случае, всегда можно полагать, что F параметризуется некоторым отображением $\gamma : C \to F$, где C — некоторое пространство параметров. В этом случае задача (1) сводится к задаче нахождения решения системы неравенств

$$\begin{cases} \gamma[c](a) > 0 & \text{при } a \in A, \\ \gamma[c](b) < 0 & \text{при } b \in B \end{cases} \tag{2}$$

относительно неизвестного $c \in C$. Например, в аффинном случае множество C совпадает с R^{n+1} и задача (1) эквивалентна задаче нахождения решения системы

$$\begin{cases} (x,a)+y > 0 & \text{при } a \in A, \\ (x,b)+y < 0 & \text{при } b \in B. \end{cases} \tag{3}$$

Для решения указанной системы удается применить аппарат теории линейных неравенств. К сожалению, система (3) [или (2)], как правило, несовместна (условие совместности системы (3) эквивалентно условию теоремы об отделимости выпуклых оболочек множеств A и B [49]), поэтому для решения поставленной задачи требуется то или иное обобщение понятия решения системы неравенств. Понятие комитета является одним из таких обобщений.

1. Основные понятия и определения

В наших построениях мы всюду считаем выполненной аксиому выбора. Пусть во множестве X заданы подмножества $D_1, \dots, D_m$. Рассмотрим систему включений

$$x \in D_j \quad (j \in N_m). \tag{4}$$

Здесь и всюду ниже через N_m обозначается множество $\{1, 2, \dots, m\}$. Система (4) называется несовместной, если $\bigcap_{j=1}^m D_j = \emptyset$. Ряд утверждений, приведенных ниже, справедлив для произвольной системы (4), однако бо́льшая часть результатов будет сформулирована для ее частного случая — системы неравенств

$$f_j(x) > 0 \quad (j \in N_m), \tag{5}$$

где X — вещественное линейное пространство, $f_1, \dots, f_m \in F \subset \{X \to R\}$ и F — заданный класс функций (линейных, аффинных и т.д.). Систему

$$x \in D_j \quad (j \in L) \tag{6}$$

для произвольного $\emptyset \neq L \subseteq N_m$ будем называть подсистемой с индексом L системы (4). Обозначим через $D(L) = \bigcap_{j \in L} D_j$ множество решений подсистемы (6).

Определение 1.1 [5],[14]. *Подсистема с индексом L называется максимальной совместной подсистемой системы* (4), *если $D(L) \neq \emptyset$ и для всякого $j \in N_m \setminus L \quad D(L \cup \{j\}) = \emptyset$.*

Видно, что система (4), в которой не все D_j пусты, либо совместна, либо имеет собственную максимальную совместную подсистему. Перейдем к определениям комитетных конструкций.

Определение 1.2 [61],[62]. *Комитетом большинства системы* (4) *называется конечная последовательность $Q = (x^1, \ldots, x^q)$, $x^i \in X$, такая, что $|\{i : x^i \in D_j\}| > q/2$ для каждого $j \in N_m$.*

Если Q удовлетворяет приведенному определению, то число q называется числом членов комитета Q и говорят, что система (4) разрешима комитетом из q членов. Ниже будет показано, что при анализе комитетной разрешимости системы (4) достаточно рассматривать комитеты, составленные из решений некоторых ее максимальных совместных подсистем. Минимальным называется комитет с минимально возможным для данной системы числом членов.

Известно несколько обобщений понятия комитета. Пусть заданы $p \in (0,1)$, $z \in R^q$ и определены характеристические функции $\varphi_j : X \to \{-1, 1\}$:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in D_j, \\ -1, & \text{если } x \notin D_j. \end{cases} \tag{7}$$

Определение 1.3 [31],[33]. *Пусть заданы $z \in R^q$ и $p \in (0,1)$. Конечная последовательность $Q = (x^1, \ldots, x^q)$, $x^i \in X$, называется (z,p)-решением системы* (4), *если для каждого $j \in N_m$ выполнено условие*

$$\sum_{i=1}^{q} z_i \varphi_j(x^i) > (2p - 1) \sum_{i=1}^{q} |z_i|; \tag{8}$$

(z,p)-решение системы (4) *называется:*

1) *z-решением системы* (4), *если $p = 1/2$;*

2) *(z,p)-комитетом системы* (4), *если $z \in Z^q$;*

3) *p-комитетом, если $z = [1, \ldots, 1]$.*

Опишем множество $\mathcal{Q}$ всех комитетов системы (4) [47]. Рассмотрим для этого вектор-функцию $\varphi(x) = [\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)]$. Множество $\varphi(X)$ конечно, пусть $\varphi(X) = \{\varphi^1, \ldots, \varphi^s\}$. Из определения 1.2 следует, что последовательность Q

принадлежит $\mathcal{Q}$ тогда и только тогда, когда Q путем перестановки членов можно представить в виде

$$(\underbrace{y^{1,1},\ldots,y^{1,z_1}}_{z_1},\ldots,\underbrace{y^{s,1},\ldots,y^{s,z_s}}_{z_s}), \tag{9}$$

где $y^{i,1},\ldots,y^{i,z_i}$ таковы, что $\varphi(y^{i,l})=\varphi^i$, а $z_1,\ldots,z_s$⇔неотрицательные целые числа, удовлетворяющие системе неравенств

$$\sum_{i=1}^{s} z_i\varphi^i > 0. \tag{10}$$

Комитет $Q\in\mathcal{Q}$ является минимальным тогда и только тогда, когда вектор $z=[z_1,\ldots,z_s]$, используемый в его представлении (9), является оптимальным в задаче нахождения

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{s} z_i \mid \sum_{i=1}^{s} z_i\varphi^i > 0,\ z\in Z_+^s\right\}. \tag{11}$$

Зададим на множестве $P^q=\{\Leftrightarrow 1,1\}^q$ частичный порядок следующим образом: положим

$$a\le b \quad\Leftrightarrow\quad |\{i: a_i=1\}|\le|\{i: b_i=1\}|.$$

Пусть заданы функции $f_1,\ldots,f_m: P^q\to R$, строго возрастающие в соответствии с выбранным порядком.

Определение 1.4 [14],[40]. *Коллективным решением системы* (4) *называется последовательность* $Q=(x^1,\ldots,x^q)$, $x^i\in X$, *такая, что для каждого* $j\in N_m$ *выполняется* $f_j(\varphi_j(x^1),\ldots,\varphi_j(x^q))>0$. *В частном случае, когда* $f_j(a_1,\ldots,a_q)=|\{i: a_i=1\}|\Leftrightarrow\alpha_j q$ *для некоторых чисел* α_j, *коллективное решение системы* (4) *называется обобщенным решением указанной системы.*

Каждой из определенных выше комитетных конструкций соответствуют понятие разделяющей комитетной конструкции и алгоритм распознавания. А именно, пусть заданы множества $A,B\subset R^n$ и класс функций

$$F=\{f=\gamma[c]|\ c\in C\}\subset\{R^n\to R\},$$

определенных всюду в R^n, и требуется найти функцию $f\in F$ (иначе говоря, найти соответствующий параметр $c\in C$) так, чтобы

$$\left\{\begin{array}{rcll} f(a)=\gamma[c](a) & > & 0 & \text{при } a\in A,\\ f(b)=\gamma[c](b) & < & 0 & \text{при } b\in B.\end{array}\right. \tag{12}$$

Пусть система (12) относительно $c\in C$ несовместна.

Определение 1.5 [36]. *Разделяющим множества $A, B \subset R^n$ коллективным решением (обобщенным решением, (z,p)-решением, p-комитетом, комитетом) называется последовательность функций $(f^1, \ldots, f^q)$ такая, что $f^i = \gamma[c^i]$ и $(c^1, \ldots, c^q)$ является коллективным решением (обобщенным решением и т.д.) системы неравенств* (12).

В частных случаях, когда F — класс линейных (аффинных) функций, разделяющее множества A и B коллективное решение называется линейным (аффинным).

Кроме указанных выше комитетных алгоритмов распознавания, основанных на логике большинства, в ряде работ (см. например, [1],[71]) рассматривались алгоритмы, основанные на других логиках: старшинства, единогласия и т.д. Однако сведение задачи построения разделяющих комитетов (а именно эта задача чаще всего имеется в виду) с такими логиками к известной задаче построения комитета системы неравенств (включений) не столь очевидно, как в случае логики большинства.

Определение 1.6 [1]. *Конечная последовательность функций $(f^1, \ldots, f^q)$, $f^i \in F$, называется комитетом единогласия, разделяющим множества $A, B \subset R^n$, если каждое $a \in A$ удовлетворяет системе неравенств*

$$f_i(x) > 0 \quad (i \in N_q),$$

а каждое $b \in B$ не удовлетворяет указанной системе.

Пусть выбраны функции $f^1, \ldots, f^q \in F$, для каждого $x \in R^n$ положим $I_x = \{i \mid f_i(x) > 0\}$. Если $I_x \neq \emptyset$, то положим $i_x = \min\{i \in I_x\}$.

Определение 1.7 [1],[71]. *Конечная последовательность пар $((f^1, t^1), \ldots, (f^q, t^q))$, где $t^j \in \{0, 1\}$, называется комитетом старшинства, разделяющим множества $A, B \subset R^n$, если*

для каждого $a \in A$ множество I_a не пусто и $t^{i_a} = 1$;

для каждого $b \in B$ или $I_b = \emptyset$, или $t^{i_b} = 0$.

2. Теоремы существования комитетных конструкций

В этом разделе приводятся теоремы существования комитетов и обобщающих их конструкций для различных классов систем неравенств. Доказательства большинства из них конструктивны, так что попутно в них указываются различные верхние оценки числа членов минимальных комитетов (коллективных решений, p-комитетов и т.д.) рассматриваемых систем включений (неравенств).

Теорема 2.1 [14, 47]. *Если существует коллективное решение (обобщенное решение, (z,p)-решение и т.д.) системы* (4)*, то существует соответствующее решение, составленное из решений максимальных совместных подсистем системы* (4).

Эта теорема позволяет, в частности, в задаче (11) поиска минимального комитета системы (4) понизить размерность пространства, полагая ненулевыми лишь те компоненты вектора z, для которых векторы φ^i удовлетворяют условию

$$\forall i_1 \neq i_2 \ \exists j \in N_m : \quad \varphi_j^{i_1} = 1, \varphi_j^{i_2} = \Leftrightarrow 1.$$

Определение 2.1 [9]. *Система представителей для множеств $D_1, \ldots, D_m$ — это конечная последовательность $M = (x^1, \ldots, x^m)$, $x^i \in X$, такая, что $x^i \in D_i$. Система представителей M называется системой различных представителей, если $x^i \neq x^j$ для каждых $i \neq j$.*

Обозначим через $L(M) = \{x^i \mid i \in N_m\}$ множество попарно различных элементов M. Числом членов системы представителей M назовем $|L(M)|$.

Очевидно, что система (4) совместна тогда и только тогда, когда найдется система представителей M множеств $D_1, \ldots, D_m$ из одного члена. Справедливы и более общие утверждения.

Теорема 2.2 [35]. *Если для всякого $j \in N_m$ найдется система представителей M_j для множеств $D_1 \cap D_j, \ldots, D_m \cap D_j$ из не более чем r членов $(r > 1)$, то система* (4) *разрешима p-комитетом при $p = 1/r$. В частности, при $r = 2$ система* (4) *разрешима комитетом из $2m$ членов.*

Мы приводим доказательство этого утверждения, т.к. оно в сжатой форме поясняет идею построения p-комитета.

Доказательство. Пусть $M_1, \ldots, M_m$ — системы представителей, указанные в условии теоремы. Пусть $L(M_j) = \{x_j^1, \ldots, x_j^{r_j}\}$, $r_j \leq r$. Убедимся, что последовательность

$$Q = (\underbrace{x_1^1, \ldots, x_1^1}_{r-r_1+1}, x_1^2, \ldots, x_1^{r_1}, \ldots, \underbrace{x_m^1, \ldots, x_m^1}_{r-r_m+1}, x_m^2, \ldots, x_m^{r_m})$$

является p-комитетом системы (4) при $p = 1/r$. Обозначим элементы Q через $y^1, \ldots, y^{rm}$. По определению p-комитета нужно для каждого $j \in N_m$ проверить выполнение неравенства

$$\sum_{i=1}^{rm} \varphi_j(y^i) > (2p \Leftrightarrow 1)m = \frac{m}{r}(2 \Leftrightarrow r).$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{rm} \varphi_j(y^i) \geq r + m \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow (m \Leftrightarrow 1)(r \Leftrightarrow 1) = m(2 \Leftrightarrow r) + 2(r \Leftrightarrow 1) > m(2 \Leftrightarrow r)/r,$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы. Второе утверждение проверяется аналогично.

Теорема 2.3 [35]. *Если любые k множеств системы* (4) *пересекаются и $k/m > p$, то система* (4) *разрешима p-комитетом.*

Нетрудно показать, что условия теорем 2.2 и 2.3 не являются необходимыми для существования p-комитета. Действительно, рассмотрим, например, систему вида (4) с множествами $D_1 = \{1, 2, 3\}$, $D_2 = \{1, 4\}$, $D_3 = \{2, 4\}$, $D_4 = \{3, 4\}$. Видно, что $Q = (1, 2, 3, 4, 4)$ является ее комитетом (p-комитетом при $p = 3/5 \Leftrightarrow \varepsilon$ и произвольном $\varepsilon > 0$), тем не менее для системы не выполнено условие теоремы 2.2 при $r = 2$ и теоремы 2.3 при $k = 3$.

Сформулируем также простое необходимое условие существования p-комитета.

Теорема 2.4. *Пусть $K = (x^1, \dots, x^q)$ — p-комитет системы* (4)*, тогда в нем найдется член x^i такой, что $|\{j : \ x^i \in D_j\}| > pm$.*

Из этой теоремы, в частности, непосредственно следует наличие в системе, разрешимой p-комитетом, максимальной совместной подсистемы мощности, большей pm, а в системе, разрешимой комитетом из $2k \Leftrightarrow 1$ члена, — максимальной совместной подсистемы мощности, не меньшей $\frac{k}{2k-1}m$.

Всюду ниже через X обозначается вещественное линейное пространство, $l_1, \dots, l_m \in X^* \Leftrightarrow$линейные функционалы над X и $b_1, \dots, b_m \in R$. Рассмотрим вопрос существования комитета системы неравенств

$$l_j(x) > b_j \quad (j \in N_m). \tag{13}$$

В силу конечности системы (13) задача исследования комитетной разрешимости системы (13) эквивалентна аналогичной задаче для подходящей системы неравенств над R^n, где n — ранг системы функционалов $l_1, \dots, l_m$ [60].

Действительно, пусть , $= \{x \in X | l_j(x) = 0 \ (j \in N_m)\}$. Тогда $X = X_n \oplus$, , где X_n — вещественное n-мерное линейное пространство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис X_n, $a_{ji} = l_j(e^i)$ и $x = x_1 e^1 + \dots + x_n e^n + z$, где $z \in$, . Тогда $l_j(x) = \sum_{i=1}^n x_i l_j(e^i) = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i$. Обозначим $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$, $a_j = [a_{j1}, \dots, a_{jn}] \in R^n$ и $(a_j, x) = \sum_{i=1}^m a_{ji} x_i$. Рассмотрим систему

$$(a_j, x) > b_j \quad (j \in N_m) \tag{14}$$

над R^n. Приведенные выше рассуждения сформулируем в виде леммы.

Лемма 2.1 [14]. *Для существования коллективного решения (обобщенного решения, (z,p)-решения,...) системы* (13) *необходимо и достаточно существования аналогичного решения системы* (14).

Лемма позволяет нам в дальнейшем всюду рассматривать задачу поиска комитетных конструкций системы линейных неравенств в R^n.

Сформулируем критерий существования комитета системы (14).

Теорема 2.5 [47]. *Система* (14) *разрешима комитетом большинства тогда и только тогда, когда каждая ее подсистема из двух неравенств совместна.*

В случае произвольных систем включений, пусть даже выпуклых и полиэдральных, условие совместности всякой подсистемы из двух включений не является достаточным для существования комитета. Рассмотрим, например, систему (4) над R^3 при $m = 4$ и множествах

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{x|\ x_1 \le 1,\ x_2 \le 0,\ x_3 \le 1,\ x_1 + x_3 \ge 1\},\\
D_2 &= \{x|\ x_1 \le 1,\ x_2 \le 1,\ x_3 \le 0,\ x_1 + x_2 \ge 1\},\\
D_3 &= \{x|\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 2\},\\
D_4 &= \{x|\ x_1 \le 0,\ x_2 \le 1,\ x_3 \le 1,\ x_2 + x_3 \ge 1\},
\end{aligned}$$

не разрешимую комитетом большинства, в которой тем не менее $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ для любых $i, j \in N_4$.

Доказанная теорема устанавливает верхнюю оценку $2m \Leftrightarrow 1$ для числа членов минимального комитета произвольной системы (14), поскольку $s \le m$ и из существования комитета из $2s$ членов следует существование комитета из $2s \Leftrightarrow 1$ членов. Однако, как будет показано ниже, при добавочных условиях ее можно существенно понизить.

Рассмотрим систему

$$(a_j, x) > 0 \quad (j \in N_m), \tag{15}$$

полученную из (14) заменой правых частей нулями. Как правило, задача нахождения комитетных конструкций системы (15) проще, чем для системы (14). Следующая лемма позволяет этим воспользоваться.

Лемма 2.2 [40]. *Существование коллективного решения системы* (15) *влечет существование коллективного решения системы* (14) *при произвольных* $b_1, \ldots, b_m$.

В дальнейшем предполагается, что система (14) удовлетворяет условию

$$a_j + \alpha a_i \neq 0 \quad (\alpha \ge 0,\ j, i \in N_m). \tag{16}$$

Заметим, что приведенному условию удовлетворяют почти все системы (14) в том смысле, что векторы $a_1, \dots, a_m$ произвольной системы (14) с любой степенью точности можно приблизить векторами $a'_1, \dots, a'_m$ такими, что система

$$(a'_j, x) > b_j \quad (j \in N_m)$$

удовлетворяет условию (16). Следующая теорема устанавливает необходимое и достаточное условие существования комитета большинства системы (15) и указывает верхнюю оценку числа членов ее минимального комитета [а следовательно, и комитета системы (14)].

Теорема 2.6 [26]. *Система* (15) *разрешима комитетом большинства тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию* (16), *при этом число членов ее минимального комитета не превосходит* m.

Следствие 2.1. *Число членов минимального комитета системы* (14), *удовлетворяющей условию* (16), *не превосходит* m.

В теореме 2.6 указывается абсолютная оценка числа членов минимального комитета для очень широкого класса систем линейных неравенств (и предложен простой метод построения комитета — алгоритм проектирования на плоскость). В указанном классе оценка точна, нетрудно привести примеры систем неравенств на плоскости, число членов минимальных комитетов которых равно числу их неравенств. С другой стороны, полученная оценка, в силу своей абсолютности, никак не зависит от исходных параметров системы (14) — векторов $a_1, \dots, a_m$ и b. Поэтому можно получать более точные оценки, накладывая на вид системы (14) все более жесткие ограничения. Рассмотрим, например, следующее обобщение только что доказанной теоремы.

Как обычно, обозначим через $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ соответственно целые части "снизу" и "сверху" вещественного числа x.

Теорема 2.7 [66]. *Число членов минимального комитета системы* (14) *ранга* r, *каждая подсистема из* $k+1$ $(0 < k < r)$ *неравенства которой совместна, не превосходит*

$$2\left\lceil \frac{\lfloor (m \Leftrightarrow 1)/2 \rfloor}{k} \right\rceil + 1.$$

Ниже мы рассмотрим другой подход к уточнению верхней оценки числа членов минимального комитета.

Приведем еще несколько интересных следствий из теоремы 2.6. Пусть B — банахово пространство и $f_1, \dots, f_m$ — вещественные функционалы над ним. Рассмотрим систему неравенств

$$f_j(x) > 0 \quad (j \in N_m). \tag{17}$$

Теорема 2.8 [37]. *Пусть $f_1, \ldots, f_m$ дифференцируемы по Фреше в т.$x_0 = 0$, $f_j(0) = 0$ для каждого $j \in N_m$ и $f_j'(0)x + \alpha f_i'(0)x \not\equiv 0$ для каждого $\alpha \geq 0$ и $i \neq j$. Тогда система* (17) *разрешима комитетом из не более чем m членов.*

Для доказательства достаточно линеаризовать f_j в нуле и рассмотреть систему линейных неравенств $f_j'(0)x > 0$ $(j \in N_m)$.

Другим важным следствием теоремы 2.6 является теорема о существовании разделяющего комитета для конечных множеств $A, B \subset R^n$.

Теорема 2.9 [33]. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *для существования линейного разделяющего комитета для множеств $A, B \subset R^n$ необходимо и достаточно, чтобы множество $A \cup \Leftrightarrow B$ не содержало нулевых и противоположно направленных векторов. Минимальный линейный разделяющий комитет для этих множеств содержит не более $|A \cup B|$ членов;*

2) *для существования аффинного разделяющего комитета для множеств $A, B \subset R^n$ необходимо и достаточно, чтобы $A \cap B = \emptyset$. Минимальный аффинный разделяющий комитет для этих множеств также содержит не более $|A \cup B|$ членов.*

Аналогичная теорема может быть сформулирована и для комитета старшинства.

Теорема 2.10 [71]. *Для существования разделяющего аффинного комитета старшинства для множеств $A, B \subset R^n$ необходимо и достаточно, чтобы $A \cap B = \emptyset$. Минимальный разделяющий комитет старшинства для указанных множеств содержит не более $|A \cup B|$ членов.*

Теоремы 2.9 и 2.10 можно обобщить на случай конечного числа классов $A_1, \ldots, A_m$.

3. Гиперграф максимальных совместных подсистем

Задача изучения комитетной разрешимости системы

$$x \in D_j \quad (j \in N_m), \tag{18}$$

в которой D_j — некоторые множества в R^n, тесно связана с задачей изучения структуры множества ее максимальных совместных подсистем. Последнюю задачу удобно формулировать в терминах теории графов.

Определим понятие гиперграфа максимальных совместных подсистем системы (18) и рассмотрим некоторые его свойства, связанные с комитетной разрешимостью исследуемой системы включений.

Определение 3.1. *Гиперграфом максимальных совместных подсистем системы* (18) *назовем гиперграф* $G = (V, E)$, *где* $V = \{J_1, \ldots, J_p\}$ — *множество индексов максимальных совместных подсистем системы* (18), *и* $\{J_{i_1}, \ldots, J_{i_s}\} \in E$ *тогда и только тогда, когда* $\bigcup_{k=1}^{s} J_{i_k} = N_m$.

Укажем условия, необходимые и достаточные для того, чтобы произвольный конечный гиперграф , являлся гиперграфом максимальных совместных подсистем некоторой системы (18) с точностью до изоморфизма. Как обычно [11], будем говорить, что гиперграфы , и G изоморфны, если существует биекция $\varphi : V, \to V$, обладающая свойством $u = \{v_1, \ldots, v_s\} \in E,$ тогда и только тогда, когда $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_s)\} \in E$. В дальнейшем будем обозначать $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_s)\}$ через $\varphi(u)$.

Теорема 3.1 [58]. *Пусть* $, = (V, , E,)$, *где* $V, = \{v_1, \ldots, v_p\}$ — *конечный гиперграф без кратных ребер. Гиперграф , изоморфен гиперграфу* G *максимальных совместных подсистем системы* (18) *для подходящих чисел* m, n *и множеств* $D_1, \ldots, D_m \subset R^n$ *тогда и только тогда, когда* $E,$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\text{если } p > 1, \text{ то } E, \text{ не содержит петель,} \tag{19}$$

$$(u \in E, , u \subset w) \Rightarrow w \in E, . \tag{20}$$

Далее будем рассматривать гиперграфы с точностью до изоморфизма, отождествляя изоморфные , и G. Другими словами, гиперграф без кратных ребер, удовлетворяющий условиям (19) и (20), будем называть гиперграфом максимальных совместных подсистем. Как следует из доказанной теоремы, класс гиперграфов максимальных совместных подсистем для систем вида (18) достаточно широк. Выделим в нем подкласс гиперграфов максимальных совместных подсистем систем (18), разрешимых комитетом из q членов, для некоторого заданного $q \in N$. Пусть $k \in N_{q-1}$.

Определение 3.2. *Последовательность вершин* $S = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_{q+1}})$ *гиперграфа* , , *обладающую свойством: для каждого* $L \subset N_{q+1}$ *такого, что* $|L| = k + 1$, *выполняется* $\{v_{i_j} : j \in L\} \in E, ,$ *назовем* (q, k)*-симплексом в гиперграфе* $, = (V, , E,)$.

Обозначение (q, k)-симплекс выбрано из геометрических соображений. Видно, например, что вершины-элементы (2,1)-симплекса образуют в гиперграфе , треугольник (3-цикл). Следующее простое утверждение связывает разрешимость системы (18) комитетом с существованием в ее гиперграфе максимальных совместных подсистем (q, k)-симплекса для подходящих $q, k \in N$.

Теорема 3.2 [57]. *Система* (18) *разрешима комитетом из* q *членов тогда и только тогда, когда в гиперграфе* G *ее максимальных совместных подсистем найдется* $(q \Leftrightarrow 1, \lfloor (q \Leftrightarrow 1)/2 \rfloor)$*-симплекс.*

В теореме утверждается, что задачи поиска комитета с заданным числом членов и подгиперграфа специального вида в гиперграфе максимальных совместных подсистем эквивалентны. Ниже мы приведем классификацию комитетов по строению соответствующих им подгиперграфов гиперграфа G.

Опишем свойства гиперграфа максимальных совместных подсистем системы линейных однородных неравенств, заданной на плоскости. Пусть задана система

$$(a_j, x) > 0 \quad (j \in N_m), \tag{21}$$

где $a_j, x \in R^2$ и среди векторов a_j нет нулевых и противоположно направленных. Пусть $\{I_1, \ldots, I_p\}$ — множество индексов максимальных совместных подсистем системы (21). Как упоминалось в разделе 1, p нечетно и равно числу членов минимального комитета, разрешающего систему (21); положим $p = 2t + 1$. Пусть $G_2 = (V_2, E_2)$ — гиперграф максимальных совместных подсистем системы (21). Ниже мы покажем, что он обладает своего рода экстремальным свойством относительно числа членов минимального комитета системы (21): множество его ребер максимально по включению среди множеств ребер гиперграфов порядка p максимальных совместных подсистем произвольных систем (18), разрешимых минимальным комитетом из p членов.

Рассмотрим булеву матрицу $M = \{m_{ji}\}$ размера $m \times p$, заданную условием $m_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in I_i, \\ 0, & \text{если } j \notin I_i. \end{cases}$ Перенумеруем неравенства и индексы максимальных совместных подсистем системы (21) так, чтобы матрица M приобрела удобный для рассмотрения вид. Для этого сопоставим каждому неравенству единичный направляющий вектор c_j прямой $\{x \mid (a_j, x) = 0\}$, выбрав из двух возможных тот, при движении в направлении которого по указанной прямой полуплоскость $\{x \mid (a_j, x) > 0\}$ остается справа. Обозначим индексы максимальных совместных подсистем системы (21) символами $I_1, \ldots, I_p$ в порядке возрастания полярного угла направляющего вектора левой границы конуса решений соответствующей подсистемы. Пронумеруем неравенства системы (21) натуральными числами $1, \ldots, m$ в порядке возрастания полярного угла сопоставленных им направляющих векторов c_j, считая, что номер 1 присвоен направляющему вектору левой границы конуса решений максимальной совместной подсистемы с индексом I_1 (рис.1).

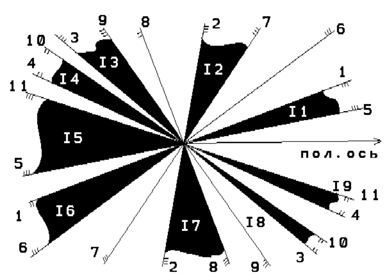

Рис.1

При выбранной нумерации неравенств и индексов максимальных совместных подсистем системы (21) матрица M примет следующий вид:

$$M = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\
1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1
\end{bmatrix}.$$

Видно, что каждое неравенство входит ровно в $t+1$ индекс максимальной совместной подсистемы, причем поскольку в матрице M ровно $p = 2t+1$ попарно различных строк, то неравенства системы (21) разбиваются на p классов эквивалентности. А именно, неравенства с номерами j_1 и j_2 входят в одни и те же индексы таких подсистем тогда и только тогда, когдаони являются представителями одного класса (соответственно когда строки матрицы M с номерами j_1 и j_2 совпадают). Пронумеруем классы эквивалентности неравенств системы (21) в естественном порядке числами $1, \dots, p$.

Итак, $G_2 = (V_2, E_2)$ — гиперграф максимальных совместных подсистем системы (21) на плоскости, $V_2 = \{I_1, \dots, I_p\}$. Для описания множества E_2 достаточно оставить в рассмотрении по одному неравенству из каждого класса эквивалентности, рассматривая вместо матрицы M квадратную булеву матрицу M' размера $p \times p$:

$$M' = \begin{array}{cc}
t+1 & \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\
1 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 & \ddots & 1 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
1 & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\
1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1
\end{bmatrix} & t+1
\end{array}.$$

Легко видеть, что, например, вершина I_1 входит в двухэлементные ребра $\{I_1, I_{t+1}\}$ и $\{I_1, I_{t+2}\}$. Следующее простое предложение определяет условие на номера вершин, входящих в некоторое подмножество $u \subset V_2$, необходимое и достаточное для того, чтобы $u \in E_2$. Ниже всегда будем полагать, что запись $u = \{I_{i_1}, \ldots, I_{i_s}\}$ подразумевает $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$.

Предложение 3.1. *Подмножество вершин $\{I_{i_1}, \ldots, I_{i_s}\}$ гиперграфа G_2 является его ребром тогда и только тогда, когда для каждого $k \in N_s$ выполняется $i_{k\,(\mathrm{mod}\, s)+1} \Leftrightarrow i_k\,(\mathrm{mod}\, p) \leq t+1$.*

Из предложения следует, в частности, что если число p достаточно велико, в E_2 есть ребра, не содержащие в себе никакое двухэлементное ребро. Например, гиперграф максимальных совместных подсистем системы, изображенной на рис.1, содержит ребро $\{I_1, I_4, I_7\}$, не содержащее в себе двухэлементные ребра.

Перечислим также некоторые свойства графа максимальных совместных подсистем системы линейных однородных неравенств, множество вершин которого совпадает с множеством вершин ее гиперграфа максимальных совместных подсистем, а множество ребер индуцируется подмножеством двухэлементных ребер указанного гиперграфа.

Понятие графа максимальных совместных подсистем впервые было введено в работе [52] для системы строгих однородных линейных неравенств. Свойства этого графа подробно изучены в работах [5],[6], в работе [5] некоторые из них были обобщены на случай более общей системы включений. Следствием этих результатов стало построение более быстрого, чем алгоритм свертывания Фурье–Черникова [59], алгоритма нахождения всех максимальных совместных подсистем системы строгих однородных линейных неравенств [4].

Пусть $J_1, \ldots, J_p$ — индексы всех максимальных совместных подсистем системы (18). Далее мы будем пользоваться некоторыми понятиями из теории графов [11]. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф. Степенью его вершины v называется число ребер, инцидентных v, т.е. число $|\{e \in E : v \in e\}|$. Чередующаяся последовательность

$$v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l, \qquad (22)$$

в которой $v_j \in V$, $\{v_j, v_{j+1}\} \in E$, называется (v_1, v_l)-маршрутом. Часто маршрут задается последовательностью входящих в него вершин. Маршрут называется цепью, если все его ребра различны, и простой цепью, если все его вершины, кроме, может быть, крайних, различны. Маршрут (22) называется циклическим, если $v_1 = v_l$. Циклическая цепь называется циклом, а простая — простым циклом. Число ребер маршрута называется его длиной. Граф G называется связным, если для любых вершин $v_i \neq v_j$ в нем существует (v_i, v_j)-маршрут. Далее мы будем рассматривать цепи и циклы в гиперграфе, тем не менее подразумевая под ними только что введенные понятия.

Пусть X — топологическое пространство, в котором заданы упорядоченные пары множеств $(A_1, A'_j), \ldots, (A_m, A'_m)$. Определим множества $D_1, \ldots, D_m \subset X \times \{0,1\}$ следующим образом:

$$D_j = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} | x \in A_j \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \Big| x \in A'_j \right\}.$$

Рассмотрим систему включений

$$y = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} \in D_j \quad (j \in N_m). \tag{23}$$

Видно, что произвольная подсистема с индексом $\emptyset \neq L \subseteq N_m$ системы (23) совместна (т.е. $D(L) = \bigcap_{j \in L} D_j \neq \emptyset$) тогда и только тогда, когда

$$\left(\bigcap_{j \in L} A_j \right) \cup \left(\bigcap_{j \in L} A'_j \right) \neq \emptyset.$$

Теорема 3.3 [5]. *Пусть множества A_j, A'_j открыты в X, $A_j \cap A'_j = \emptyset$, $F_j = X \setminus (A_j \cup A'_j)$ нигде не плотно в X для всех $j \in N_m$ и множество $F = \bigcup_{i \neq j} F_i \cap F_j$. Если множество $X \setminus F$ связно, то граф максимальных совместных подсистем системы* (23) *связен.*

Следствием приведенной теоремы является результат В.Ю.Новокшенова о связности графа максимальных совместных подсистем системы

$$(a_j, x) > 0 \quad (j \in N_m), \tag{24}$$

в которой $a_j, x \in R^n$, $\|a_j\| = 1$ и $a_j \pm a_i \neq 0$ для любых $i, j \in N_m$. Действительно, сопоставим системе (24) подходящую систему (23) [5], для чего положим $A_j = \{x | (a_j, x) > 0\}$, $A'_j = \{x | (a_j, x) < 0\}$. Для произвольного $\emptyset \neq L \subseteq N_m$ через $C(L)$ обозначим конус решений подсистемы с индексом L системы (24). Видно, что $C(L) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $D(L) \neq \emptyset$, поэтому множества (и графы) максимальных совместных подсистем систем (23) и (24) совпадают. Поскольку F_j — гиперплоскости в R^n, то F_j нигде не плотны в X, и определяемое в теореме множество F таково, что $X \setminus F$ связно. Следовательно, по теореме 3.3 граф максимальных совместных подсистем построенной системы (23) связен, значит, связен и аналогичный граф для системы (24).

Теорема 3.4 [5],[6]. *Пусть $k \in N_{n-1}$ и каждая подсистема из $(k+1)$ неравенства системы* (24) *совместна. Тогда степень каждой вершины ее графа максимальных совместных подсистем не меньше $k+1$.*

Теоремы 3.3–3.4 позволяют находить максимальные совместные подсистемы системы (24), строя маршруты в соответствующем графе. Например, известно [52], что если $J_1 \subset N_m$ — индекс максимальной совместной подсистемы несовместной системы (24), то найдется максимальная совместная подсистема той же системы с индексом $J_2 \supset (J \setminus J_1)$.

Теорема 3.5 [5],[6]. *Граф изоморфен графу максимальных совместных подсистем подходящей системы* (24) *на плоскости тогда и только тогда, когда он является циклом нечетной длины q, где $3 \leq q \leq m$.*

В R^n аналогичный результат формулируется так:

Теорема 3.6 [5],[6]. *Всякое ребро графа максимальных совместных подсистем системы* (24) *принадлежит простому циклу длины, не большей m.*

Теорема 3.7 [5],[6]. *Граф максимальных совместных подсистем системы* (24) *содержит простой цикл нечетной длины, не превосходящей m.*

Последняя теорема позволяет с другой стороны взглянуть на вопрос существования комитета для системы линейных однородных наравенств. Из определения комитета следует, что если индексы $J_1, J_2, \ldots, J_{2k-1}$ образуют цикл в графе максимальных совместных подсистем произвольной системы включений (18) [в частности, системы (24)], то указанная система разрешима комитетом, составленным из решений соответствующих подсистем, взятых для каждой по одному. Таким образом, наличия цикла нечетной длины достаточно для существования комитета. Последняя теорема утверждает, что если система линейных однородных неравенств обладает комитетом, то она обладает и комитетом, которому соответствует простой цикл нечетной длины. Теорема прямо следует из теоремы 2.6, в доказательстве которой строится комитет системы (24) из не более чем m членов — решений максимальных совместных подсистем, индексы которых как раз образуют в соответствующем графе цикл нечетной длины, в котором можно выделить простой подцикл также нечетной длины.

Ниже будет показано, что в случае произвольных систем включений наличие в графе максимальных совместных подсистем системы (18) цикла нечетной длины не является необходимым для ее разрешимости комитетом (например, система рассмотренная в замечании после теоремы 2.3, разрешима комитетом из пяти членов, в то время как ее граф максимальных совместных подсистем ацикличен). Поэтому возникает задача классификации минимальных комитетов с одинаковым числом членов в соответствии с подграфом, порожденным в графе максимальных совместных подсистем индексами максимальных совместных подсистем, из решений которых они составлены. Ниже мы решим эту задачу для числа членов комитета 3 и 5. Кроме перечисленных, в работе [5] получен еще ряд интересных свойств графа максимальных совместных подсистем системы (24): раскрашиваемость, 2-связность и др.

4. Минимальный комитет

В этом разделе описываются свойства комитета с минимальным числом членов, называемого минимальным, не обязательно совместной системы включений

$$x \in D_j \quad (j \in N_m), \tag{25}$$

где D_j — некоторые множества в R^n.

На множестве $\mathcal{Q}$ комитетов системы (25) можно определить различные критерии выбора оптимального элемента, реализующие различные подходы к обобщению понятия ее решения:

1) критерий минимального расстояния между членами; ему соответствует задача нахождения комитета $Q = (x^1, \ldots, x^q) \in \mathcal{Q}$, минимизирующего величину
$$g(\|x^1 \Leftrightarrow x^2\|, \ldots, \|x^{q-1} \Leftrightarrow x^q\|),$$
где g — некоторая выпуклая функция;

2) критерий максимума вероятности событий: "i-й член комитета удовлетворяет j-му ограничению" ($i \in N_q, j \in N_m$); ему соответствует задача нахождения $Q = (x^1, \ldots, x^q) \in \mathcal{Q}$, максимизирующего функцию $p : \mathcal{Q} \to [0, 1]$ вида
$$p(Q) = \min_{j \in N_m} \frac{|\{i : \ x^i \in D_j\}|}{q};$$

3) критерий оптимизации средней прибыли; ему соответствует задача поиска $Q = (x^1, \ldots, x^q) \in \mathcal{Q}$, максимизирующего величину
$$\frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} (c, x^i)$$
для некоторого $c \in R^n$, и др.

Критерий минимальности числа членов является одним из наиболее часто употребимых критериев оптимальности на множестве комитетов системы (25). Тем не менее задача поиска минимального комитета, ввиду своего комбинаторного характера, является одной из наиболее трудных в теории комитетов.

В дискретной оптимизации (см., например, [10]) есть понятие NP-полной и NP-трудной задач. Примерами таких задач являются известные задачи коммивояжера, целочисленного программирования, о рюкзаке. Все эти задачи характеризуются тем, что, во-первых, для их решения не известно алгоритма, вычислительная сложность которого оценивалась бы сверху полиномом от длины записи их условий, а во-вторых, известно, что если бы нашелся такой алгоритм хотя бы для одной из них, то все задачи из класса NP также были бы разрешимы алгоритмами с полиномиальной оценкой сложности. NP-полная задача, кроме того, характеризуется принадлежностью к классу NP — классу задач с полиномиальной проверкой полученного решения. Ясно, что P, класс всех задач, разрешимых полиномиальными алгоритмами, является подмножеством NP. Существует гипотеза, что $P \neq NP$, в рамках которой NP-полные задачи являются как бы самыми трудноpешаемыми в классе NP.

Теорема 4.1 [66]. *Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_m$ — конечные множества. Задача поиска минимального комитета системы* (25) *NP-трудна.*

Заметим, что задача поиска минимального комитета произвольной системы вида (25) при известных максимальных совместных подсистемах полиномиально эквивалентна только что рассмотренной задаче с конечными множествами D_j, поэтому она также NP-трудна.

Проведенные рассуждения свидетельствуют о трудноpешаемости задачи о минимальном комитете, следовательно, актуальной становится задача построения различных априорных оценок числа членов минимального комитета для тех или иных классов систем включений или неравенств. При нахождении оценки для заданной системы включений (неравенств) удобно сравнивать гиперграф ее максимальных совместных подсистем с аналогичным гиперграфом другой системы, для которой такая оценка известна. Пусть минимальный комитет системы над R^2

$$(a_j, x) > 0 \quad (j \in N_m) \tag{26}$$

состоит из $p = 2t + 1$ членов. Обозначим гиперграф ее максимальных совместных подсистем через $G_2 = (V_2, E_2)$. Как следует из утверждений предыдущего раздела, его порядок равен также p, пусть $V_2 = \{I_1, \ldots, I_p\}$.

Теорема 4.2 [58]. *Пусть ψ — гомоморфизм гиперграфа G_2 максимальных совместных подсистем системы линейных однородных неравенств* (26) *на плоскости в гиперграф $G = (V, E)$ максимальных совместных подсистем системы включений* (25) *и существует $\{I_{k_1}, \ldots, I_{k_s}\} \subset V_2$ такое, что $\{I_{k_1}, \ldots, I_{k_s}\} \notin E_2$, а $\{\psi(I_{k_1}), \ldots, \psi(I_{k_s})\} \in E$. Тогда число членов минимального комитета, разрешающего систему* (25), *меньше p.*

Замечание 4.1. *Доказательство теоремы содержит алгоритм оценки числа членов минимального комитета системы* (25). *Если G_2 гомоморфно вкладывается в G, то минимальный комитет системы* (25) *содержит не более p членов. Если при этом гомоморфный образ G_2 "более связен", чем G_2, то есть найдется такое $\{I_{i_1}, \ldots, I_{i_s}\} \subset V_2$, что $\{I_{i_1}, \ldots, I_{i_s}\} \notin E_2$, $\{\psi(I_{i_1}), \ldots, \psi(I_{i_s})\} \in E$ и $i_{k\,(\mathrm{mod}\,s)+1} \Leftrightarrow i_k \,(\mathrm{mod}\,p) > t + 1$, то число членов в минимальном комитете системы* (25) *не превосходит*

$$2(i_k \Leftrightarrow i_{k\,(\mathrm{mod}\,s)+1})\,(\mathrm{mod}\,p) + 1 < p.$$

Воспользуемся этими соображениями для уточнения оценки числа членов минимального комитета системы неоднородных линейных неравенств.

Рассмотрим несовместную систему неравенств

$$(a_j, x) > b_j \quad (j \in N_m), \tag{27}$$

в которой $x \in R^n$ и каждая подсистема из двух неравенств совместна. По теореме 2.5 система (27) разрешима некоторым комитетом большинства. Требуется оценить сверху число членов ее минимального комитета. Теорема 2.5 предоставляет такую оценку в общем случае: число членов минимального комитета не превосходит $2m \Leftrightarrow 1$ членов. Однако в большинстве практических задач удается построить комитет с гораздо меньшим числом членов. Действительно, поскольку данные в конкретной системе (27), как правило, задаются приближенно, можно считать, что среди векторов a_j отсутствуют нулевые и противоположно направленные, следовательно, задачу поиска комитета системы (27) можно свести к аналогичной для системы

$$(a_j, x) > 0 \quad (j \in N_m). \tag{28}$$

Далее под классом всех систем линейных неравенств будем понимать класс систем вида (27), для которых система (28) разрешима комитетом. По теореме 2.6 число членов минимального комитета системы (28) не превосходит m, причем данная оценка является точной в классе произвольных систем линейных неравенств. Однако указанная оценка не учитывает никакую информацию о системе, кроме числа неравенств. Теорема 4.2 позволяет указать более точную, чем m, оценку числа членов минимального комитета системы линейных неравенств, зависящую от векторов $a_1, \ldots, a_m$ и b.

Рассмотрим линейный оператор $\Phi : R^n \to R^2$, обладающий следующим свойством: среди векторов $\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_m)$ нет нулевых и противоположно направленных векторов. В этом случае система

$$(\Phi(a_j), y) > 0 \quad (j \in N_m) \tag{29}$$

комитетно разрешима, следовательно, этим же свойством обладает система

$$(\Phi(a_j), y) > b_j \quad (j \in N_m). \tag{30}$$

Если $Q' = (y^1, \ldots, y^q)$ — комитет системы (30), то $Q = (\Phi^*(y^1), \ldots, \Phi^*(y^q))$ — комитет системы (27).

Пусть $\{I_1, \ldots, I_p\}$ и $\{J_1, \ldots, J_r\}$ соответственно множества, а $G_{(29)}$ и $G_{(30)}$ — гиперграфы максимальных совместных подсистем систем (29) и (30) соответственно. По определению гиперграфа максимальных совместных подсистем $VG_{(29)} = \{I_1, \ldots, I_p\}$. Обозначим через

$$W = 2^{VG_{(29)}} \setminus (EG_{(29)} \cup \{\emptyset, \{I_1\}, \ldots, \{I_p\}\}).$$

Для каждого элемента $w = \{I_{i_1}, \ldots, I_{i_s}\} \in W$, в силу предложения 3.1, найдется $k \in N_s$ такое, что $i_{k\,(\mathrm{mod}\,s)+1} \Leftrightarrow i_k \,(\mathrm{mod}\,p) > t+1$, где $p = 2t+1$. Определим функцию $\Delta : W \to Z$ как $\Delta(w) = i_k \Leftrightarrow i_{k\,(\mathrm{mod}\,s)+1} \,(\mathrm{mod}\,p)$, множество

$$W' = \left\{ w = \{I_{i_1}, \ldots, I_{i_s}\} \in W \,|\; \forall k \in N_s \;\exists J_{j_k} :\; J_{j_k} \supseteq I_{i_k},\; \bigcup_{k=1}^{s} J_{j_k} = N_m \right\}$$

и число

$$\delta_{(27)} = \begin{cases} \min\{\Delta(w) | w \in W'\}, & \text{если } W' \neq \emptyset, \\ t, & \text{если } W' = \emptyset. \end{cases}$$

Теорема 4.3 [58]. *Число членов минимального комитета системы* (27) *не превосходит* $2\delta_{(27)} + 1$.

В теореме получена более точная, чем ранее, оценка числа членов минимального комитета в классе систем линейных неравенств, зависящая от векторов $a_1, \ldots, a_m, b$ и оператора Φ. А именно, в доказательстве теоремы для системы (30) находится минимальный среди комитетов, построенных из решений максимальных совместных подсистем, индексы которых содержат индексы аналогичных подсистем системы (29), образующие в $G_{(29)}$ цепь.

Можно показать, что полученная оценка точна в классе систем (27), для которых система (30) не обладает другими максимальными совместными подсистемами, кроме тех, все индексы которых содержат некоторые индексы аналогичных подсистем системы (29).

П р и м е р. Изображенная на рис.2 система неравенств вида (30) обладает максимальной совместной подсистемой с индексом J_3, содержащим в качестве собственного подмножества индекс I_3 максимальной совместной подсистемы соответствующей ей системы (29). Поэтому по теореме 4.3 минимальный комитет изображенной системы имеет не более семи членов. Видно, что минимальный комитет изображенной системы содержит ровно семь членов (он состоит из решений максимальной совместной подсистемы с индексами $J_2, \ldots, J_5, J_7, J_8, J_9$), хотя минимальный комитет системы (29) содержит девять членов.

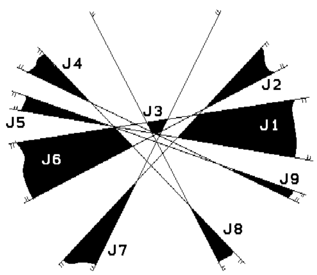

Рис.2

Ранее была установлена связь между существованием у системы включений (25) комитета с заданным числом членов q и существованием в гиперграфе ее максимальных совместных подсистем подгиперграфа определенного вида, а именно подгиперграфа, вершины которого образуют $(q \Leftrightarrow 1, [(q \Leftrightarrow 1)/2])$-симплекс. Ясно, что при $q = 3$ такой подгиперграф определяется единственным образом, однако с ростом q число попарно неизоморфных подгиперграфов, удовлетворяющих этому свойству, быстро растет. Нетрудно видеть, что свойства комитета как обобщенного решения системы (25) зависят от того, какой именно подгиперграф ему соответствует. Из этих соображений целесообразно провести перечисление минимальных комитетов с заданным числом членов, основываясь на понятии изоморфизма гиперграфов.

Определение 4.1. *Последовательность $(J_1, \ldots, J_q)$ индексов максимальных совместных подсистем системы* (25) *назовем q-комитетообразующей совокупностью (q-КОС), если найдется минимальный комитет системы* (25) $Q = (x^1, \ldots, x^q)$ *такой, что* $x^i \in D(J_i) = \bigcap_{j \in J_i} D_j$ *для каждого* $i \in N_q$.

Из доказательства теоремы 3.2 следует, что если число членов в минимальном комитете, разрешающем систему (25), равно q, то понятия q-КОС и $(q \Leftrightarrow 1, [(q \Leftrightarrow 1)/2])$-симплекса совпадают. Далее будем рассматривать только те комитеты системы (25), которые состоят из решений ее максимальных совместных подсистем. При этом будем полагать, что два комитета Q_1 и Q_2, соответствующие члены которых являются решениями одних и тех же подсистем, эквивалентны. В соответствии с этим предположением для классификации минимальных комитетов из q членов достаточно произвести перечисление всех попарно неизоморфных q-КОС.

Пусть $K = (J_1, \ldots, J_q)$ — q-КОС системы (25) и пусть $L(K) = \{J_{i_1}, \ldots, J_{i_r}\}$, где $r \leq q$, — множество индексов в K.

Определение 4.2. *Гиперграфом (графом) q-комитетообразующей совокупности K назовем подгиперграф $G(K)$ (подграф , (K)), порожденный в гиперграфе (графе) максимальных совместных подсистем системы (25) множеством вершин $L(K)$.*

Рассмотрим несовместную систему включений

$$x \in D'_j \quad (j \in N_{m'}), \tag{31}$$

в которой, как в системе (25), $D'_j \in R^n$. Пусть $K' = (J'_1, \ldots, J'_q)$ — q-КОС системы (31).

Определение 4.3. *q-КОС K и K' называются изоморфными тогда и только тогда, когда изоморфны гиперграфы $G(K)$ и $G'(K')$.*

В силу приведенного определения задача перечисления q-КОС эквивалентна задаче перечисления попарно неизоморфных гиперграфов $G(K)$. Поскольку гиперграф произвольной 3-КОС — цикл длины 3 и, следовательно, все 3-КОС попарно изоморфны, то решим поставленную задачу в простейшем нетривиальном случае, когда $q = 5$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех систем произвольных включений вида (25), а через S — произвольный элемент $\mathcal{S}$, т.е. некоторую конкретную систему вида (25). Обозначим через $\mathcal{K}(S)$ множество всех 5-КОС, которыми обладает система S, и положим $\mathcal{K}(\mathcal{S}) = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \mathcal{K}(S)$. Для дальнейших рассуждений воспользуемся следующим очевидным предложением.

Предложение 4.1. *Пусть G_1 и G_2 — гиперграфы максимальных совместных подсистем, обладающие свойством*

$$(u \subseteq VG_i,\ |u| = 3) \ \Rightarrow\ u \in EG_i \quad (i = 1, 2), \tag{32}$$

и пусть $,_1$, $,_2$ — графы, у которых $V,_i = VG_i$, $E,_i$ совпадает с подмножеством двухэлементных ребер множества EG_i. Гиперграфы G_1 и G_2 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы $,_1$ и $,_2$.

Поскольку гиперграф произвольной 5-КОС удовлетворяет условию (32), то, в силу приведенного предложения 5-КОС, K_1 и K_2 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их графы $,(K_1)$ и $,(K_2)$.

Теорема 4.4 [65]. *Множество $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ содержит ровно 15 попарно неизоморфных элементов.*

Как следует из теоремы, множество $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ разбивается на 15 классов эквивалентности попарно изоморфных 5-КОС по числу попарно неизоморфных простых графов, допустимых определением 5-КОС. Однако в практических задачах нас, как правило, будет интересовать число классов эквивалентности в множестве $\mathcal{K}(\mathcal{S}')$ для некоторого подмножества $\mathcal{S}'$ множества всех систем включений. Естественно предположить, что при достаточно узком $\mathcal{S}'$ результат, справедливый для $\mathcal{K}(\mathcal{S})$, не будет справедливым для $\mathcal{K}(\mathcal{S}')$. Действительно, если $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ — множество всех конечных систем линейных однородных неравенств на плоскости, то из результатов [27],[5] следует, что в $\mathcal{K}(\mathcal{S}_{\mathcal{L}})$ все элементы попарно изоморфны, поскольку граф каждой 5-КОС является простым циклом длины 5. Интересно, что уже для множества $\mathcal{S}_{\mathcal{Q}}$ всех конечных систем полиномиальных неравенств степени не выше 2 на плоскости результат теоремы 4.4 верен.

Теорема 4.5 [65]. *Множество* $\mathcal{K}(\mathcal{S}_{\mathcal{Q}})$ *содержит ровно* 15 *попарно неизоморфных элементов.*

5. Методы поиска комитета системы линейных неравенств

Первыми методами построения комитетов систем линейных неравенств были, по-видимому, итерационные методы обучения персептронов (распознающих автоматов) задаче дискриминантного анализа, описанные в работах [48],[63],[72],[70]. На сегодняшний день в классе методов построения комитета можно выделить три большие группы.

В первую группу можно отнести методы, базирующиеся на применении к задаче поиска комитета системы линейных неравенств той или иной модификации известного алгоритма линейной коррекции [48] решения совместной системы линейных неравенств, для которого доказана [70] теорема о сходимости его к решению указанной системы за конечное число шагов. Полученные методы также принято называть алгоритмами линейной коррекции для построения комитета из q членов. К сожалению, для них известны лишь некоторые достаточные условия [25], гарантирующие их сходимость к искомому комитету. К тому же, как правило, вопрос разрешимости конкретной системы комитетом из заданного числа членов требует отдельного изучения.

Вторая большая группа методов [32],[40] основана на поиске решений всех максимальных совместных подсистем рассматриваемой системы неравенств, например, методом свертывания или с помощью процедуры безусловной оптимизации, и решении затем системы, аналогичной (10). Достоинством этих алгоритмов является то, что они позволяют находить оптимальные комитеты, например, минимальный комитет исследуемой системы. Для этого на втором этапе необходимо найти оптимальное решение задачи (11). Недостатком этих методов является их большая трудоемкость.

К третьей группе следует отнести эффективные конечношаговые алгоритмы, основанные на понижении размерности исходной задачи [27],[28],[37], [40],[24],[25]. Одним из основных представителей этой группы является метод проектирования на плоскость [27], основанный на принципе доказательства теоремы 2.6.

Кроме указанных классов алгоритмов, было предложено и программно реализовано много других: построения "грубых" комитетов, комитетов, минимально обобщающих материал обучения [47], комитетов старшинства [71],[1] и др.

Рассмотрим подробнее примеры характерных представителей для каждой из выделенных групп методов. Пусть задана несовместная система неравенств

$$(a_j, x) > 0 \quad (j \in N_m) \tag{33}$$

над R^n, для которой выполнены условия теоремы 2.6. Не уменьшая общности, будем далее полагать, что $\|a_j\| = 1$ и $a_j \pm a_i \neq 0$.

5.1. Метод линейной коррекции

В работе [48] предложен естественный метод построения комитета $Q = (x^1, \ldots, x^q)$ системы (33), обобщающий идею метода линейной коррекции [70], [72]. По аналогии с (7) определим функции $\varphi_j : R^n \to \{-1, 1\}$ так:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1, & (a_j, x) > 0, \\ -1, & (a_j, x) \leq 0. \end{cases}$$

Зафиксируем параметр $\varepsilon > 0$. Для произвольных $y^1, \ldots, y^q \in R^n$ и $j \in N_m$ определим числа $n_j = \sum_{i=1}^{q} \varphi_j(y^i)$ и $q_j = \lfloor \frac{|n_j|}{2} \rfloor + 1$. Пусть $(a_j, y^1) \leq (a_j, y^2) \leq \ldots \leq (a_j, y^q)$. Определим операторы $T_j : R^{n \times q} \to R^{n \times q}$ следующего вида. Пусть $w = [(y^1)^T, \ldots, (y^q)^T]^T \in R^{n \times q}$, где $y^1, \ldots, y^q$ — элементы R^n,

$$T_j w = \begin{cases} w, & \text{если } n_j > 0, \\ \begin{bmatrix} y^1 + \varepsilon a_j \\ \cdots \\ y^{q_j} + \varepsilon a_j \\ y^{q_j+1} \\ \cdots \\ y^q \end{bmatrix}, & \text{если } n_j \leq 0. \end{cases}$$

Задавшись произвольным $w_0 \in R^{n \times q}$, рассмотрим процесс

$$w_k = T_{(k-1)\,(\mathrm{mod}\, m)+1} w_{k-1} \quad (k \in N).$$

По построению операторов T_j если последовательность $\{w_k\}$ стабилизируется на элементе $\bar{w} = [(\bar{y^1})^T, \ldots, (\bar{y^q})^T]^T$, то $Q = (\bar{y^1}, \ldots, \bar{y^q})$ — комитет системы (33). Как упоминалось ранее, теоремы, родственной теореме Новикова [70], для приведенного алгоритма нет, известны лишь некоторые достаточные условия на систему (33) и начальное приближение w_0, при которых построенная последовательность $\{w_i\}$ стабилизируется. Например, в работе [23] приводится достаточное условие, при котором алгоритм сходится за m шагов.

5.2. Точный метод поиска минимального комитета

Метод, описанный в работе [32], находит минимальный комитет системы (33) и состоит из трех этапов.

На первом этапе находятся все минимальные несовместные подсистемы рассматриваемой системы методом полного фундаментального свертывания [59],[60]. Поскольку система (33) несовместна, то конус C решений двойственной ей системы

$$\begin{aligned} u_1a_1 + u_2a_2 + \ldots + u_m a_m &= 0, \\ u_1, \ldots, u_m &\geq 0 \end{aligned}$$

ненулевой по теореме Карвера, поэтому он содержит фундаментальные элементы. В силу результатов [60], векторы $u^1, \ldots, u^s$ коэффициентов свертывания полной фундаментальной свертки

$$\sum_{j=1}^{m} u_j^i (a_j, x) > 0 \quad (i \in N_s)$$

системы (33) и только они являются фундаментальными элементами конуса C. Следовательно, множество $\{L_1, \ldots, L_s\}$ индексов минимальных несовместных подсистем системы (33) определяется как [60]

$$L_i = \{j | u_j^i > 0\}.$$

На втором этапе по известным индексам минимальных несовместных подсистем находятся все индексы $I_1, \ldots, I_p$ максимальных совместных подсистем системы (33) из условий

$$\begin{gathered} I_i \setminus I_j \neq \emptyset \quad (i \neq j), \\ (\forall t \in N_s): \quad L_t \not\subset I_i, \\ (\forall i \in N_p)\ (\forall j \in (N_m \setminus I_i))\ (\exists t \in N_s): \quad L_t \subset I_i \cup \{j\}, \end{gathered}$$

например, методом построения сокращенной ДНФ [25].

На третьем этапе каждому индексу I_i ставится в соответствие вектор $\sigma^i \in \{\Leftrightarrow\!1, 1\}^m$ такой, что $\sigma^i_j = \begin{cases} 1, & j \in I_i, \\ \Leftrightarrow\!1, & j \notin I_i, \end{cases}$ и решается задача целочисленного линейного программирования

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{p} z_i \,|\, \sum_{i=1}^{p} z_i \sigma^i > 0\right\}. \tag{34}$$

Пусть $\bar{z} = [z_1, \ldots, z_p]^T$ — оптимальный вектор задачи (34) и $y_1, \ldots, y^p$ — решения соответствующих максимальных совместных подсистем системы (33), тогда по построению

$$Q = (\underbrace{y^1, \ldots, y^1}_{z_1}, \underbrace{y^2, \ldots, y^2}_{z_2}, \ldots, \underbrace{y^p \ldots, y^p}_{z_p})$$

— минимальный комитет системы (33). Вопрос оценки сложности последнего алгоритма до сих пор остается открытым. По-видимому [10],[60], в общем случае задача поиска всех максимальных совместных подсистем системы (33) и указанная задача ЦЛП являются NP-полными.

5.3. Метод проектирования на плоскость

Метод проектирования [26]–[28],[37],[23],[25] основан на принципе доказательства критерия существования комитета системы (33) (теорема 2.6) и состоит из двух этапов:

1) нахождение подходящего оператора $\Phi : R^n \to R^2$ и построение системы

$$(\Phi a_j, y) > 0 \quad (j \in N_m); \tag{35}$$

2) построение минимального комитета системы (35) $Q' = (y^1, \ldots, y^p)$, согласно, например, алгоритму [24]. После этого комитет исходной системы получается из Q' по правилу $Q = (\Phi^* y^1, \ldots, \Phi^* y^p)$.

Основными достоинствами этого метода, обусловившими его активное применение для решения конкретных задач дискриминантного анализа, являются малая вычислительная сложность и то, что получаемый в результате комитет Q содержит не более m членов, что соответствует оценке числа членов минимального комитета системы (33). Для систем неоднородных линейных неравенств существует модификация описанного метода в соответствии с результатами теоремы 4.3.

Литература

1. Белецкий Н.Г. Комитетные конструкции в многоклассовых задачах распознавания образов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1984.
2. Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов. М.: Наука, 1974.
3. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / Под ред. В.Н.Вапника. М.: Наука, 1984.
4. Гайнанов Д.Н. Алгоритм выделения всех максимальных совместных подсистем несовместной системы линейных неравенств // Тягунов Л.И., Карапетян Э.Г., Мирзоев Р.Г. Управление качеством промышленных изделий. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. С.110–115.
5. Гайнанов Д.Н. О графах максимальных совместных подсистем несовместных систем линейных неравенств / ИММ УНЦ АН СССР, 1981. 46 с. Деп. ВИНИТИ. 18.12.1980. №229-81.
6. Гайнанов Д.Н., Новокшенов В.А., Тягунов Л.И. О графах, порождаемых несовместными системами линейных неравенств // Матем. заметки. Т.33., №2. 1983. С.293–300.
7. Гайнанов Д.Н. О комбинаторных свойствах несовместных систем линейных неравенств и многогранников // Матем. заметки. 1985. Т.38, №3. С.463–474.
8. Гейл Д. Соседние вершины на выпуклом многограннике // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.:Изд-во иностр. лит., 1959. С.355–362.
9. Гофман А.Дж., Кун Г.У. О системах различных представителей // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. С.302–310.
10. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
11. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
12. Еремин И.И. Обучение распознаванию образов в условиях линейной разделимости // Метод комитетов в распознавании образов. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1974. С.41–57.
13. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д. Вопросы оптимизации и распознавания образов. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979.
14. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д. Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979.
15. Еремин И.И. Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988.
16. Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики. 1978. Вып.33. С.5–68.

17. Журавлев Ю.И. Корректные алгебры над множествами некорректных алгоритмов. I–III// Кибернетика. 1977. №4. С.14–21; 1977. №6. С.21–27; 1978. №2. С.35–43.

18. Журавлев Ю.И. и др. Параметрические логические модели анализа данных // Математические методы распознавания образов. М.:ВЦ РАН, 1995. С.95–96.

19. Зуев Ю.А. Метод повышения надежности классификации при наличии нескольких классификаторов, основанный на принципе монотонности // ЖВМ и МФ. 1981. Т.21, №1. С.157–167.

20. Зуев Ю.А. Вероятностная модель комитета классификаторов // ЖВМ и МФ. 1986. Т.26, №2. С.276–292.

21. Зуев Ю.А. Наихудший случай для принятия решения большинством голосов // ЖВМ и МФ. 1989. Т.29, №8. С.1256–1257.

22. Казанцев В.С. Задачи классификации и их программное обеспечение. М.:Наука, 1990.

23. Кривоногов А.И. Некоторые модификации комитетных алгоритмов в распознавании образов // Методы матем. программирования и приложения. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. С.49–55.

24. Кривоногов А.И. О некоторых комитетных конструкциях классификации // Методы оптимизации и распознавания образов в задачах планирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. С.92–98.

25. Кривоногов А.И. Некоторые вопросы обоснования комитетных алгоритмов// Классификация и оптимизация в задачах управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С.39–51.

26. Мазуров Вл.Д. О комитете системы выпуклых неравенств // Международ. конгресс математиков. Тез. докл. М.: МГУ, 1966. Вып.14. С.41.

27. Мазуров Вл.Д. О построении комитета системы выпуклых неравенств // Кибернетика. 1967. №2. С.56–59.

28. Мазуров Вл.Д. Об одном методе обучения машины интерпретации геофизических данных // Применение матем. методов в горноруд. и металлургич. промышленности. Свердловск: СОМИ АН СССР, 1968. С.3–8.

29. Мазуров Вл.Д. О свойстве дуальности несовместной системы линейных неравенств // Матем. методы в некоторых задачах оптимального планирования. Свердловск: СОМИ АН СССР, 1969. С.53–61.

30. Мазуров Вл.Д. Об одном методе обучения узнаванию // Кибернетика. 1970. №2. С.92–94.

31. Мазуров Вл.Д. Распознавание образов как средство автоматического выбора процедуры в вычислительных методах // ЖВМ и МФ. 1970. Т.10, №6. С.1520–1525.

32. Мазуров Вл.Д., Тягунов Л.И. Метод комитетов для распознавания нескольких образов и двойственность несовместных систем неравенств // Матем. методы в некоторых задачах оптимального планирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1971. С.55–59.

33. Мазуров Вл.Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания // Кибернетика. 1971. №3. С.140–146.

34. Мазуров Вл.Д. Дискриминантный анализ при математическом моделировании плохо формализуемых ситуаций // Нелинейная оптимизация и приложения в планировании. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1973. С.26–35.

35. Мазуров Вл.Д. Применение методов теории распознавания образов в оптимальном планировании и управлении // Метод комитетов в распознавании образов. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1974. С.58–80.

36. Мазуров Вл.Д. Несовместные системы неравенств в задачах распознавания // Метод комитетов в распознавании образов. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1974. С.3–9.

37. Мазуров Вл.Д., Тягунов Л.И. Метод комитетов в распознавании образов // Метод комитетов в распознавании образов. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1974. С.10–40.

38. Мазуров Вл.Д. Теория линейных неравенств и распознавание образов // Методы фейеровского типа в выпуклом программировании. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. С.9–39.

39. Мазуров Вл.Д. Методы математического программирования и распознавания образов в планировании производства. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1977, С.3–27.

40. Мазуров Вл.Д. Теория и приложения комитетных конструкций // Методы для нестационарных задач матем. программирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. С.31–63.

41. Мазуров Вл.Д., Казанцев В.С., Белецкий Н.Г. Пакет КВАЗАР прикладных программ распознавания образов, информационные материалы по математическому обеспечению. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979.

42. Мазуров Вл.Д. О некоторых дискретных аппроксимациях для несобственных задач // Классификация и оптимизация в задачах управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С.15–30.

43. Мазуров Вл.Д. Математические методы распознавания образов. Свердловск: УрГУ, 1982.

44. Мазуров Вл.Д. Несобственные задачи оптимизации и классификации в медицине и биологии // Применение матем. методов в решении мед. задач. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. С.39–40.

45. Мазуров Вл.Д., Кривоногов А.И., Казанцев В.С. и др. Комитеты в принятии решений // Кибернетика. 1984. №1. С.90–95.

46. Мазуров Вл.Д. Линейная оптимизация и моделирование. Свердловск: УрГУ, 1986.

47. Мазуров Вл.Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. М.: Наука, 1990.

48. Нильсон Н. Обучающиеся машины. М.:Мир, 1968.

49. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.:Мир, 1973.

50. Рязанов В.В. Комитетный синтез алгоритмов распознавания и классификации // ЖВМ и МФ. 1981. Т.21, №6. С.1533–1543.

51. Рязанов В.В. О синтезе классифицирующих алгоритмов на конечных множествах алгоритмов классификации (таксономии) // ЖВМ и МФ. 1982. Т.22, №2. С.429–440.

52. Тягунов Л.И. О выделении последовательности максимальных совместных подсистем несовместной системы линейных неравенств // Матем. методы планирования и управления в больших системах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1973. С.152–162.

53. Фань Цзи. О системах линейных неравенств // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. С.214–262.

54. Харари Ф. Теория графов. М.:Мир, 1973.

55. Хачай М.Ю. О комбинаторно устойчивых системах линейных неравенств // Тр. ИНПРИМ-96. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1996. С.171–172.

56. Хачай М.Ю. О построении комитета системы линейных неравенств методом проектирования на плоскость / ИММ УрО РАН, 1996. 21с. Деп. в ВИНИТИ 10.11.1996. №3161-В96.

57. Хачай М.Ю. О существовании комитета большинства // Дискретная математика. 1997. Т.9, №3. С.82–95.

58. Хачай М.Ю. Об оценке числа членов минимального комитета системы линейных неравенств // ЖВМ и МФ. 1997. Т.37, №11. С.1399–1404.

59. Черников С.Н. Метод свертывания систем линейных неравенств // Успехи матем. наук. 1964. Т.19, №5. С.149–155.

60. Черников С.Н. Линейные неравенства. М.:Наука, 1968.

61. Ablow C.M, Kaylor D.J Inconsistent homogenous linear inequalities // Bull. Amer. Math. Soc. 1965. V.71, №5.

62. Ablow C.M, Kaylor D.J A committee solution of the pattern recognition problem // IEEE Trans. 1965. V.IT-11, №3. P.453–455.

63. Blaha S. The convergence proof of a committee solution of the pattern recognition problem // Kybernetica (Praha). 1969. V.6, №2. P.474–483.

64. Khachai M.Yu. Estimating the number of steps in the linear correction method for solving a system of linear inequalities// Pattern Recognition and Image Analysis. 1993. V.3, №1. P.1–5.

65. Khachai M.Yu. Classification of committee solutions of majority // Pattern Recognition and Image Analysis. 1997. V.7, №.2. P.222–230.

66. Khachai M.Yu., Rybin A.I. A new estimate of the number of members in a minimum committee of a linear inequalities system // Pattern Recognition and Image Analysis. 1998. V.8, №4. P.491–496.

67. Mazurov Vl.D. Duality in pattern recognition and operation research // Pattern Recognition and Image Research. 1991. V.1, №4. P.376–384.

68. Mazurov Vl.D. Recognition and choice in a multistage procedure of modeling complex systems // Pattern Recognition and Image Research. 1994. V.4, №2. P.87–92.

69. Mazurov Vl.D. Generalized existence in nonequilibrium models of choice in modeling complex systems // Pattern Recognition and Image Research. 1995. V.5, №1. P.7–12.

70. Novikoff A.B.J. On convergence proofs for perceptrons // Proc. Symp. Math. Theory of Automata. N.Y.:Polytechnika, 1963. V.12. P.416–428.

71. Osborne M.L The seniority logic: a logic for a committee machine // IEEE Trans. Comp., 1977. V.C-26, №12. P.1302–1306.

72. Rosenblatt F. Principles of Neurodinamics. Washington: Spattan, 1962.

73. Ryazanov V.V. Recognition algorithms based on local optimality criteria // Pattern Recognition and Image Analysis. 1994. V.4, №2. P.98–109.

Статья поступила 28.11.1998 г.;
окончательный вариант 03.03.1999 г.