

ИНФОРМАЦИОННО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ,
ТЕХНИКЕ И ОБРАЗОВАНИИ

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ
МОДЕЛИРОВАНИЯ И РАЗРАБОТКИ
СИСТЕМ ИНФОРМАЦИОННО-
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ПОДДЕРЖКИ
ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Выпуск 4

Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный технический университет – УПИ

**ИНФОРМАЦИОННО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ
В ЭКОНОМИКЕ, ТЕХНИКЕ И ОБРАЗОВАНИИ**

Выпуск 4

**Прикладные аспекты моделирования и разработки систем
информационно-аналитической поддержки принятия решений**

Сборник материалов 2-й Международной научной конференции,
22-24 ноября 2007 г.

Екатеринбург
УГТУ-УПИ
2008

УДК 330.47:001.891.573
ББК 65.050.2в6
И 74

И 74 Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании. Вып. 4: Прикладные аспекты моделирования и разработки систем информационно-аналитической поддержки принятия решений: сборник материалов 2-й Международной научной конференции. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. 328 с.

ISBN 978-5-321-01317-5

Сборник содержит материалы 2-й Международной научной конференции "Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании", прошедшей 22-24 ноября 2007 г. на базе УГТУ-УПИ. Представленные работы рассматривают прикладные аспекты разработки математического аппарата, ориентированного на потребности моделирования процессов в экономике, технике и образовании, а также актуальные вопросы проектирования систем информационной, аналитической и технической поддержки принятия решений.

Сборник адресован научным работникам, специалистам в области проектирования, разработки и эксплуатации информационно-аналитических и управляющих систем в промышленности, бизнесе и образовании. Материалы представляют интерес для преподавателей и студентов вузов, аспирантов, обучающихся по экономико-математическим специальностям и информатике.

Редакционная коллегия:

проф., д-р физ.-мат. наук О.И. Никонов (научный редактор);
доцент, канд. физ.-мат. наук С.В. Кругликов (научный редактор);
чл.-кор. РАН С.С. Набойченко (главный редактор)

Выпуск подготовлен факультетом информационно-математических технологий и экономического моделирования УГТУ-УПИ.

УДК 330.47:001.891.573
ББК 65.050.2в6

ISBN 978-5-321-01317-5

© Уральский государственный
технический университет – УПИ, 2008
© Авторы статей, 2008

МАКСИМАЛЬНЫЕ СТАБИЛЬНЫЕ МОСТЫ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. Г. Иванов, А. В. Ушаков

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

1. Постановка задачи. Рассматривается линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv, \quad x \in R^n, \quad u \in P \subset R, \quad v \in Q \subset R, \quad n \geq 3. \quad (1)$$

Цель первого игрока, распоряжающегося управлением u , — приведение трех выделенных компонент фазового вектора x в момент окончания θ на выпуклое, замкнутое, ограниченное множество $M \subset R^3$. Второй игрок, распоряжающийся управлением v , имеет противоположные интересы. Управления u , v предполагаются скалярными. Ограничения P и Q — отрезки. Максимальным стабильным мостом, согласно [1], называем множество всех позиций в пространстве t, x , для каждой из которых первый игрок гарантирует перевод фазового вектора на целевое множество M в момент θ , как бы ни действовал второй игрок.

С помощью стандартного преобразования [1, с. 160]

$$y(t) = X_3(\theta, t)x(t)$$

сделаем переход к трехмерной системе без фазовой переменной в правой части:

$$\dot{y} = D(t)u + E(t)v, \quad y \in R^3, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad (2)$$

$$D(t) = X_3(\theta, t)B, \quad E(t) = X_3(\theta, t)C.$$

Здесь $X_3(\theta, t)$ — матрица, составленная из трех соответствующих строк фундаментальной матрицы Коши системы $\dot{x} = Ax$. В момент окончания θ требуется выполнение включения $y(\theta) \in M$.

Поскольку условия окончания для систем с динамикой (1) и (2) согласованы между собой, вместо построения максимального стабильного моста в пространстве t, x для системы (1) можно ограничиться построением максимального стабильного моста в пространстве t, y для системы (2).

Процедуры построения максимальных стабильных мостов для дифференциальных игр (как линейных, так и нелинейных) с фиксированным моментом окончания рассматривались в работах [2–9]. Специфические алгоритмы для линейных трехмерных дифференциальных игр исследовались в работах [10–12].

Данная работа примыкает к статьям [10, 11]. Цель работы — опираясь на основные идеи алгоритма этих статей, разработать его новую версию, ориентированную на современную вычислительную технику. В перспективе планируется использовать разработанный алгоритм для создания программы построения адаптивного управления в трехмерных линейных задачах с неизвестным уровнем динамической помехи. В теоретическом плане метод

адаптивного управления изложен в [13], однако его программная реализация создана лишь для двумерного случая.

2. Попятная конструкция. Для построения максимального стабильного моста перейдем к аппроксимирующей игре, разбивая ось t с шагом Δ влево от момента θ точками t_i , где $i = 0, 1, \dots$, при этом $t_0 = \theta$. На каждом шаге замораживаем динамику системы (2). Результатом построений будут t -сечения $W_i = W(t_i) \subset R^3$ аппроксимирующего максимального стабильного моста W . Полагаем $W_0 = \tilde{M}$, где \tilde{M} — многогранник, аппроксимирующий множество M .

При попятной процедуре выпуклый многогранник W_{i+1} строим на основе выпуклого многогранника W_i . Многогранник W_i описываем при помощи опорной функции $\rho(l, W_i)$, $l \in R^3$. Поскольку на промежутке $[t_i, t_{i+1})$ динамика заморожена (игра с простыми движениями), то опорная функция $\rho(\cdot, W_{i+1})$ многогранника W_{i+1} совпадает [14] с выпуклой оболочкой функции

$$\eta_i(l) = \rho(l, F_i) - \rho(l, \Delta \cdot Q_i),$$

где

$$F_i = W_i - \Delta \cdot P_i, \quad P_i = D(t_i)P, \quad Q_i = E(t_i)Q.$$

Для непрерывной, положительно однородной, кусочно-линейной функции $\gamma: l \rightarrow \gamma(l)$ в R^3 с выпуклыми многогранными конусами линейности используем следующее представление: вводим на единичной сфере S сетку $G(\gamma)$, секторы которой определяются пересечением сферы с конусами линейности функции γ ; в каждом узле l^k сетки $G(\gamma)$ записываем значение $\gamma(l^k)$ функции γ . Выпуклая оболочка $\text{conv}(\gamma)$ функции γ есть опорная функция многогранника, получаемого пересечением полупространств $\langle l^k, y \rangle \leq \gamma(l^k)$ при переборе всех узлов l^k сетки $G(\gamma)$.

При построении опорной функции $\rho(\cdot, W_{i+1})$ требуем, чтобы все конусы линейности функции $\rho(\cdot, W_i)$ были трехгранными и, соответственно, секторы сетки $G(\rho(\cdot, W_i))$ — треугольными. Для этого нужно разбить секторы начальной сетки $G(\rho(\cdot, W_0))$ на треугольные и в дальнейшем при образовании новых сеток вводить в случае необходимости дополнительное разбиение (триангуляцию сетки).

3. Подготовительные операции для алгоритма овыпукления. Сетка $G(\rho(\cdot, F_i))$ есть результат наложения сеток $G(\rho(\cdot, W_i))$ и $G(\rho(\cdot, P_i))$. Поскольку P_i — отрезок в R^3 , то $G(\rho(\cdot, P_i))$ представляет собой окружность на сфере S — пересечение сферы с проходящей через нуль плоскостью, ортогональной P_i . При наложении сеток появляются новые узлы. Поэтому при построении сетки $G(\rho(\cdot, F_i))$ устанавливаем дополнительные связи для того, чтобы конусы линейности функции $\rho(\cdot, F_i)$ были трехгранными.

Построив сетку $G(\rho(\cdot, F_i))$, образуем новую непрерывную, положительно однородную, кусочно-линейную функцию φ_i , такую, что $G(\varphi_i) = G(\rho(\cdot, F_i))$ и $\varphi_i(l^k) = \eta_i(l^k)$ на каждом узле l^k . Таким образом, конусы линейности функции φ_i совпадают с конусами линейности функции $\rho(\cdot, F_i)$. Однако значения этих функций на узлах l^k , а тем самым, на одних и тех же конусах линейности, являются различными.

Справедливо соотношение $\text{conv}(\varphi_i) = \text{conv}(\eta_i) = \rho(\cdot, W_{i+1})$. Опираясь на него, при построении функции $\rho(\cdot, W_{i+1})$ используем не функцию η_i , а функцию φ_i , поскольку она устроена проще: ее сетка совпадает с $G(\rho(\cdot, F_i))$.

4. Алгоритм овыпукления [10, 11]. В основе алгоритма овыпукления лежит проверка локальной выпуклости на связи между двумя соседними узлами сетки. Пусть $l_1 l_2 l_3$, $l_1 l_2 l_4$ – два смежных треугольных сектора сетки $G(\gamma)$, соответствующей некоторой функции γ . Функция γ называется локально выпуклой на связи $l_1 l_2$, если склейка линейных на $\text{cone}\{l_1, l_2, l_3\}$ и $\text{cone}\{l_1, l_2, l_4\}$ ее кусков выпукла на любом малом отрезке, пересекающем $\text{cone}\{l_1, l_2\}$. Здесь $\text{cone}\{\dots\}$ – выпуклый конус с вершиной в нуле.

Пусть Z_i – проходящая через нуль плоскость, ортогональная отрезку Q_i . Локальная выпуклость функции φ_i может нарушаться только на связях, пересекающих Z_i , либо на связях, у которых оба узла принадлежат одному и тому же полупространству относительно Z_i и связаны с узлом, находящимся в другом полупространстве. Все связи сетки $G(\varphi_i)$ указанного типа заносятся в специальный набор Π (набор подозрительных связей). После заполнения набора Π проводится анализ связей из этого набора на локальную выпуклость. Если связь выпукла, то она выводится из набора Π и проверяется следующая связь. Если связь невыпукла, то производится локальное изменение текущей сетки и корректировка набора Π .

Пусть локальная выпуклость отсутствует на связи $l_1 l_2$. Локальное изменение сетки и корректировка набора Π зависят от коэффициентов λ_1 , λ_2 , которые получаются из решения уравнения $l_4 = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3$. Поскольку секторы $l_1 l_2 l_3$ и $l_1 l_2 l_4$ смежные, то $\lambda_3 < 0$. Дальнейшие действия зависят от знаков коэффициентов λ_1 , λ_2 :

1). Если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \leq 0$ ($\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 > 0$), то узел l_1 (соответственно, l_2) удаляем из рассматриваемой сетки. Из сетки, а также из набора Π удаляем все связи, содержащие узел l_1 (l_2). На сфере S получаем некоторый многоугольный сектор K , ограниченный связями измененной сетки. Разбиваем K новыми связями на треугольные секторы, не добавляя при этом новых узлов. После заполнения сектора K новыми связями заносим их в набор Π . В набор Π заносим также те из граничных связей сектора K , которых в наборе нет.

2). В случае $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ связь $l_1 l_2$ заменяем на новую связь $l_3 l_4$. Связь $l_1 l_2$ из набора Π выводим. При этом заносим в набор Π те из связей $l_1 l_3, l_3 l_2, l_2 l_4, l_4 l_1$, которых ранее в нем не было.

3). В случае $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0$ выпуклой оболочки функции φ_i не существует, т.е. $W_{i+1} = \emptyset$. Построения прекращаются.

Если в процессе овыпукления случай прекращения построений не реализуется, то процесс закончится, когда постоянно корректируемый набор Π исчерпается. Получаемая при этом функция будет локально выпуклой на всех связях своей сетки и будет совпадать с $\text{conv}(\varphi_i) = \rho(\cdot, W_{i+1})$.

5. Склейка близких нормалей. Следует отметить, что получаемые многогранные сечения W_i часто содержат (после значительного числа шагов попятной процедуры) большое количество смежных граней, нормали которых достаточно близки друг к другу. Наличие большого числа таких граней затрудняет анализ построенного сечения W_i . Для разрешения этой проблемы при реализации алгоритма вводим параметр $\alpha \geq 0$ (угол различимости), смысл которого в следующем: два узла сетки $G(\rho(\cdot, W_i))$ считаются совпадающими, если угол между ними меньше α . После слияния близких узлов сетки $G(\rho(\cdot, W_i))$ в один получается многогранник W_i с несколько более грубой структурой.

6. Элементы программы. При построении сечений W_i используются следующие алгоритмы:

- получение структуры (т.е. соотношения вершин, ребер, граней) выпуклого многогранника по заданным вершинам;
- построение графа (сетки $G(\rho(\cdot, W_0))$) выпуклого многогранника W_0 по его структуре;
- триангуляция графа;
- построение сетки $G(\rho(\cdot, F_i))$;
- построение набора Π подозрительных связей;
- удаление узла из графа и триангуляция полученного сектора;
- получение структуры выпуклого многогранника по его графу.

Реализация большинства из этих алгоритмов достаточно сложна и требует применения динамических структур данных.

Программа построения сечений W_i написана на языке С#, одним из преимуществ которого является упрощение работы с динамическими структурами данных.

7. Пример. В качестве примера рассмотрим игру с фиксированным моментом окончания θ и терминальной функцией платы ξ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + v \\ \dot{x}_2 = -kx_1 + u \end{cases} \quad (3)$$

$$|u| \leq 1, |v| \leq 1, \xi(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

При $k = 0$ динамика (3) описывает материальную точку на прямой, при $k = 1$ – конфликтно-управляемый осциллятор. Нас интересуют надграфик функции цены для различных моментов времени.

Для этого к уравнениям динамики добавим [15] соотношение $\dot{c} = 0$. Тем самым перейдем к игре третьего порядка по фазовой переменной:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + v \\ \dot{x}_2 = -kx_1 + u \\ \dot{c} = 0 \end{cases} \quad |u| \leq 1, |v| \leq 1. \quad (4)$$

Целевое множество $M \subset R^3$ выберем в виде

$$M = \{(x_1, x_2, c) : \xi(x) \leq c \leq \bar{c}\}.$$

Здесь \bar{c} – некоторое фиксированное число. После перехода от игры (4) к игре вида (2) можем применить описанный алгоритм. При выполнении вычислений полагаем $\Delta = 0.1$, $\alpha = 0$.

На рис. 1 для случая $k = 0$ показан вид снизу вдоль оси c на выпуклое множество $W(t)$, которое представляет собой срезку надграфика функции цены (3) для момента t на уровне \bar{c} . Изображения даны в координатах y_1, y_2 системы вида (2). В начальный момент $\tau = 0$ обратного времени $\tau = \theta - t$ надграфик функции цены совпадает с надграфиком функции платы ξ и является четырехгранной пирамидой. С ростом τ увеличивается количество граней. Существенное усложнение надграфика начинается с момента $\tau = 1$. Это усложнение связано с нетривиальной по своей структуре «подрезкой» надграфика функции цены вблизи центрального излома. Отметим, что для случая $k = 0$ пример исследован на промежутке $[0, 2]$ обратного времени в статье [16]. В этой работе установлено, в частности, что при $\tau \in [0, 1]$ цена игры совпадает с функцией программного максимина, т.е. имеет простую интерпретацию.

Вид снизу вдоль оси c на надграфик функции цены для случая $k = 1$ показан на рис. 2. На рис. 3, для наглядности, приведен вид «снизу-сбоку» надграфика функции цены для момента $\tau = 2.5$.

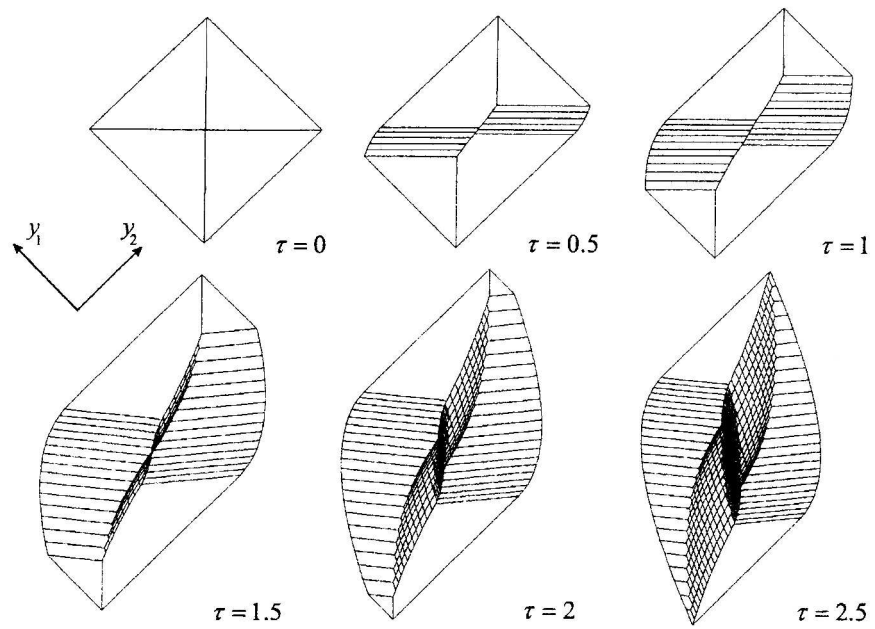


Рис. 1. Вид снизу на множество $W(t)$ для случая $k = 0$

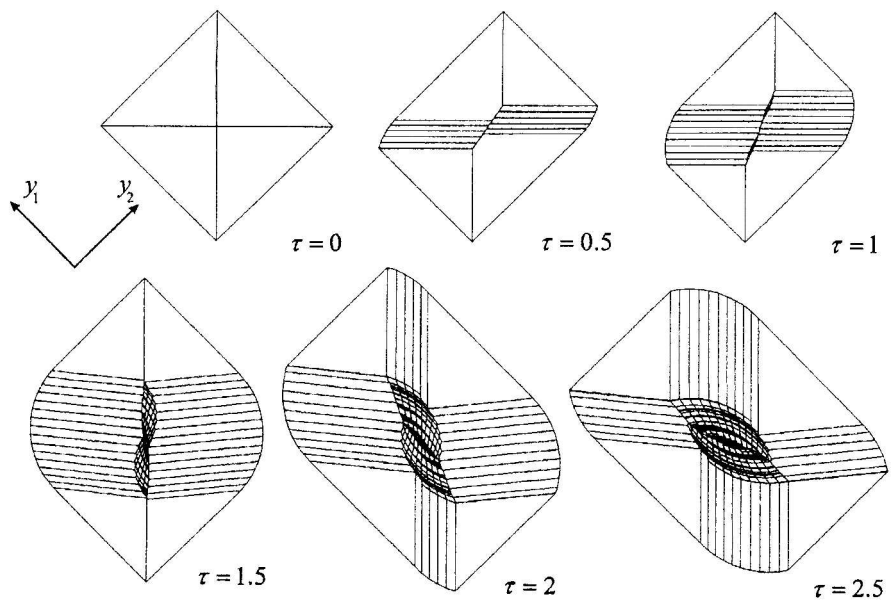


Рис. 2. Вид снизу на множество $W(t)$ для случая $k = 1$

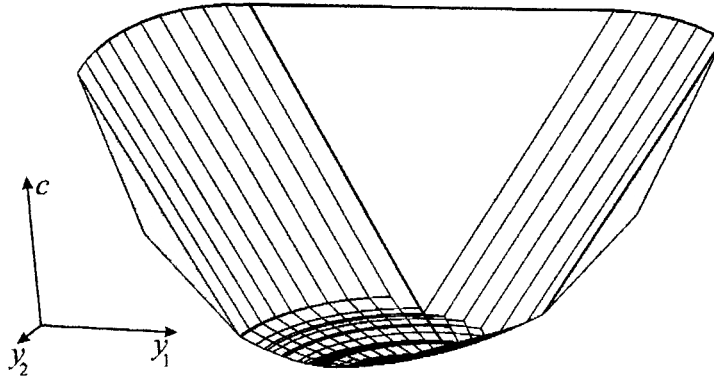


Рис. 3. Случай $k = 1$. Множество $W(t)$ на момент $\tau = 2.5$, вид «снизу-сбоку»

Литература

1. Красовский, Н. Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А. И. Субботин. М. : Наука, 1974. 456 с.
2. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / под ред. А. И. Субботина, В. С. Пацко. Свердловск, 1984. 295 с.
3. Алгоритмы численного решения линейных дифференциальных игр / Е. С. Половинкин [и др.] // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 95–122.
4. Боткин, Н. Д. Алгоритмы построения множества разрешимости в линейной дифференциальной игре высокой размерности / Н. Д. Боткин, Е. А. Рязанцева // Труды Ин-та математики и механики. Екатеринбург, 1992. Т.2. С.128–134.
5. Зарх, М. А. Построение функции цены игры в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания / М. А. Зарх, А. Г. Иванов // Труды Ин-та математики и механики. Екатеринбург, 1992. Т. 2. С.140–155.
6. Методы решения дифференциальных игр / Н. Л. Григоренко [и др.] // Мат. моделирование. 1993. С. 296–316.
7. Тарасьев, А. М. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления / А. М. Тарасьев, В. Н. Ушаков, А. П. Хрипунов // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 216–222.
8. Тарасьев, А. М. О построении множеств позиционного поглощения в игровых задачах управления / А. М. Тарасьев, В. Н. Ушаков, А. П. Хрипунов // Труды Ин-та математики и механики. Екатеринбург : УрО РАН, 1992. Т. 1. С. 160–177.
9. Ушаков, В. Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения / В. Н. Ушаков // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
10. Зарх, М. А. Построение максимальных стабильных мостов в линейной дифференциальной игре / М. А. Зарх, В. С. Пацко // Синтез оптимального управления в игровых системах. Свердловск, 1986. С. 46–61.
11. Зарх, М. А. Численное решение дифференциальной игры наведения третьего порядка / М. А. Зарх, В. С. Пацко // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. № 6. С. 162–169.
12. Тарасьев, А. М. Приближенное построение множества позиционного поглощения в линейной задаче сближения с выпуклой целью в пространстве R^3 / А. М. Тарасьев,

- А. А. Успенский, В. Н. Ушаков // Управление в динамических системах. Свердловск, 1990. С. 93–100.
13. Ганебный, С. А. Построение управления в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи / С. А. Ганебный, С. С. Кумков, В. С. Пацко // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 5. С. 753–770.
 14. Пшеничный, Б. Н. О дифференциальных играх с фиксированным временем / Б. Н. Пшеничный, М. И. Сагайдак // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
 15. Субботин, А. И. Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры / А. И. Субботин, А. М. Тарасьев // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 559–564.
 16. Тарасьев, А. М. Об одной нерегулярной дифференциальной игре / А. М. Тарасьев // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 4. С. 682–684.