

# **Investigation of Reachable Set at Instant for the Dubins Car**

Patsko V.S., Fedotov A.A.

## Preamble

## Sport car on the ground floor near this place



This is not  
a Dubins car

2

В Технионе на первом этаже одного из зданий стоит спортивная машина.  
Но это не “машина Дубинса”.

-----  
You can see a sport car on the ground floor near this place.  
But we must say that it is not a “Dubins car”.

# Why is not the Dubins car ?



May be  
the reason  
is that one wheel  
is absent ?

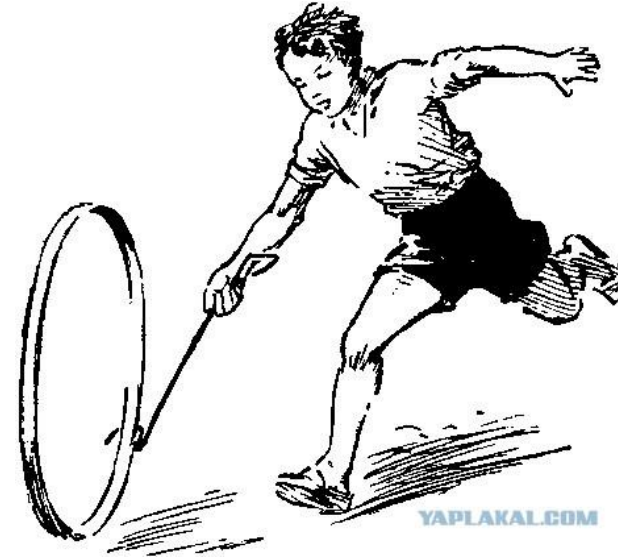
No.

3

Можно подумать, что причина в том, что одно колесо отсутствует. Нет.  
Просто это очень сложная конструкция.

-----  
You can think that the reason is that one wheel is absent. No.  
Simply, it is a very complicated mechanism.

# What is the Dubins car?



These are Dubins cars

Dubins car is the simplest model for a description of various moving objects  
(aircraft, automobile, ship, unmanned vehicle ...)

4

Устройство на левом фото ближе к понятию “машина Дубинса”.  
Но ещё ближе колесо на правом рисунке.

-----  
A device in the left photo is closer to the “Dubins car”.  
In the right picture, a wheel is much closer.

# Pioneers

1. **Markov, A.A.** (1889) *A few examples of solving special problems on the largest and smallest values*. The communications of the Kharkov mathematical society, ser. 2, vol. 1, issue 2, pp. 250 – 276 (in Russian)
2. **Isaacs, R.** (1951) *Games of pursuit*. Scientific report of the RAND Corporation, Santa Monica
3. **Dubins, L.E.** (1957) *On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents*. American Journal of Mathematics, vol. 79, no. 3, pp. 497 – 516

These are those about whom we must say when we try to remember the history of this subject

Трое учёных, которым мы должны поклониться, когда говорим о данной тематике: А.А.Марков, Р.Айзекс, Л.Дубинс.

-----

Here are three great names for our topic: A.A.Markov, R.Isaacs, and L.Dubins.

# Investigation of Reachable Set at Instant for the Dubins Car

Patsko V.S., Fedotov A.A.



Krasovskii Institute of Mathematics and  
Mechanics,  
Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia

58th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, March 14–15, 2018

6

Главная цель доклада – исследование трёхмерного множества  
достижимости в момент для машины Дубинса.

-----

The topic of our talk is a three-dimensional reachable set at given instant  
for the Dubins car.

# Dubins car dynamics

The controlled object in the plane  $x, y$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \varphi, & \varphi \in (-\infty, +\infty) \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, & u \in [u_1, u_2], \quad u_1 < u_2.\end{aligned}$$

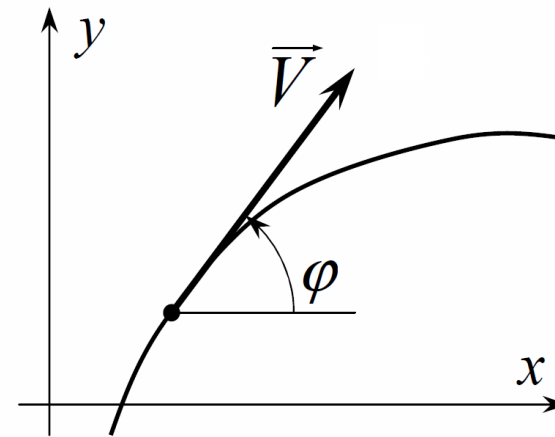
Here,  $x, y$  are geometric coordinates,

$\varphi$  is an angle of velocity heading,

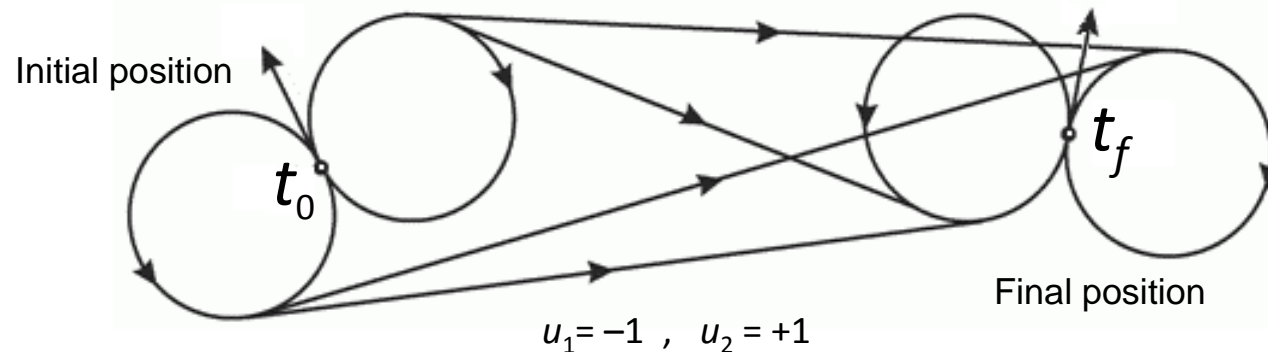
$u$  is a control.

The magnitude of linear velocity is equal to 1.

We suppose that  $u_2 = 1$ .



Coordinate system



Здесь приведена в нормированных координатах динамика машины Дубинса.

Управление  $u$  выбирается из заданного промежутка  $[u_1, u_2]$ .

Полагаем, что  $u_2 = 1$ . Угол  $\varphi$  изменяется в промежутке  $(-\infty, +\infty)$ .

-----

We consider the dynamics of Dubins car in normalized coordinates.

The control  $u$  is restricted by the constraint  $[u_1, u_2]$ . We suppose that  $u_2 = 1$ .

The angle  $\varphi$  is in the interval  $(-\infty, +\infty)$ .



## 3D-Reachable set at instant $t_f$

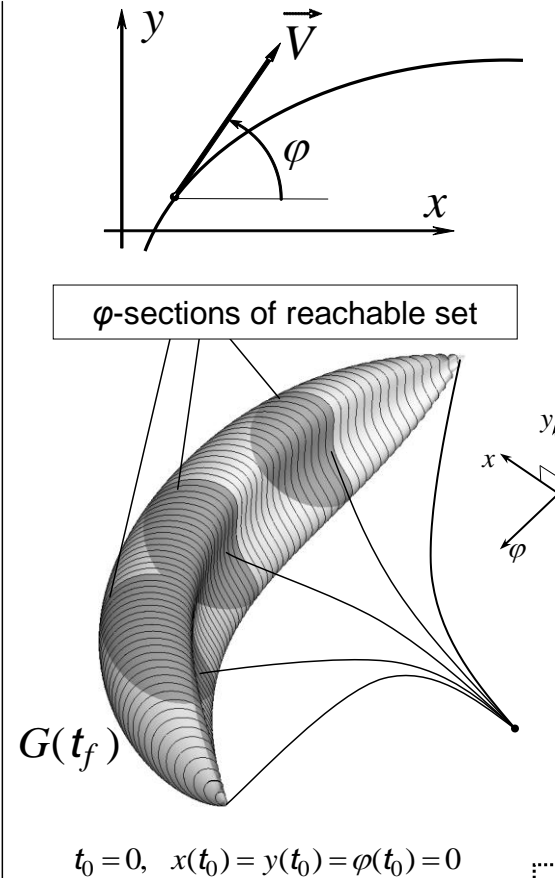
$$\begin{array}{ll} \dot{x} = \cos \varphi, & |u| \leq 1. \quad (\text{symmetric case}) \\ \dot{y} = \sin \varphi, & u \in [u_1, 1], \quad (\text{asymmetric case}) \\ \dot{\varphi} = u; & u_1 \in (-1, 0). \\ & u \in [u_1, 1], \quad (\text{case with} \\ & \quad \text{unidirectional} \\ & \quad \text{constraint of rotation}) \\ & u_1 \in [0, 1). \end{array}$$

Reachable set at instant  $t_f$ :

$$G(t_f) = \mathbf{Y}_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \\ \varphi(t_f) \end{pmatrix}$$

~~Reachable set up to instant  $t_f$ :~~

~~$$G^*(t_f) = \mathbf{Y}_{0 \leq t \leq t_f} G(t)$$~~



Множество достижимости есть совокупность всех возможных состояний рассматриваемой системы, получаемых в момент instant  $t_f$  is equal из нулевого начального фазового состояния в начальный момент  $t_0 = 0$  при переборе всех допустимых программных управлений. Подчёркиваем, что речь идёт о множестве достижимости “в момент”, а не “к моменту”. Мы вводим понятие  $\varphi$ -сечения множества достижимости.

A reachable set is a collection of all phase states of the system at the given instant  $t_f$ . The initial instant  $t_0 = 0$ . The initial phase state is equal to zero. Underline that we speak about reachable set “at instant”, but not “till (or up to) instant”. We consider the notion  $\varphi$ -section of the reachable set.



# Pontryagin's Maximum Principle

It is known [ Lee, E.B., Markus, L. ] that controls that carry a system onto the reachable set boundary satisfy the Pontryagin's Maximum Principle (PMP).

Let  $u^*(\cdot)$  be some admissible control and  $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))^T$  be the corresponding motion of Dubins car on the interval  $[t_0, t_f]$ .

Differential equations for the adjoint system :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \varphi^* - \psi_2 \cos \varphi^*. \end{cases}$$

The PMP means that a nonzero solution  $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))^T$  of the adjoint system exists, for which almost everywhere (a.e.) on the interval  $[t_0, t_f]$ , the following condition is satisfied :

$$\begin{aligned} \psi_1^*(t) \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t) \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t) u^*(t) &= \max_{u \in [u_1, u_2]} \left[ \psi_1^*(t) \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t) \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t) u \right] \\ \Rightarrow \psi_3^*(t) u^*(t) &= \max_{u \in [u_1, u_2]} \left[ \psi_3^*(t) u \right], \quad \text{a.e. } t \in [t_0, t_f] \end{aligned}$$

---

Lee, E.B., Markus, L. *Foundations of Optimal Control Theory*, Wiley and Sons, New York, 1967

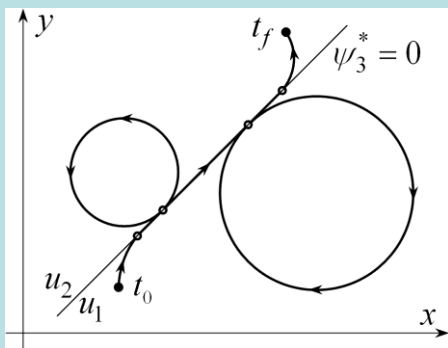
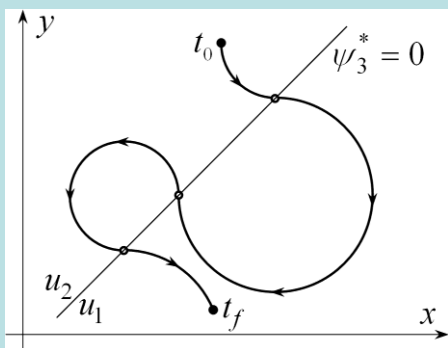
9

Известно, что управления, ведущие систему на границу множества достижимости, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина. Из этого факта можно извлечь много полезных свойств.

---

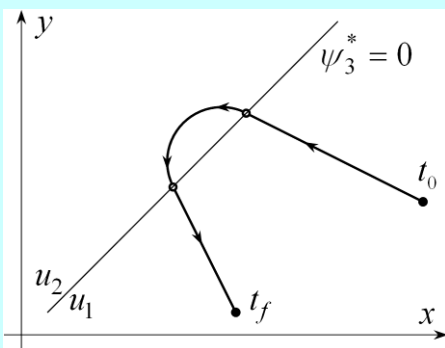
It is known that motions carrying the system onto the boundary of a reachable set satisfy the Pontryagin's Maximum Principle. And we can take many useful properties from it.

# Types of motions (trajectories $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ )



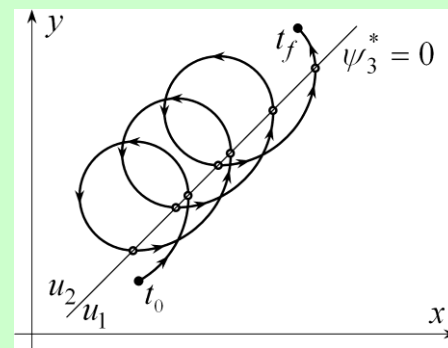
an example with  $u_1 = -0.5$

asymmetric case ( $u_1 < 0$ )



an example with  $u_1 = 0$

cases with unidirectional  
turning constraint ( $u_1 \geq 0$ )



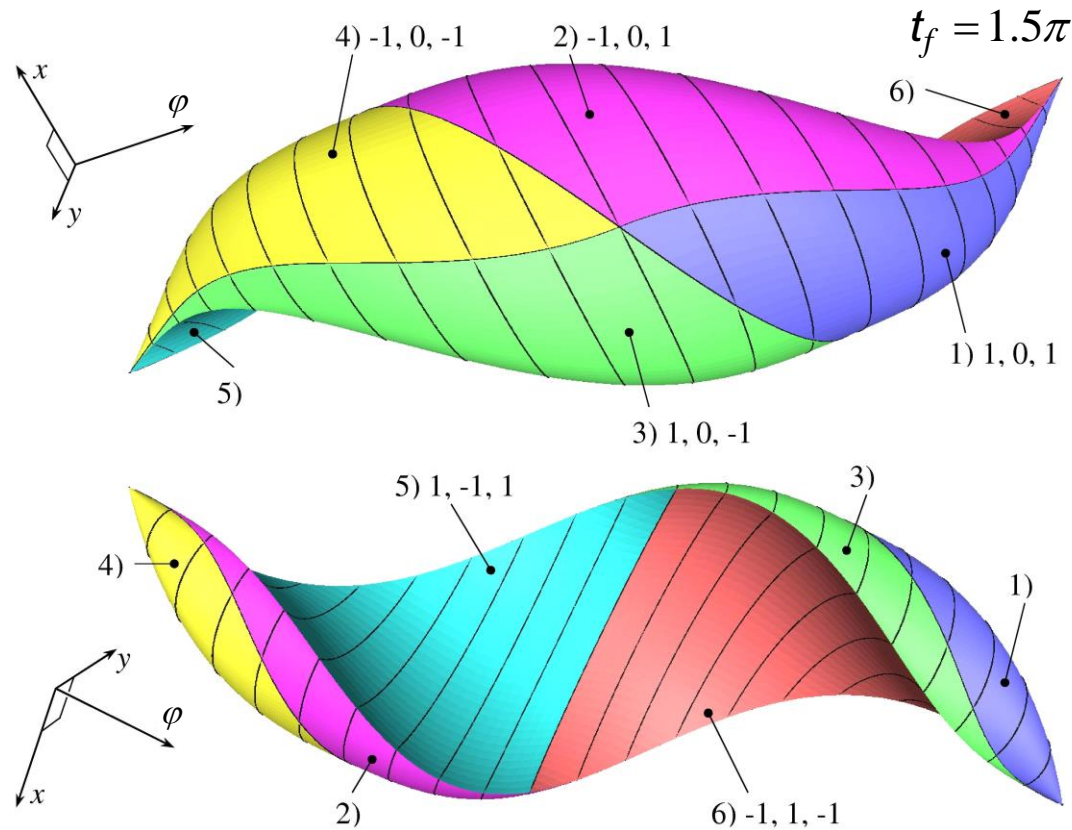
an example with  $u_1 = 0.5$

10

Здесь показаны типы движений, удовлетворяющих принципу максимума. Слева видим движения для несимметричного случая, когда  $u_1 < 0$ . В середине – движения для случая  $u_1 = 0$ . И в том, и в другом случаях возможны прямолинейные движения. В правой колонке показаны движения для  $u_1 > 0$ . В этом случае прямолинейные движения невозможны.

These are types of motions satisfying the Pontryagin's Maximum Principle. At the left, one can see motions for the asymmetric case where  $u_1 < 0$ . In the middle, motions are shown for the case where  $u_1 = 0$ . In both cases, it is possible to move in a straight line. At the right, there are motions for the case  $u_1 > 0$ . Here, a motion along a straight line is impossible.

# Reachable set $G(t_f)$ for the symmetric case



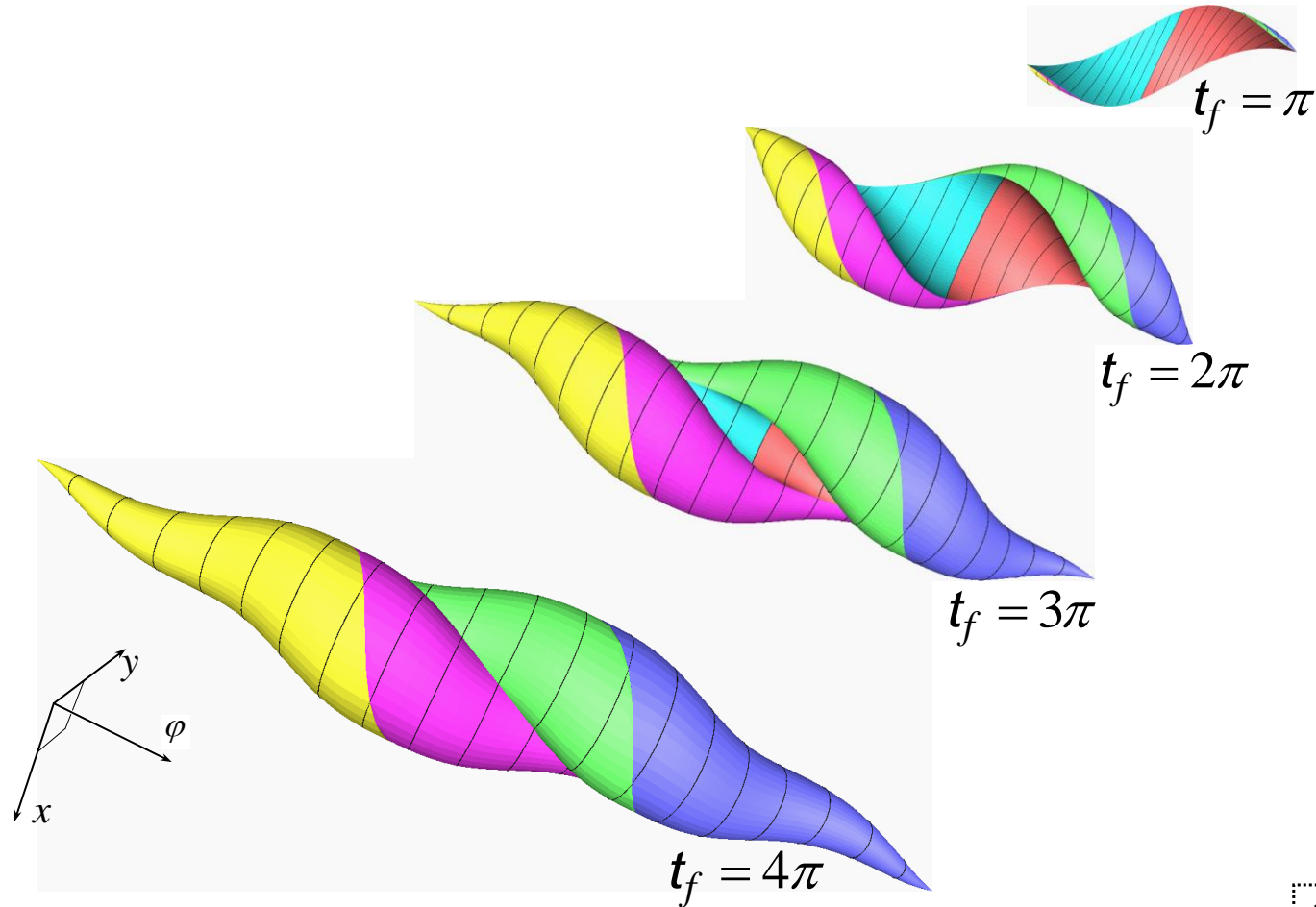
Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. (2003) *Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system*. Journal of Computer and Systems Sciences International. Vol. 42, No. 3, pp. 320–328

11

На этом слайде показано с двух ракурсов множество достижимости для  $t_f = 1.5\pi$  в симметричном случае. Возможны шесть вариантов управлений, ведущих движение на границу множества достижимости. Это наш старый результат.

In this slide, we see the reachable set for the symmetric case from two points of view. The instant  $t_f$  is equal to  $1.5\pi$ . Six variants of controls carrying the system onto the boundary of a reachable set are possible. This is our old result.

# Evolution of reachable set in the symmetric case



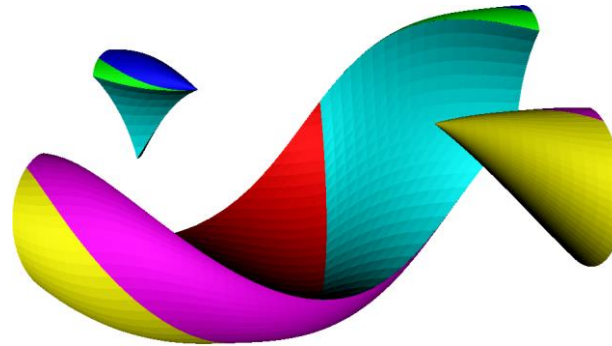
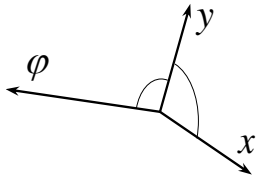
12

Здесь мы видим развитие множества достижимости во времени.  
Внешне это похоже на развитие раковины улитки.

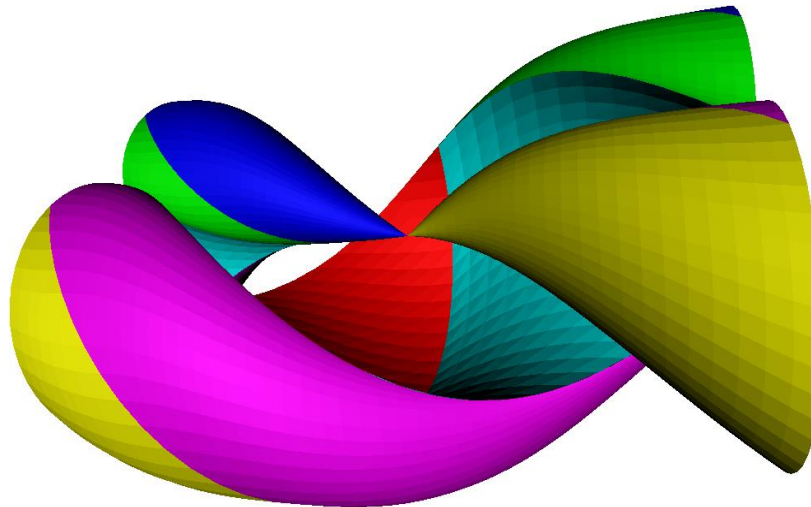
-----  
Here, one can see an evolution of the reachable set in time.  
This is similar to the development of a snail shell.

# Reachable sets with $\varphi$ computed by modulo $2\pi$ in the symmetric case

$$t_f = 1.5\pi$$



$$t_f = 2\pi$$



13

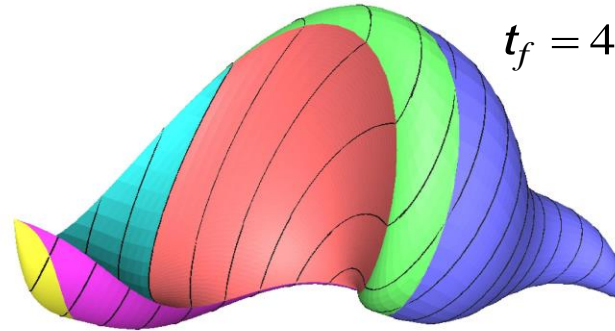
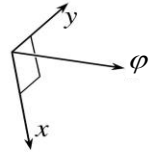
Здесь показаны два множества достижимости в ситуации,  
когда угол  $\varphi$  вычисляется по модулю  $2\pi$ .

-----  
These are the pictures of two reachable sets where  
the angle  $\varphi$  is computed by modulo  $2\pi$ .

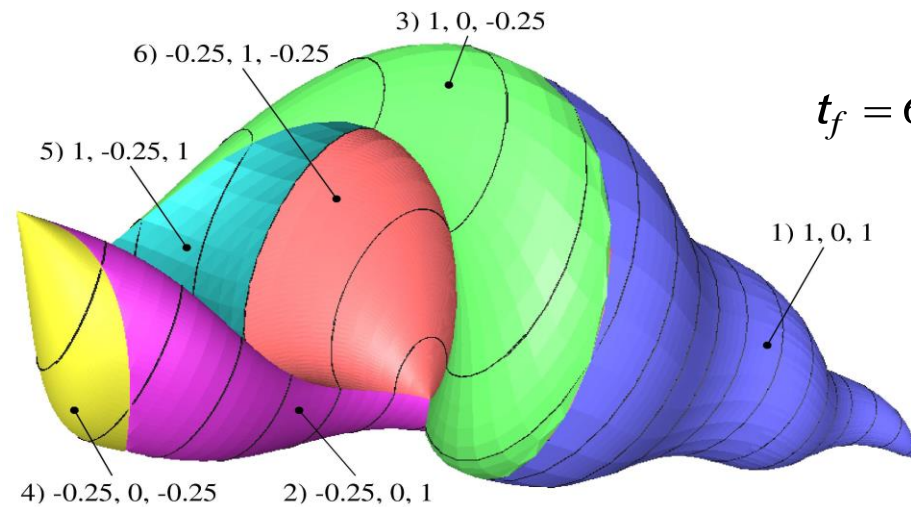
# Reachable sets in an asymmetric case

$$u \in [-0.25, 1]$$

$$t_f = 4\pi$$



$$t_f = 6\pi$$



Fedotov A. A., Patsko V. S., Turova V. L. (2011) *Reachable sets for simple models of car motion*.  
Ed.by A.V. Topalov. Rijeka: InTech Open Access Publisher, pp. 147–172

14

На этом слайде мы видим два множества достижимости для несимметричного случая, когда  $u_1 = -0.25$ .

-----  
In this slide, we see two reachable sets for the asymmetric case where  $u_1 = -0.25$ .



# 3D-Printing



Example of a stable support during printing  
for the reachable set

Starodubtsev, I.S., Fedotov, A.A.,  
Averbukh, V.L., Patsko, V.S. (2016)  
*Reachable sets for Dubins car in control  
problems: Physical visualization*  
24th International Conference in Central  
Europe on Computer Graphics,  
Visualization and Computer Vision.  
WSCG 2016, Posters Proceedings,  
Plzen, Czech Republic, pp. 49-52



Reachable sets at instant for  $t_f = 2\pi, 3\pi, 4\pi$   
(symmetric case)



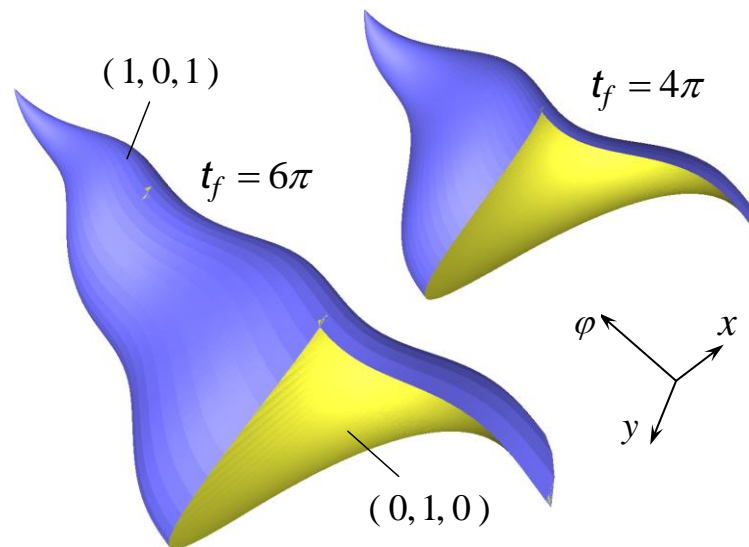
Reachable set at instant for  $t_f = 5\pi$   
(asymmetric case)

И.Стародубцев из нашего института напечатал множество достижимости при помощи 3D-принтера. Очень важным является выбор конструкции устойчивой поддержки во время печати.

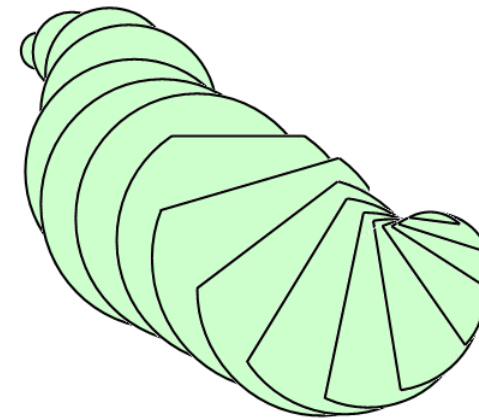
I.Staridubtsev from our Institute printed reachable sets with the help of a 3D-printer. The very important thing is a stable support during printing.



# Case $u_1=0$ (it is allowed to move in a straight line)



Two variants of controls carrying the motion onto the boundary



Convexity of  $\varphi$ -sections

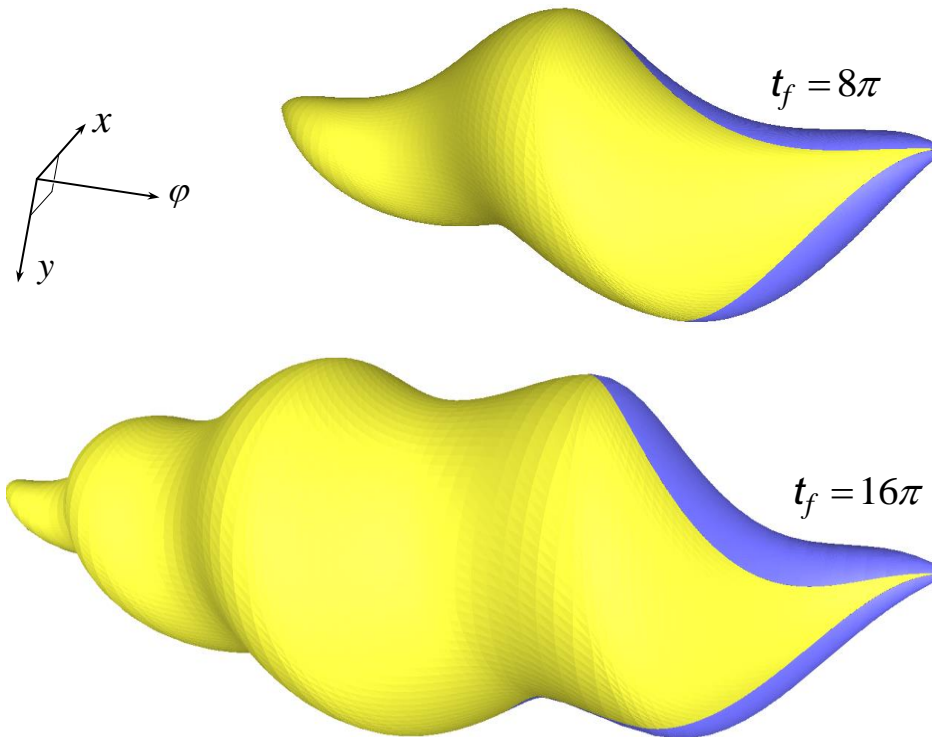
Thus, we have a description of the  $\varphi$ -sections of the reachable set that actually represents either a circular segment (for  $\varphi < 2\pi$ ) or an entire circle (for  $\varphi \geq 2\pi$ ).

В случае, когда  $u_1 = 0$ , мы имеем два варианта управлений, приводящих систему на границу множества достижимости. Каждое  $\varphi$ -сечение есть либо круг, либо круговой сегмент. Таким образом,  $\varphi$ -сечения являются выпуклыми множествами.

-----

In the case  $u_1 = 0$ , we have two variants of controls, carrying the system onto the boundary of the reachable set. Each  $\varphi$ -section is a circle or a circular segment. So, the  $\varphi$ -sections are convex.

# Case $u_1 > 0$ (it is not allowed to move in a straight line)



Convexity  
of  $\varphi$ -sections.  
It is proved  
for the case  
 $t_f \leq 2\pi$ .

Examples for  
 $u_1 = 0.5, u_2 = 1$

Two variants of controls carrying the motion  
onto the boundary:  $(u_1, u_2, u_1); (u_2, u_1, u_2)$

17

Для случая, когда  $u_1 > 0$ , выпуклость  $\varphi$ -сечений доказана при условии  $t_f \leq 2\pi$ . Мы уверены, что свойство выпуклости  $\varphi$ -сечений имеет место и при бóльших значениях  $t_f$ .

In the case where  $u_1 > 0$ , it is proved that  $\varphi$ -sections are convex if  $t_f \leq 2\pi$ . We believe that the convexity of  $\varphi$ -sections occurs for greater instants also.

## Case $u_1 > 0$ . The number of control switches

The estimate from above for the number of switches  
of the control carrying onto the boundary of the reachable set :

$$\begin{cases} \frac{t_f \cdot u_2}{\pi} , & \text{if } t_f \cdot u_2 \text{ is multiple to } 2\pi, \\ 2 \left[ \frac{t_f \cdot u_2}{2\pi} \right] + 2, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$[\dots]$  is the integer part of a real number

Здесь выписана оценка сверху числа переключений управления,  
ведущего на границу множества достижимости.

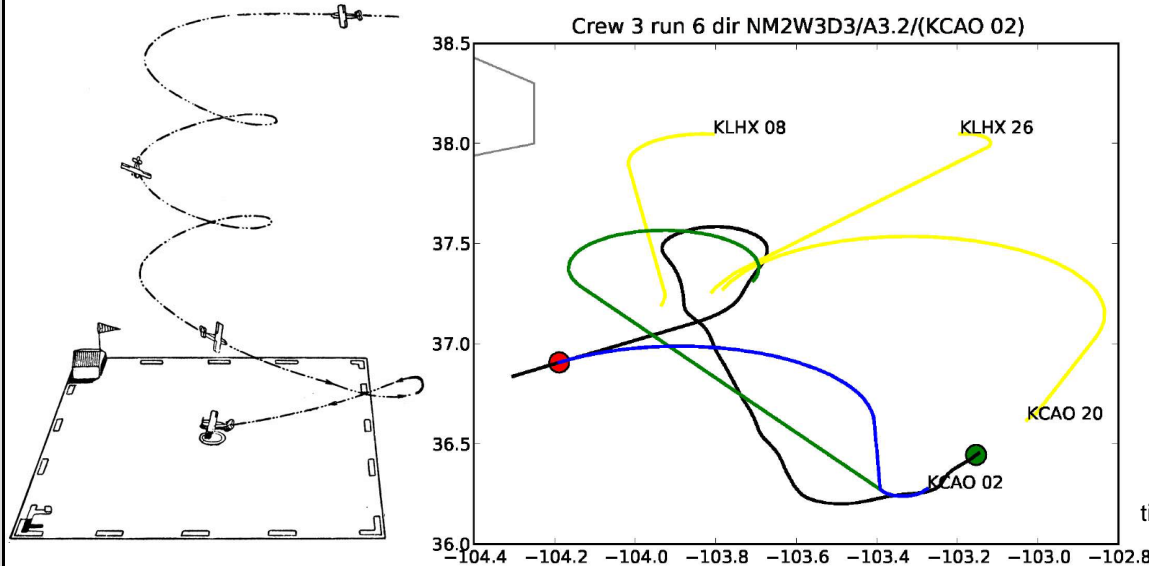
-----

This is the estimate from above for the number of switches  
of a control carrying the system onto the boundary of a reachable set.

# Cases $u_1=0$ and $u_1>0$ . Applications?

We don't know about it surely.

But there are investigations concerning aircraft landing problems with failed engines and ailerons. May be there?



*The Emergency Landing Planner Experiment*  
(2011)  
N. Meuleau,  
C. Neukom,  
C. Plaunt,  
D.E. Smith, and  
T. Smithy  
Intelligent Systems  
Division  
NASA Ames  
Research Center,  
California  
[ti.arc.nasa.gov/publications](http://ti.arc.nasa.gov/publications)

**Choi H.** Time-Optimal Paths for a Dubins Car and Dubins Airplane with a Unidirectional Turning Constraint: Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy / University of Michigan, 2014. 134 p.

19

Что можно сказать о применении движений машины Дубинса для случая  $u_1 \geq 0$ ? В настоящее время в литературе описываются исследования, связанные с вопросами посадки самолёта при полном отказе двигателей и/или при повреждённом механизме управления элеронами. Мы даём в качестве примера две ссылки: диссертация и статья с сайта NASA. Правая картинка взята из этой статьи. Когда самолёт находился в красной точке, пилот обнаружил затруднения с правым поворотом. Автоматическая система подсказала ему зелёную траекторию. Пилот реализовал чёрную траекторию, используя только левый поворот.

What about applications of the case where  $u_1 \geq 0$ ? Nowadays, there are investigations concerning aircraft landing problems with failed engines and/or ailerons. We give two references to this topic. Namely, these are PhD thesis and one paper on the site of NASA. The right picture is taken from this paper. In the red point, a pilot discovered that the right turn is complicated. An automatic system recommends him the green trajectory. The pilot realized black trajectory with the left turn only.

# References

A. Markov, R. Isaacs, L. Dubins,

T. Pecsvaradi, E. J. Cockayne, G. W. C. Hall, Yu. I. Berdyshev,

J.-P. Laumond, T. Shima, P. Tsiotras, M. Pachter, ...

Здесь перечислены фамилии некоторых учёных, рассматривавших важные прикладные проблемы с использованием модели машины Дубинса. Например, в работах T.Shima и его учеников беспилотные аппараты передвигаются как машины Дубинса.

-----

These are some scientists who considered important applied problems with Dubins car.  
By the way, many of unmanned vehicles in the papers by T.Shima and his pupils are moving as Dubins cars.