

Analytical description of three-dimensional reachable set for Dubins car

Patsko V.S., Fedotov A.A.



*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia*



**The 61st Israel Annual Conference on Aerospace Sciences,
March 9 – 10, 2022**

Слайд 1

Мы работаем в Институте математики и механики имени Н.Н.Красовского, Екатеринбург, Россия. На фотографии – центральный вход в наш Институт. Наш доклад посвящен трёхмерному множеству достижимости для модели “машина Дубинса”, а именно, аналитическому описанию множества достижимости. “Reachable set” и “reachability set” – синонимы для нас.

Slide 1

We work at the N.N.Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russia. The photo shows the central entrance to our Institute. Our report is devoted to the three-dimensional reachable set for the “Dubins car” model, namely, to the analytical description of the reachable set. “Reachable set” and “reachability set” are synonyms for us.

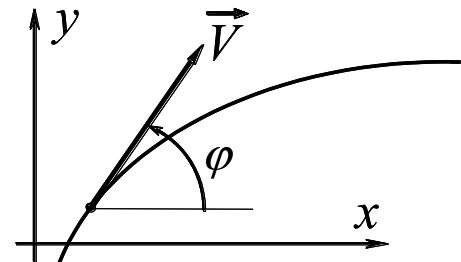
Dubins Car

$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad u_1 = -1 \quad (\text{symmetric case})$$

$$\dot{y} = \sin \varphi, \quad u_1 \in (-1, 0) \quad (\text{asymmetric case})$$

$$\dot{\varphi} = u; \quad u_1 = 0 \quad (\text{one-sided turn case})$$

$$u \in [u_1, 1]. \quad u_1 \in (0, 1) \quad (\text{strictly one-sided turn case})$$



$$\varphi \in (-\infty, +\infty)$$

The model "Dubins car" is used to approximate the dynamics of various controlled objects

A.A. Markov (1889), R. Isaacs (1951), L. Dubins (1957)

E. J. Cockayne, G. W. C. Hall, T. Pecsvaradi, Yu. I. Berdyshev, A.W. Merz,
J.-P. Laumond, P. Souéres, H.J. Sussmann, S.M. LaValle, T. Shima, M. Weiss, Z. Chen,
G. Merkulov, P. Tsiotras, E. Bakolas, M. Pachter, R. Murphrey, H. Choi, C.Y. Kaya,
M. Vendittelli, D. Casbeer, E. Garcia, M. Mitchell, C.J. Tomlin, M.E. Buzikov, A.A. Galyaev,
S. Cacace, A.S. Matveev, A.V. Savkin, Yu.L. Sachkov, A.A. Ardentov, R. Takei, R. Tsai,
N.D. Botkin, V.L. Turova, V.N. Ushakov, A.T. Becker, ...

Слайд 2

Здесь приведено стандартное кинематическое описание "машины Дубинса". Относительно левого края в задании ограничения на управление u различаем 4 случая: симметричный случай, несимметричный случай, случай одностороннего поворота и случай строго одностороннего поворота. В нашем докладе речь пойдёт о симметричном случае. Угловая координата φ изменяется в промежутке $(-\infty, \infty)$.

Конечно, в современной литературе очень много работ, связанных с анализом модели Дубинса (или близких к ней) и с использованием её при решении различных задач управления или даже игровых задач. Мы приводим далеко не полный список авторов публикаций на эту тему.

Прежде всего, мы упоминаем А.А.Маркова, Р.Айзекса и Л.Дубинса.

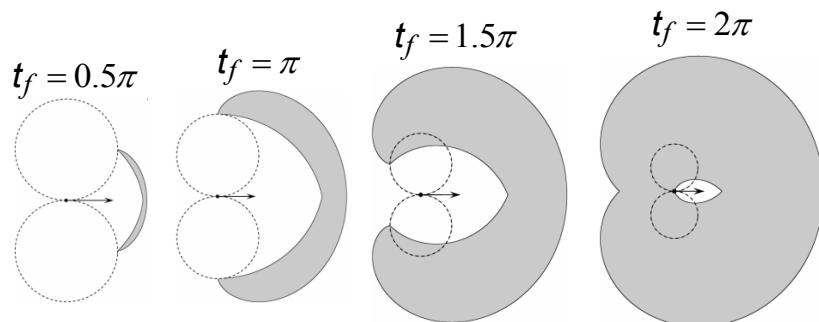
Slide 2

Here, the standard kinematic description of the "Dubins car" is shown. With respect to the left value in the specification of the constraint on the control u , we distinguish 4 cases: symmetric case, asymmetric case, one-sided turn case, and strictly one-sided turn case. In our report, we will talk only about the symmetric case. The angular coordinate φ changes in the interval $(-\infty, \infty)$.

Of course, there are a lot of works in the modern literature related to the analysis of the Dubins car model (or those close to it) and to using it in solving various control problems or even game problems. We give a far from complete list of authors of publications on this topic.

First of all, we mention A.A.Markov, R.Isaacs, and L.Dubins.

Reachable set in projection onto a geometric plane x, y



SIAM J. CONTROL
Vol. 13, No. 1, January 1975

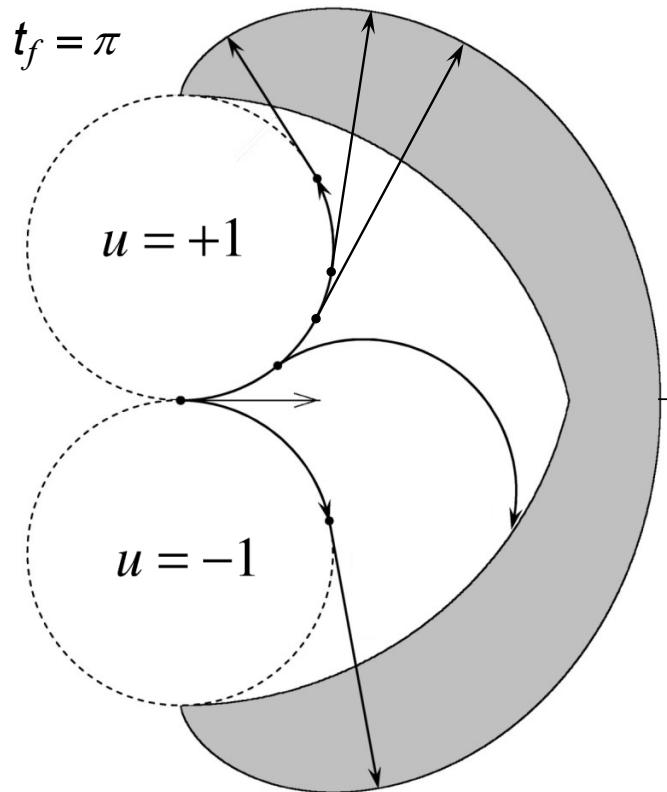
PLANE MOTION OF A PARTICLE SUBJECT TO CURVATURE CONSTRAINTS*

E. J. COCKAYNE AND G. W. C. HALL†

Abstract. A particle P moves in the plane with constant speed and subject to an upper bound on the curvature of its path. This paper studies the classes of trajectories by which P can reach a given point in a given direction and obtains, for all t , the set $R(t)$ of all possible positions for P at time t , thus extending the results of several recent authors.

Yu.I.Berdyshev

Nonlinear Problems in Sequential Control and Their Application
Ekaterinburg: IMM UB RAS, 2015, 193 p. (in Russian)



*The boundary consists
of two involutes of a circle (the frontal part)
and two cardioids (the rear part)*

Слайд 3

В замечательной статье E.J.Cockayne и G.W.C.Hall приведено аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса в геометрических координатах x, y и исследовано изменение множества достижимости во времени. Фронтальная часть границы множества достижимости представляет собой гладкую склейку двух эвольвент, тыльная часть границы складывается из двух кардиоид с негладким сочленением.

В нашем Институте Ю.И.Бердышев также работал с множеством достижимости в геометрических координатах в начале 70-х годов. Шесть лет назад он выпустил книгу с изложением своих результатов по решению различных задач управления с использованием модели Дубинса и её обобщений.

Подчеркнём, что множество достижимости в геометрических координатах x, y есть проекция трёхмерного множества достижимости (которое строится в координатах x, y, φ) на двумерную плоскость x, y .

Slide 3

In the remarkable paper by E.J. Cockayne and G.W.C. Hall, an analytical description of the reachable set for the Dubins car in geometric coordinates x, y is given and the evolution of the reachable set in time is studied. The frontal part of the reachable set boundary is a smooth junction of two involutes, the rear part of the boundary is composed of two cardioids with non-smooth joining.

At our Institute, Yu.I. Berdyshev also worked with the reachable set in geometric coordinates in the early 70s. Six years ago, he published a book presenting his results on solving various control problems using the Dubins model and its generalizations.

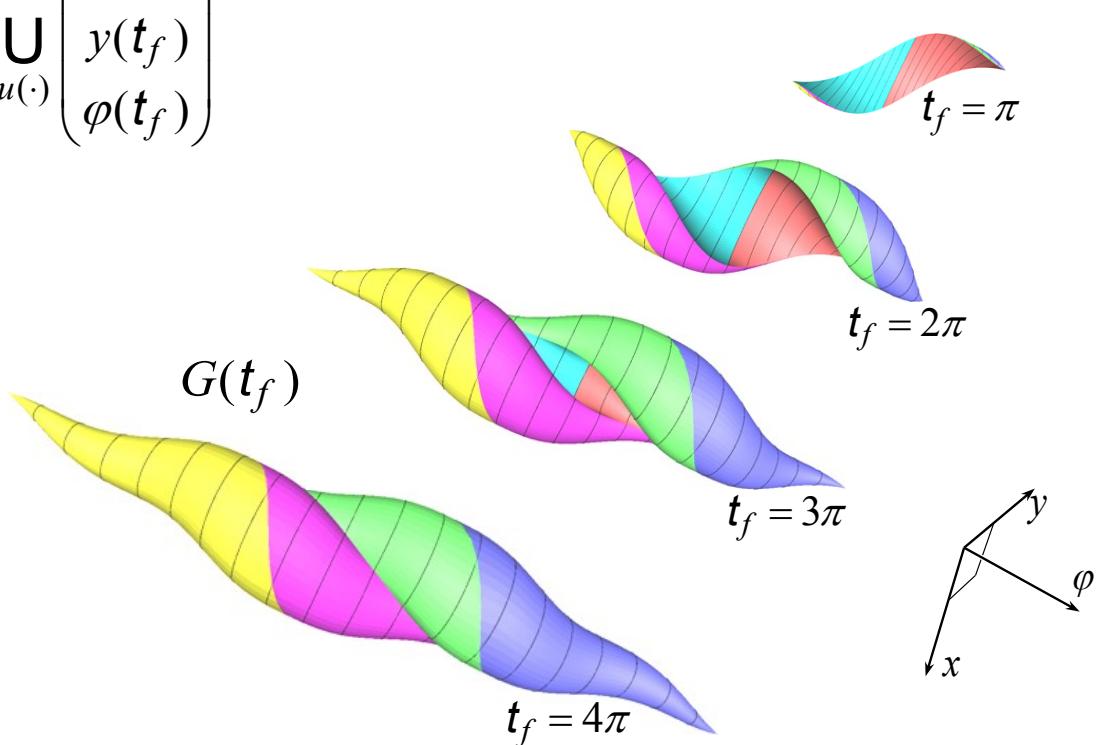
We emphasize that the reachable set in the geometric coordinates x, y is the projection of the three-dimensional reachable set (which is constructed in the coordinates x, y, φ) onto the two-dimensional plane x, y .

Three-dimensional reachable set “at the instant”

$$G(t_f) = \bigcup_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \\ \varphi(t_f) \end{pmatrix}$$

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0$$

(+1, 0, +1)
(-1, 0, +1)
(+1, 0, -1)
(-1, 0, -1)
(+1, -1, +1)
(-1, +1, -1)



$G_\varphi(t_f)$ is a φ -section

Слайд 4

На этом слайде представлено развитие во времени трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса. Напомним, что мы рассматриваем множество достижимости “в момент”. Оно является объединением всех трёхмерных фазовых состояний в зафиксированный момент времени t_f , в каждого из которых можно попасть при помощи некоторого допустимого управления.

На рисунке изображены результаты численных построений, взятых из нашей статьи 2003 года. Чтобы построить границу множества достижимости, достаточно использовать шесть типов управлений с не более чем двумя переключениями. Символ $G_\varphi(t_f)$ будет обозначать двумерное φ -сечение трёхмерного множества $G(t_f)$ по угловой координате φ . Именно такие φ -сечения нас и будут интересовать.

Не теряя общности, полагаем начальный момент и начальный фазовый вектор нулевыми.

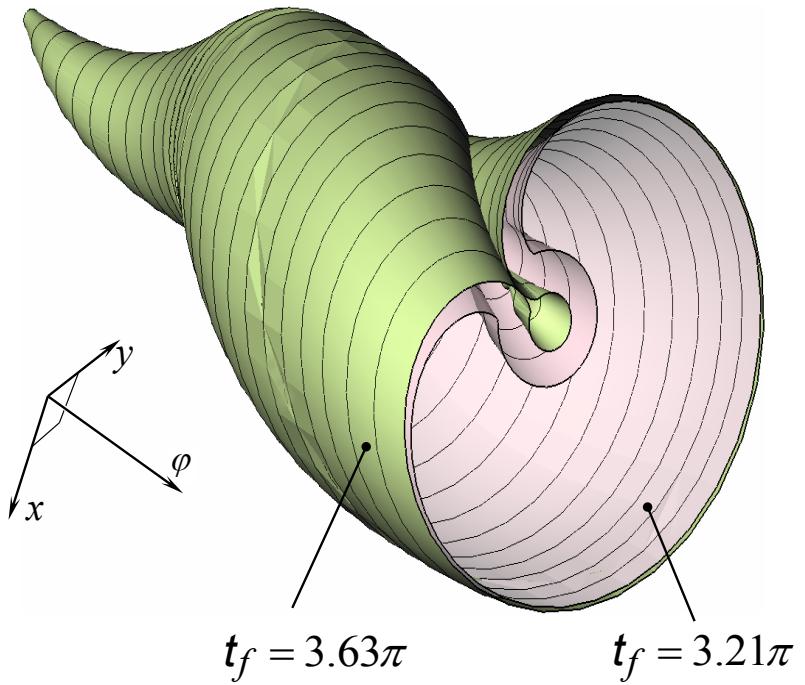
Slide 4

This slide represents the time evolution of the three-dimensional reachable set for the Dubins car. Recall that we consider the reachable set “at the instant”. It is the union of all three-dimensional phase states at a fixed time t_f , each of which can be reached with the help of some admissible control.

The figure shows the results of numerical constructions taken from our 2003 paper. To construct the boundary of the reachable set, it is sufficient to use six control types with no more than two switchings. The symbol $G_\varphi(t_f)$ will denote the two-dimensional φ -section of the three-dimensional set $G(t_f)$ by the angular coordinate φ . Namely, these φ -sections will be interested for us.

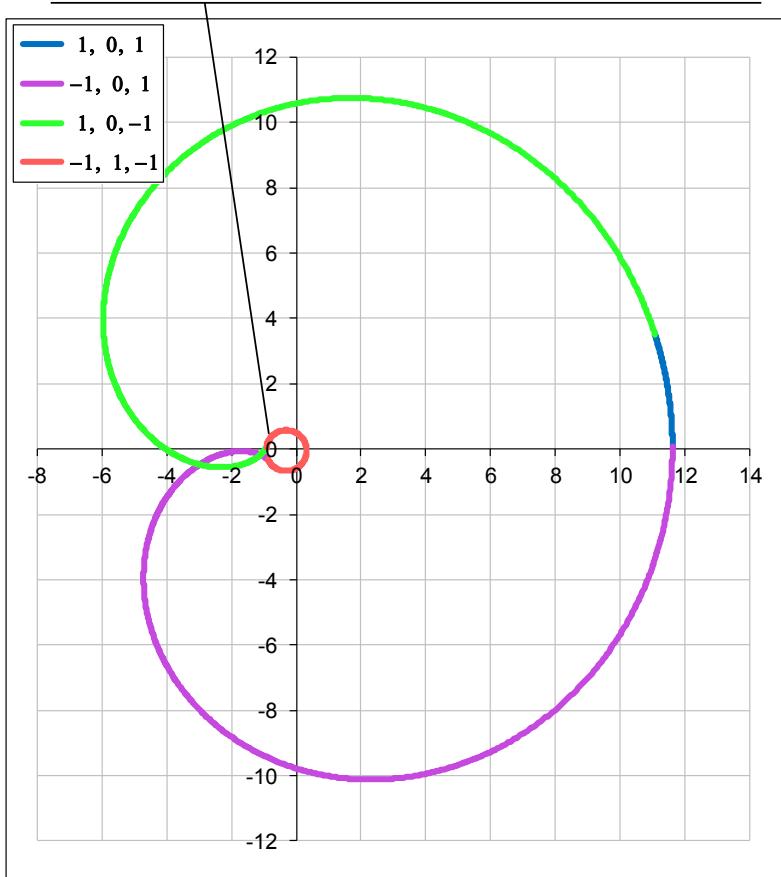
Without loss of generality, we assume that the initial instant and the initial phase vector are zero.

Violation of simple connectedness of the reachable set



The plane of cross-section corresponds to $\varphi = 0$

This domain does not belong to the φ -section
of the reachable set



φ -section of the reachable set
for $\varphi = 0.1\pi$ and $t_f = 3.7\pi$

Слайд 5

Из результатов численных построений мы знаем, что некоторые φ -сечения могут быть неодносвязными. На рисунке справа показан пример такого φ -сечения. Здесь центральная область не принадлежит φ -сечению. Трёхмерное множество достижимости также может быть неодносвязным. Соответствующий пример показан на рисунке слева.

Slide 5

From the results of numerical constructions, we know that some φ -sections may be non-simply connected. The figure on the right shows an example of such a φ -section. Here, the central area does not belong to the φ -section. A three-dimensional reachable set can also be non-simply connected. The corresponding example is shown in the left figure.

Pontryagin Maximum Principle

It is known [Lee, E.B., Markus L.] that controls that carry a system onto the reachable set boundary satisfy the PMP.

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos\varphi, \\ \dot{y} = \sin\varphi, \\ \dot{\varphi} = u; \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dynamic description} \\ \text{of Dubins car} \end{array}$$

$u \in [u_1, u_2], \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 1$

Reachable set at the instant t_f :

$$G(t_f) = \bigcup_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \\ \varphi(t_f) \end{pmatrix}$$

Let $u^*(\cdot)$ be some admissible control and

$(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))^T$ be the corresponding motion

of Dubins car on the interval $[t_0, t_f]$

Differential equations of the adjoint system :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \varphi^* - \psi_2 \cos \varphi^*. \end{cases}$$

We have $\psi_1^*(\cdot) = \text{const}, \quad \psi_2^*(\cdot) = \text{const.}$

Слайд 6

В книге E.B. Lee и L. Markus сформулирована и доказана теорема о том, что любое программное управление и соответствующее ему движение, ведущее на границу множества достижимости, удовлетворяют принципу максимума Понtryагина. Вид сопряжённой системы для модели Дубинса очень прост.

Slide 6

In the book by E.B. Lee and L. Markus, a theorem is formulated and proved that any open-loop control and its corresponding motion leading to the boundary of the reachable set satisfy the Pontryagin maximum principle. The type of conjugate system for the Dubins model is very simple.

Pontryagin Maximum Condition

The PMP means that a nonzero solution $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))^T$ of the adjoint system exists, for which almost everywhere (a.e.) on the interval $[t_0, t_f]$, the following condition is satisfied :

$$\begin{aligned} \psi_1^*(t)\cos\varphi^*(t) + \psi_2^*(t)\cos\varphi^*(t) + \psi_3^*(t)u^*(t) &= \max_{u \in [u_1, u_2]} [\psi_1^*(t)\cos\varphi^*(t) + \psi_2^*(t)\cos\varphi^*(t) + \psi_3^*(t)u] \\ \Rightarrow \quad \psi_3^*(t)u^*(t) &= \max_{u \in [u_1, u_2]} [\psi_3^*(t)u], \text{ a.e. } t \in [t_0, t_f] \end{aligned}$$

1. If $\psi_1^* = 0$ and $\psi_2^* = 0$, then $\psi_3^*(\cdot) = \text{const} \neq 0$ on the interval $[t_0, t_f]$.

Therefore, we have a.e. $u^*(t) = u_1$ or $u^*(t) = u_2$.

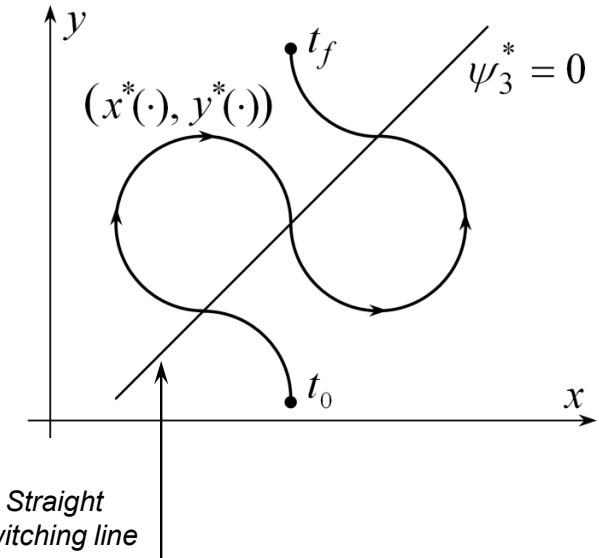
2. Let at least one of the numbers ψ_1^* and ψ_2^* is non-zero.

Using the equations of dynamics and adjoint system equations, one can write

$$\psi_3^*(t) = \psi_1^*y^*(t) - \psi_2^*x^*(t) + C.$$

Therefore, $\psi_3^*(t) = 0$ iff the point $(x^*(t), y^*(t))^T$ of the geometric position at the instant t obeys the straight line equation

$$\psi_1^*y - \psi_2^*x + C = 0.$$



Слайд 7

Здесь выписана формула принципа максимума, из которой следует, что управление $u^*(\cdot)$, ведущее на границу, определяется в каждый момент t знаком третьей компоненты $\psi_3^*(t)$ вектора $\psi^*(t)$ сопряжённой системы. Если управление $u^*(\cdot)$ имеет два или более переключений, то возникает прямая переключения. Прямая переключения не является универсальной. Для каждого движения, ведущего на границу, прямая переключения своя.

Отмеченные на этом и на предыдущем слайдах факты являются простейшими. Они непосредственно следуют из записи принципа максимума Понtryгина. Эти соотношения позволяют также говорить о конечном числе переключений для каждого кусочно-постоянного управления, ведущего на границу множества достижимости.

Slide 7

Here, we write out the formula of the maximum principle, from which it follows that the control $u^*(\cdot)$ leading to the boundary is determined at each instant t by the sign of the third component $\psi_3^*(t)$ of the vector $\psi^*(t)$ of the conjugate system. If the control $u^*(\cdot)$ has two or more switches, then a switching line occurs. Note that straight switching line is not universal. For each motion leading to the boundary, the switching line is different.

The facts noted on this and previous slides are the simplest. They directly follow from the relations for the Pontryagin maximum principle. These relations also allow us to talk about a finite number of switches for each piecewise-constant control leading onto the boundary of the reachable set.

Controls generating the boundary of three-dimensional reachable set

Theorem. Any boundary point of the reachable set for system

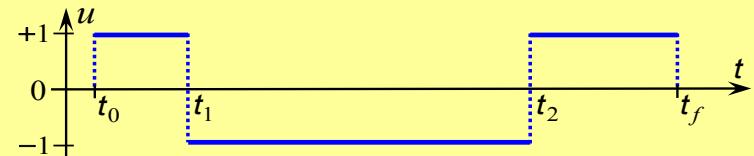
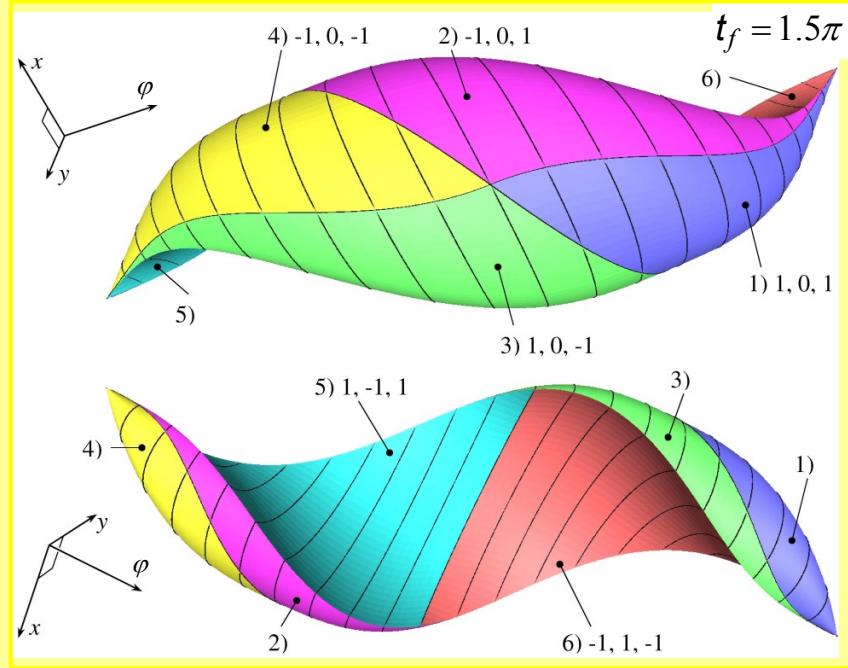
$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad \dot{y} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = u; \quad |u| \leq 1$$

can be reached by means of a piecewise-constant control with no greater than two switching instants. In the case of two switchings, it is sufficient to consider 6 sequences of the control values, namely,

- 1) +1, 0, +1; 2) -1, 0, +1; 3) +1, 0, -1;
- 4) -1, 0, -1; 5) +1, -1, +1; 6) -1, +1, -1.

Note: in the cases 5), 6), we can restricted by the motions that satisfy the inequality (Lemma 2)

$$(t_1 - t_0) + (t_f - t_2) \leq (t_2 - t_1)$$



Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. (2003) Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. Journal of Computer and Systems Sciences International. Vol. 42, No. 3, pp. 320–328

Dubins L.E. (1957) On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. American J. Math. Vol. 79, no. 3. P. 497–516.

Слайд 8

На этом слайде мы приводим формулировку нашей теоремы из статьи 2003 года, определяющей управления, ведущие на границу множества достижимости *в момент* для машины Дубинса. Эти шесть типов совпадают с управлениями, указанными в статье Л.Дубинса, связанной с задачей быстродействия. Отличие заключается в дополнительном условии, которое должно выполняться для управлений типа 5) и 6). Это условие означает, что продолжительность среднего участка постоянства управления должна быть не меньше, чем суммарная продолжительность первого и третьего участков.

В предыдущих наших работах мы использовали эту теорему для численного построения границы множества достижимости. Поскольку движения в силу каждого из шести типов управлений интегрируются в явном виде, мы используем это как основу для аналитического исследования φ -сечений трёхмерного множества достижимости.

Slide 8

On this slide, we present the formulation of our theorem from the paper of 2003, which determines the controls leading to the boundary of the reachable set *at the instant* for the Dubins car. These six types coincide with the controls indicated in the paper by L.Dubins related to the time-optimal problem. The difference lies in an additional condition that must be satisfied for controls of types 5) and 6). This condition means that the duration of the average interval of the control constancy must not be less than the total duration of the first and third intervals.

In our previous papers, we used this theorem to numerically construct the boundary of the reachable set. Since motions are explicitly integrated due to each of the six types of controls, now we use it as a basis for an analytical study of φ -sections of the three-dimensional reachable set.

Classification of φ -sections of three-dimensional reachable set

- I. $0 \leq \varphi < t_f, \quad t_f < 4\pi - \varphi, \quad t_f < 3\pi + 2 \cos(\varphi/2).$
- II. $0 \leq \varphi < \pi, \quad t_f < 4\pi - \varphi, \quad t_f \geq 3\pi + 2 \cos(\varphi/2).$
- III. $0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t_f \geq 4\pi - \varphi.$
- IV. $2\pi \leq \varphi < t_f.$
- V. $\varphi = t_f.$

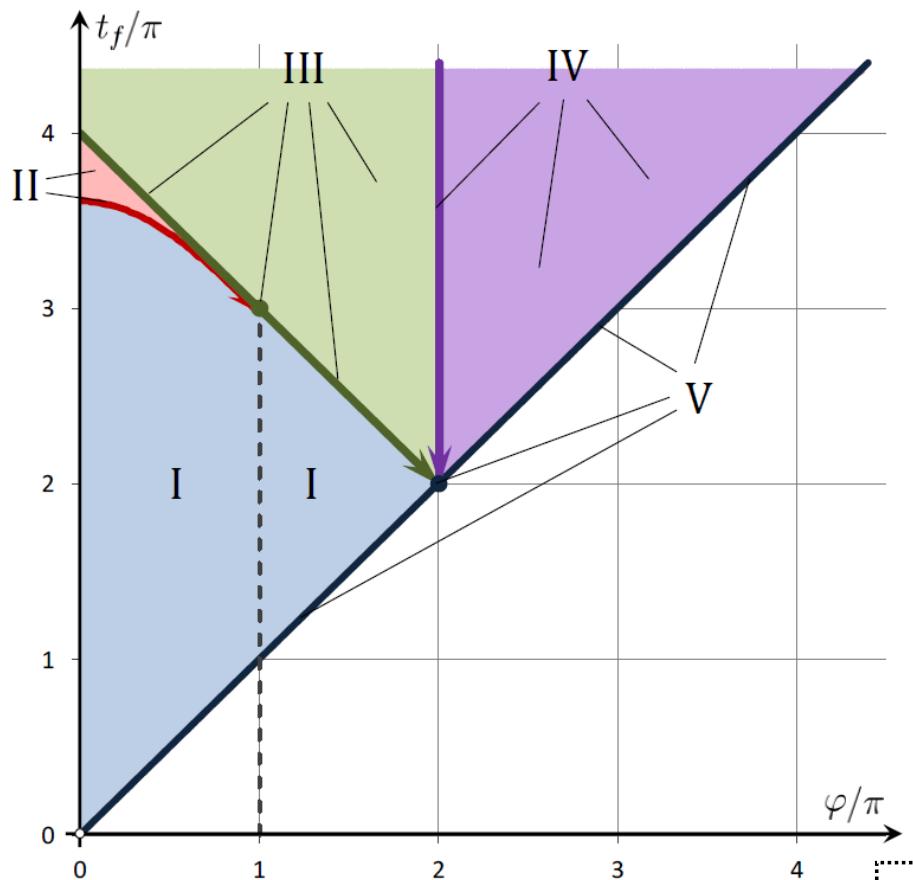
*The symmetry property
to cover the case $\varphi < 0$:*

If $u_*(t) = -u^*(t),$

then $x_*(t_f) = x^*(t_f),$

$y_*(t_f) = -y^*(t_f),$

$\varphi_*(t_f) = -\varphi^*(t_f).$



Слайд 9

Вплоть до этого слайда была вводная часть нашего доклада. Сейчас мы переходим к изложению новых результатов. На плоскости φ, t_f мы выделяем пять множеств, для каждого из которых структура φ -сечений одна и та же. Классификация показана для неотрицательных значений φ . Специфика кинематического описания машины Дубинса проявляется в симметрии движений системы при смене знака управления $u(\cdot)$. Поэтому для отрицательных значений φ получаем симметричную относительно вертикальной оси картину классификации φ -сечений.

Самым простым в классификации является случай V. Здесь каждое φ -сечение вырождается в точку.

Далее переходим к рассмотрению случаев I–IV.

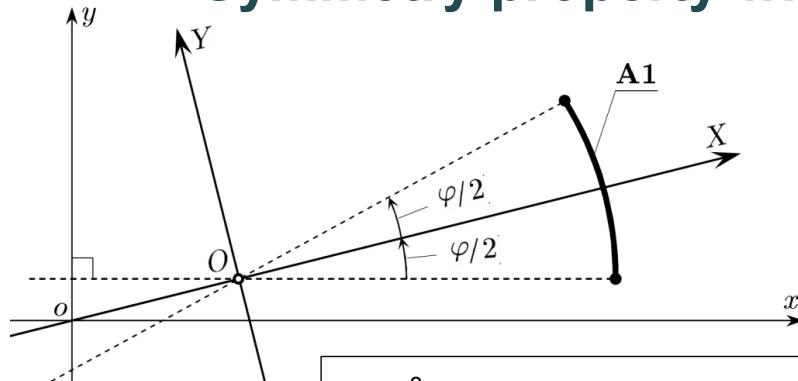
Slide 9

Up to this slide there was an introductory part of our report. Now, we turn to the presentation of new results. On the plane φ and t_f , we distinguish five sets, for each of which the structure of φ -sections is the same. The classification is shown for non-negative values φ . Specifics of the kinematic description of the Dubins car is revealed in the symmetry of the system motions when the sign of the control $u(\cdot)$ is changed. Therefore, for the negative values φ , we obtain a picture of the classification that is symmetric to shown one with respect to the vertical axis.

The simplest case in the classification is number V. Here, each φ -section degenerates into a point.

Next, we turn to the consideration of cases I–IV.

Auxiliary coordinate system X, Y . Symmetry property with respect to the axis X



$$\varphi = \pi/4$$

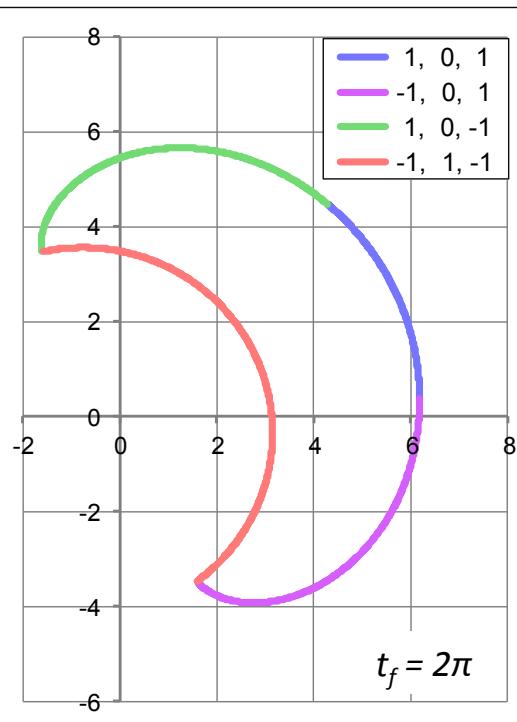
four types of curves :

A1 : $+1, 0, +1$

A2 : $-1, 0, +1$

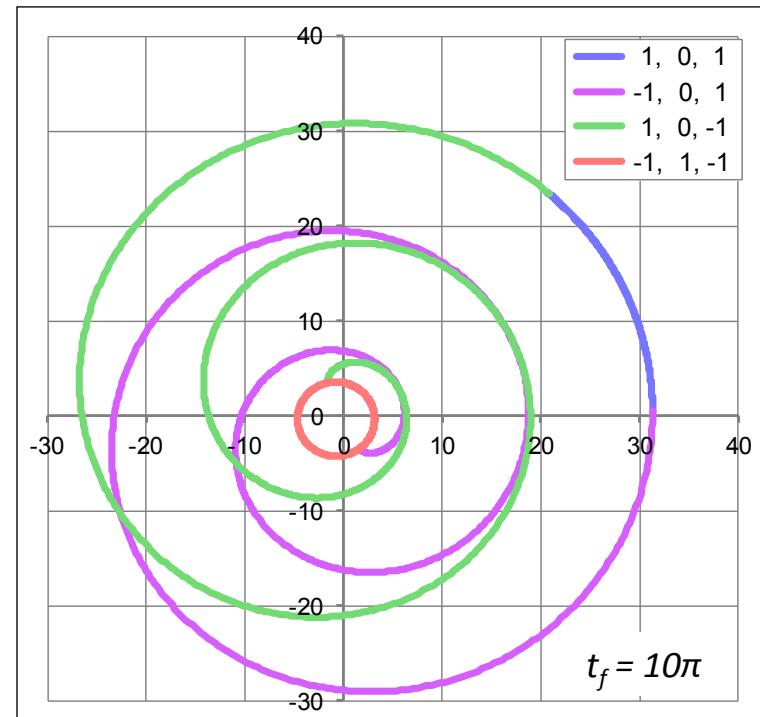
A3 : $+1, 0, -1$

A6 : $-1, +1, -1$



$$t_f = 2\pi$$

For any t_f and $\varphi \geq 0$, φ -section is symmetric with respect to the axis X of the auxiliary coordinate system X, Y . The axis X passes through the origin of the original system x, y .



$$t_f = 10\pi$$

Слайд 10

Если $\varphi \geq 0$, то для описания границы множества достижимости достаточно оставить только четыре типа управлений: 1), 2), 3), 6). При фиксированном φ каждый из них даёт однопараметрическую кривую на плоскости геометрических координат x, y . Соответствующие кривые обозначим A1, A2, A3, A6. Взяв эти кривые в последовательности A1, A3, A6, A2, получаем непрерывную замкнутую кривую, которая содержит в себе границу φ -сечения. Примеры показаны в нижней части слайда. При малых значениях t_f имеем замкнутую кривую без самопересечений (рис. слева). С ростом t_f рассматриваемая замкнутая кривая усложняется и количество её самопересечений растёт (рис. справа). В таком случае задача выделения участков кривых, лежащих на границе φ -сечения, существенно усложняется.

Анализируя введённую замкнутую кривую, убеждаемся в её симметрии относительно оси X некоторой вспомогательной системы координат X, Y (верхняя часть слайда). Вспомогательная система координат зависит только от значения φ . Её ось X проходит через начало исходной системы координат.

При дальнейшем анализе будут использоваться формулы записи кривых A1, A2, A3, A6 во вспомогательной системе координат.

Slide 10

If $\varphi \geq 0$, then it is enough to take only four types of controls to describe the boundary of the reachable set: 1), 2), 3), and 6). With a fixed φ , each of them determines a one-parameter curve on the plane of geometric coordinates x, y . The corresponding curves are denoted as A1, A2, A3, and A6. Taking these curves in the sequence A1, A3, A6, and A2, we obtain a continuous closed curve that contains the boundary of the φ -section. Examples are shown at the bottom of the slide. For small values t_f , we have a closed curve without self-intersections (fig. on the left). As t_f increases, the closed curve under consideration becomes more complicated and the number of its self-intersections grows (fig. on the right). In this case, the problem of selecting segments of curves lying on the boundary of the φ -section becomes much more complicated.

Analyzing the introduced closed curve, we are convinced of its symmetry with respect to the axis X of some auxiliary coordinate system X, Y (upper part of the slide). The auxiliary coordinate system depends only on the value φ . The axis X passes through the origin of the original coordinate system.

Further analysis will use the formulas for writing curves A1, A2, A3, and A6 in the auxiliary coordinate system.

The curves A2 and A3 are involutes of circles

$$\begin{array}{ll} s_2 = -t_1 & s_2 \in [-\theta, 0] \\ s_3 = t_1 - \varphi & s_3 \in [0, \theta] \end{array} \quad \theta = (t_f - \varphi)/2$$

$$A2(s_2) = \begin{pmatrix} X_{U_2}(s_2) \\ Y_{U_2}(s_2) \end{pmatrix} = 2(\theta + s_2) \begin{pmatrix} \cos\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} - 4 \sin\left(\frac{s_2}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$A3(s_3) = \begin{pmatrix} X_{U_3}(s_3) \\ Y_{U_3}(s_3) \end{pmatrix} = 2(\theta - s_3) \begin{pmatrix} \cos\left(s_3 + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(s_3 + \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} + 4 \sin\left(\frac{s_3}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

After trigonometric transformations,
we obtain a parametric representation of each of the
curves A2 and A3 in the form of an involute of a circle:

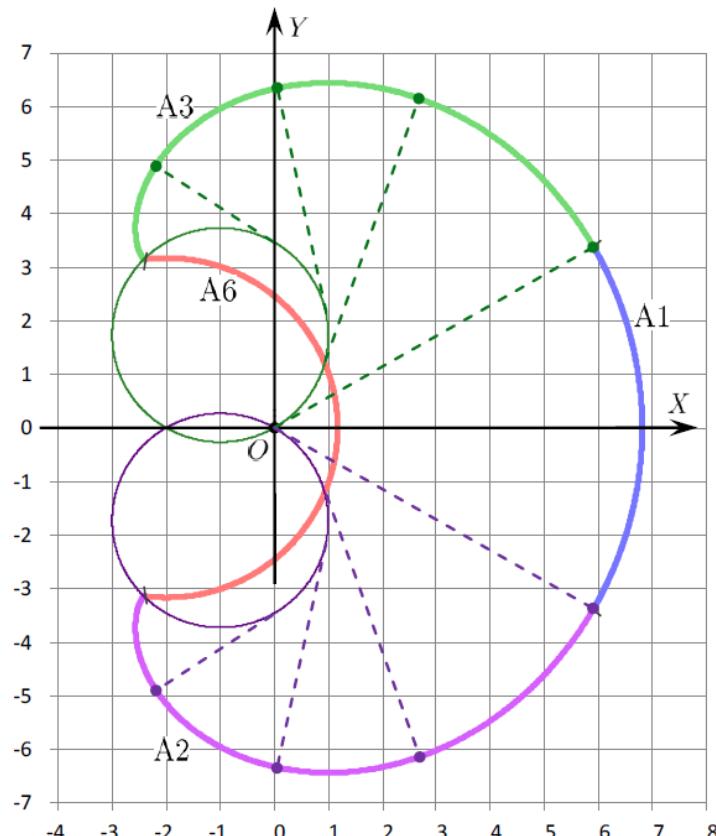
$$X(\tau) = r \cos \tau + r\tau \sin \tau,$$

$$Y(\tau) = r \sin \tau + r\tau \cos \tau.$$

Here, r is a base circle radius, τ is a parameter
(the angle of rotation of the generating straight line).

For curve A2, we have $r = 2$, $\tau = \theta + s_2$,
the center of base curve is $2(-\sin(\varphi/2), -\cos(\varphi/2))^T$.

For curve A3 : $r = 2$, $\tau = \theta - s_3$,
the center of base curve is $2(-\sin(\varphi/2), \cos(\varphi/2))^T$.



$$t_f = 2.5\pi \quad \varphi = \pi/3$$

Dashed lines are not trajectories

Слайд 11

Здесь в верхней части слайда приведены формулы параметрического представления кривых A2 и A3 во вспомогательной системе координат. Кривая A2 задаётся при помощи параметра s_2 , а кривая A3 при помощи параметра s_3 . Используя тригонометрические преобразования, каждую из двух кривых можно записать в стандартной форме, соответствующей эвольвенте окружности. В обоих случаях радиус базовой окружности равен 2. Однако центры этих окружностей, вообще говоря, не совпадают.

На рисунке справа для значений $t_f = 2.5\pi$, $\varphi = \pi/3$ показаны эвольвенты A2, A3 вместе с их базовыми окружностями и порождающими прямыми. Порождающие прямые изображены пунктиром. В целом, каждая порождающая кривая (складывается из дуги базовой окружности и порождающей прямой) не является экстремальной траекторией, удовлетворяющей принципу максимума Понtryгина. Мы лишь интерпретируем кривые A2 и A3 как эвольвенты окружности с целью обоснования нужных нам геометрических свойств этих кривых. В этом состоит отличие от рассмотренной выше проекции трёхмерного множества достижимости на плоскость x, y .

Отметим, что кривые A1 и A6 – это всегда дуги окружностей.

Таким образом, граница любого φ -сечения складывается из некоторых дуг окружностей и некоторых участков эвольвент.

Для указанных в подписи к рисунку значений t_f и φ граница φ -сечения включает в себя целиком кривые A1, A3, A6, A2.

Slide 11

Here, at the top of the slide, formulas for parametric representation of the curves A2 and A3 in the auxiliary coordinate system are given. The curve A2 is determined with the help of the parameter s_2 , and the curve A3 is given by the parameter s_3 . Using trigonometric transformations, each of these two curves can be written in the standard form corresponding to the involute of the circle. In both cases, the radius of the base circle equals 2. However, the centers of these base circles, generally speaking, do not coincide.

In the figure on the right, the involutes A2 and A3 are shown together with their base circles and with generating straight lines for the values $t_f = 2.5\pi$ and $\varphi = \pi/3$. Generating straight lines are shown by dashed

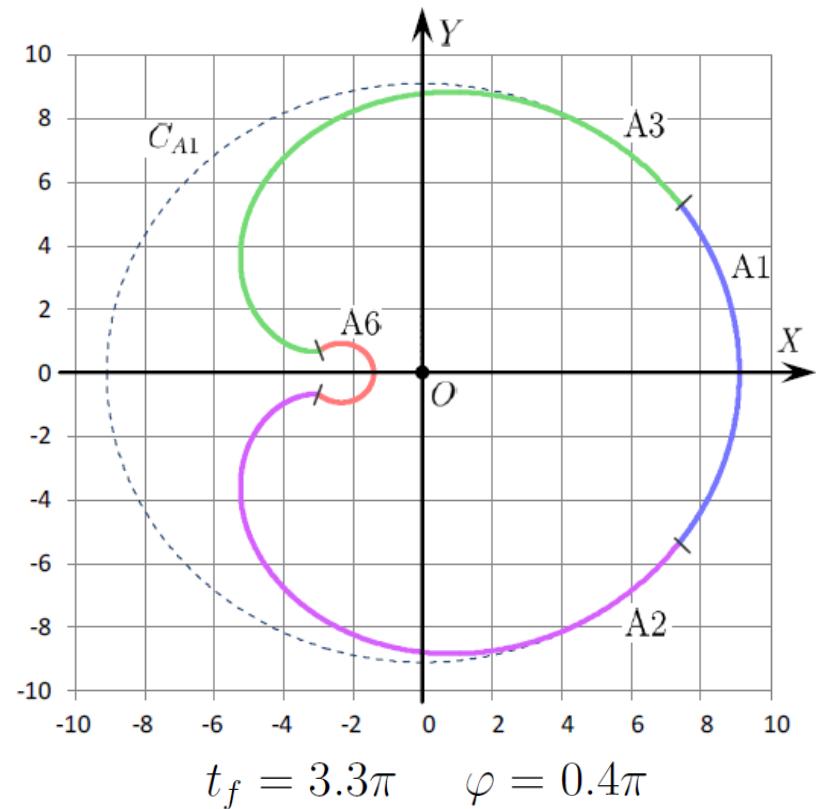
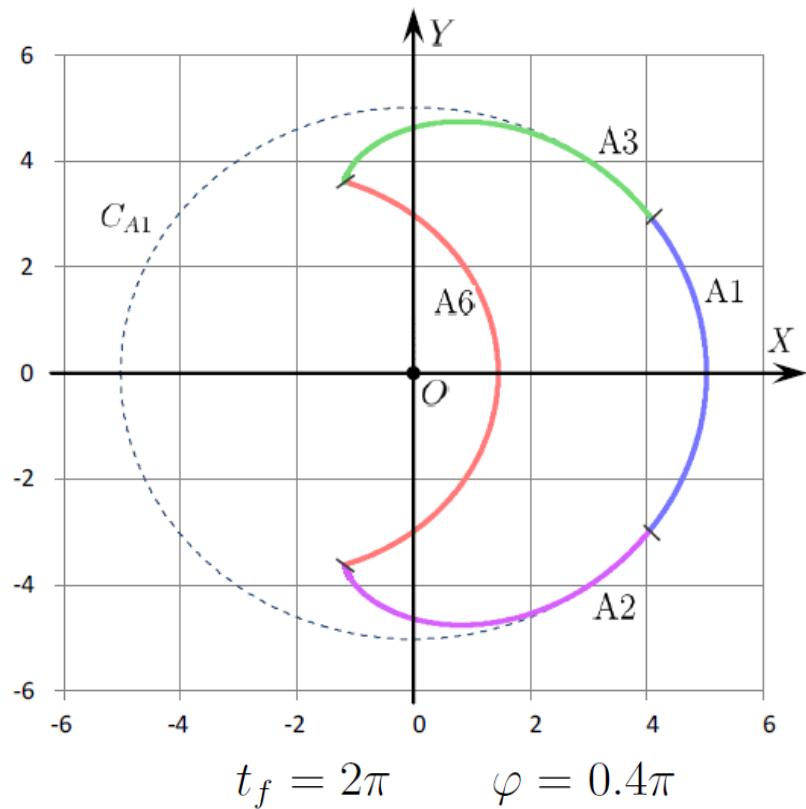
lines. In general, each generating curve (it consists of the base circle arc and the generating straight line) is not an extreme trajectory satisfying the Pontryagin maximum principle. We just interpret the curves A2 and A3 as the circle involutes in order to justify the geometric properties of these curves that we need. This is the difference from the above-considered projection of the three-dimensional reachable set onto the plane x, y .

Note that the curves A1 and A6 are always arcs of circles.

Thus, the boundary of any φ -section consists of some arcs of circles and some parts of involutes.

For the values t_f and φ indicated in the figure caption, the boundary of the φ -section includes the curves A1, A3, A6, and A2 entirely.

View of φ -sections for case I



The case I with an additional restriction $t_f \leq 2\pi$ was considered in the paper

Patsko V.S., Fedotov A.A. (2020) Analytic description of a reachable set for the Dubins car. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN, vol. 26, no. 1, pp. 182–197 (in Russian).

Слайд 12

На этом слайде мы показываем вид границы φ -сечения для случая I. Значение φ одинаково для обоих рисунков. Для рис. слева значение t_f меньше, чем для рис. справа. Случай I характеризуется именно тем, что граница φ -сечения совпадает с замкнутой кривой, образованной последовательно соединёнными кривыми A1, A3, A6, A2. При этом в случае I кривые A2, A3, A6 являются невырожденными, а кривая A1 вырождается лишь при $\varphi = 0$.

Случай I при дополнительном условии $t_f \leq 2\pi$ был рассмотрен в нашей статье 2020 года.

Slide 12

On this slide, we show the view of the φ -section boundary for the case I. The value φ is the same for both figures. For fig. on the left, the value t_f is less than for fig. on the right. The case I is characterized precisely by the fact that the boundary of the φ -section coincides with the closed curve formed by the sequentially connected curves A1, A3, A6, and A2. In the case I, the curves A2, A3, A6 are non-degenerate, and the curve A1 degenerates only when $\varphi = 0$.

The case I with the additional restriction $t_f \leq 2\pi$ was considered in our paper of 2020.

Evolution of φ -section in time for case I (φ is fixed)

$$\varphi = 0.5\pi$$

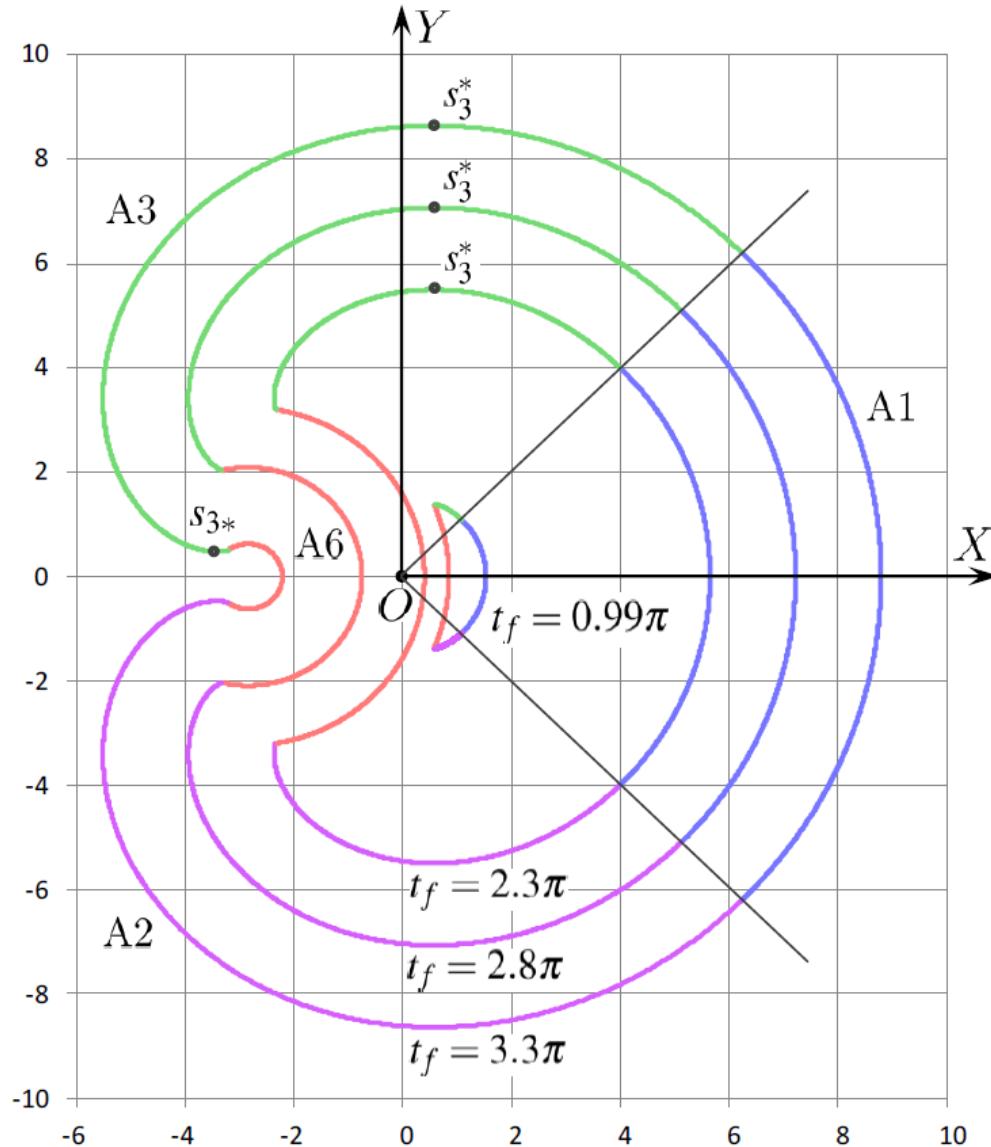
four types of curves :

A1 : +1, 0, +1

A2 : -1, 0, +1

A3 : +1, 0, -1

A6 : -1, +1, -1



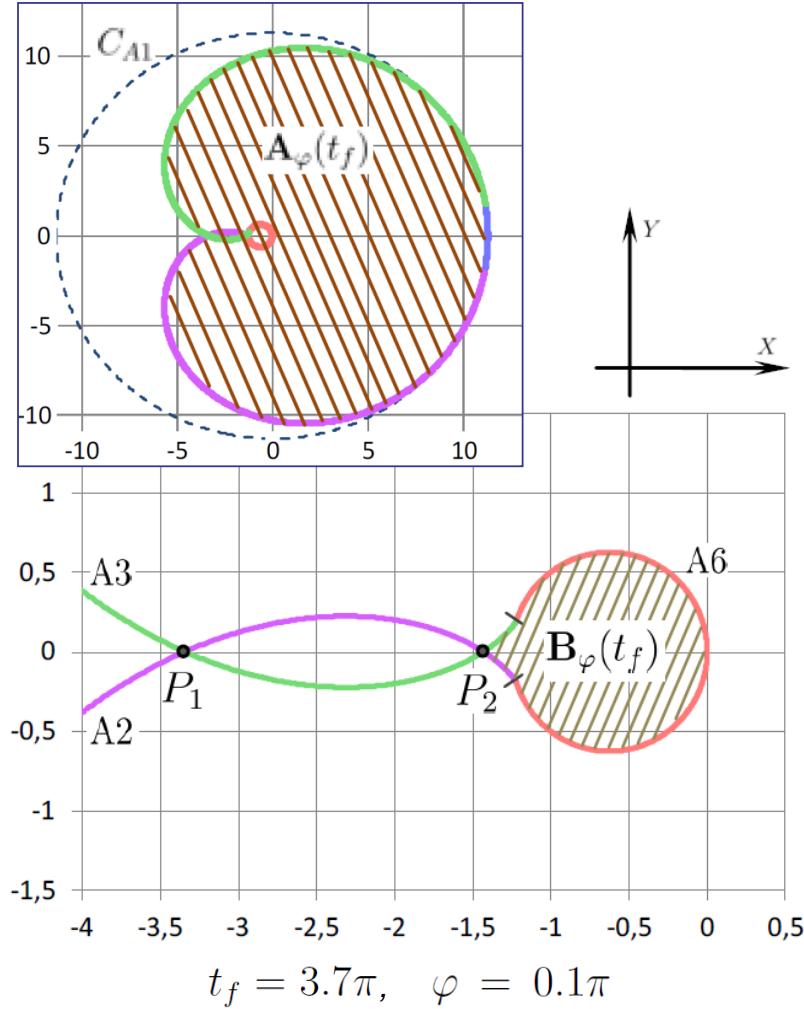
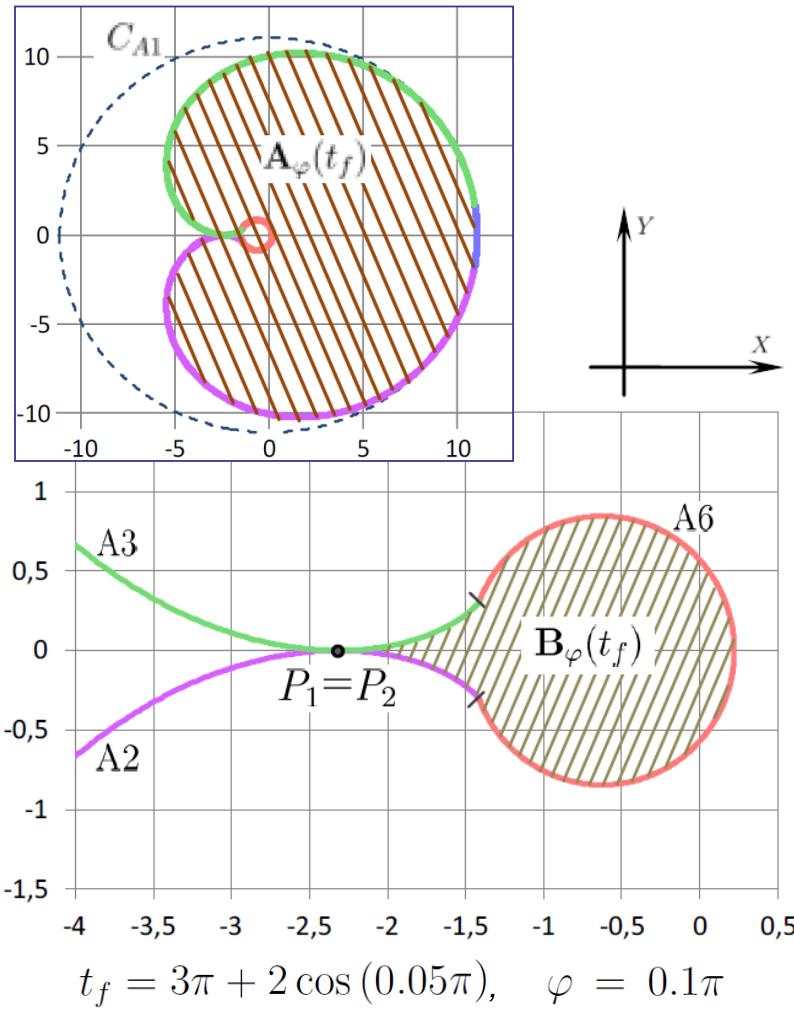
Слайд 13

Здесь для случая I показано развитие границы φ -сечения с увеличением момента t_f при фиксированном значении $\varphi = 0.5\pi$. Видно, что кривые A1 представляют собой концентрические дуги окружностей с одинаковым угловым размахом. Кривые A6 также представляют собой дуги концентрических окружностей. Кривые A2, A3 (эвольвенты) гладко стыкуются с кривой A1, но их стыковка с кривой A6 является негладкой.

Slide 13

Here, for the case I, the evolution of the φ -section boundary is shown with the increasing instant t_f for the fixed value $\varphi = 0.5\pi$. It can be seen that the curves A1 are concentric arcs of circles with the same angular span. The curves A6 are also arcs of concentric circles. The curves A2 and A3 (involutes) join smoothly with the curve A1, but their joining with the curve A6 is not smooth.

View of φ -sections for case II



$$G_\varphi(t_f) = \mathbf{A}_\varphi(t_f) \setminus \text{int} \mathbf{B}_\varphi(t_f)$$

Слайд 14

Главной особенностью φ -сечений в случае II является отсутствие их односвязности. Рассматриваемые здесь φ -сечения задаются внешней и внутренней границами. На слайде представлены два примера φ -сечений для фиксированного значения $\varphi = 0.1\pi$. В верхней части слайда множества $G_\varphi(t_f)$ изображены целиком, а в нижней части даны их увеличенные фрагменты с показом возникающей в случае II особенности. Значение t_f для левого рисунка соответствует первому моменту времени, когда кривые A2 и A3 касаются (точка касания $P_1=P_2$). На правом рисунке (при большем значении t_f) кривые A2, A3 пересекаются уже в двух различных точках P_1 и P_2 .

Особенность случая II заключается в возникновении множества $B_\varphi(t_f)$, внутренность которого не принадлежит φ -сечению. Граница "дырки" $B_\varphi(t_f)$ (внутренняя граница φ -сечения) составляется из кривой A6 и примыкающих к ней участков кривых A2 и A3 до точки P_2 . Внешняя граница образована кривой A1 и примыкающими к ней участками кривых A2, A3, взятыми до точки P_1 .

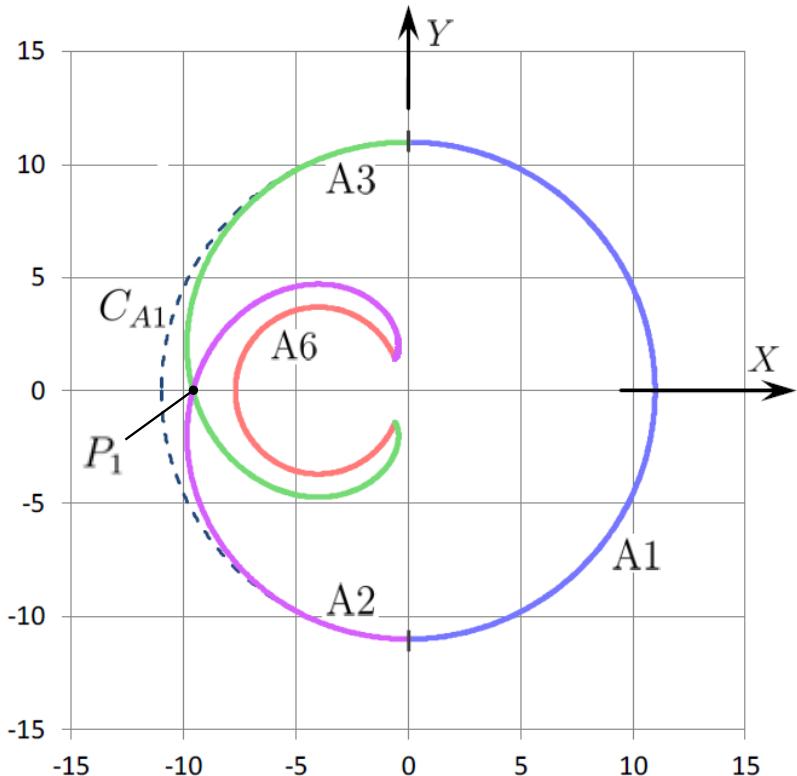
Slide 14

The main feature of φ -sections in the case II is that they are not simply connected. The φ -sections considered here are given by the outer and inner boundaries. This slide represents two examples of φ -sections for a fixed value $\varphi = 0.1\pi$. In the upper part of the slide, the sets $G_\varphi(t_f)$ are shown in their entirety, and in the lower part their enlarged fragments are given showing the peculiarity arising in the case II. The value t_f for the left figure corresponds to the first time instant when the curves A2 and A3 touch (touch point $P_1=P_2$). In the right figure (for a larger value t_f) the curves A2, A3 are already intersected at two different points P_1 and P_2 .

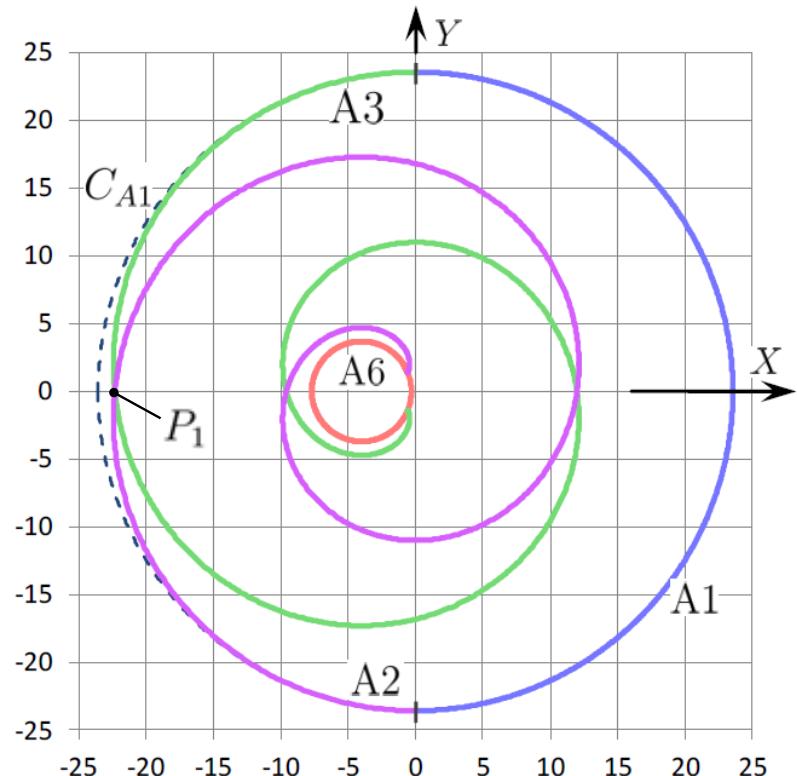
The feature of the case II is realized in the appearance of a set $B_\varphi(t_f)$ whose interior does not belong to the φ -section. The boundary of the "hole" $B_\varphi(t_f)$ (the inner boundary of the φ -section) is composed of the curve A6 and adjacent parts of the curves A2 and A3 to the point P_2 . The outer boundary is formed by the curve A1 and adjacent parts of the curves A2, A3, taken up to the point P_1 .

View of φ -sections for case III

(non-degenerate subcase: $t_f > 4\pi - \varphi$)



$$t_f = 4.5\pi, \quad \varphi = \pi$$



$$t_f = 8.5\pi, \quad \varphi = \pi$$

The boundary of φ -section in this case is formed by the curve A1 and parts of the curves (the involutes) A2 and A3 up to the point of their first intersection

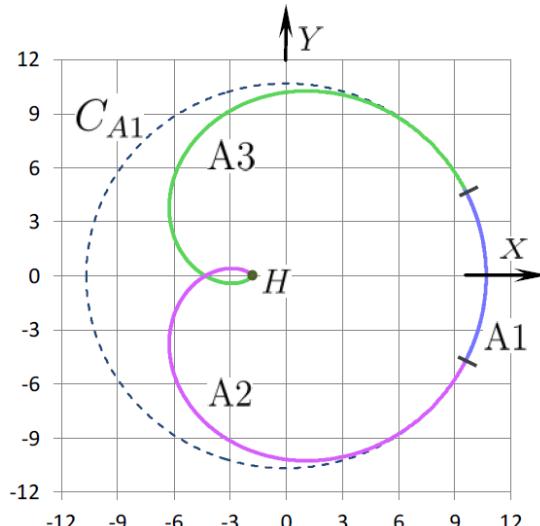
Слайд 15

На данном слайде изображены примеры φ -сечений для случая III при выполнении условия $t_f > 4\pi - \varphi$ (невырожденный подслучай). Здесь кривая A6 и часть кривых A2, A3 расположены во внутренности φ -сечения. Множество G_φ является односвязным. Его граница образована кривой A1 и участками кривых A2, A3, взятыми до точки пересечения P_1 . При больших значениях t_f кривые A2, A3 могут пересекаться много раз (рис. справа).

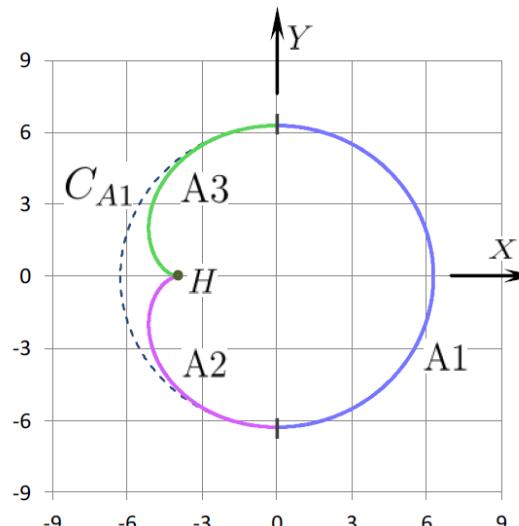
Slide 15

This slide shows examples of φ -sections for the case III under the condition $t_f > 4\pi - \varphi$ (non-degenerate subcase). Here, the curve A6 and some parts of the curves A2, A3 are located in the interior of the φ -section. The set G_φ is simply connected. Its boundary is formed by the curve A1 and parts of the curves A2, A3 taken up to the point P_1 of their intersection. For large values t_f , the curves A2 and A3 can intersect many times (fig. on the right).

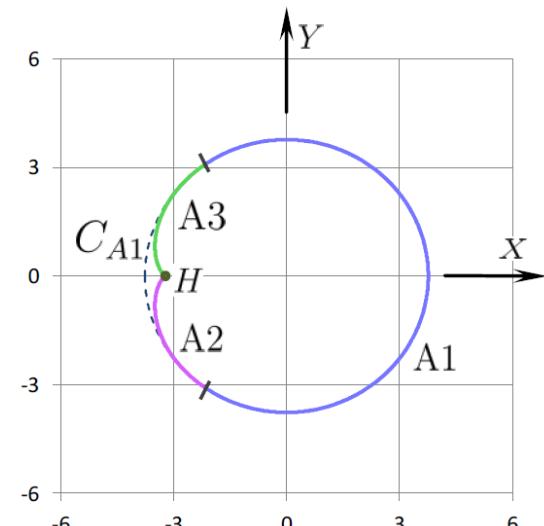
View of φ -sections for case III (degenerate subcase: $t_f = 4\pi - \varphi$)



$$\varphi = 0.3\pi, t_f = 3.7\pi$$



$$\varphi = 1.0\pi, t_f = 3.0\pi$$



$$\varphi = 1.4\pi, t_f = 2.6\pi$$

Curves A1, A2, A3 are shown in full. Curve A6 degenerates into point H.

In the last two pictures, the first intersection point of the curves A2 and A3 coincides with the point H.

The boundary of φ -section in this case is formed by the curve A1 and parts of the curves (the involutes) A2 and A3 up to the point of their first intersection.

Слайд 16

Данный подслучай случая III является пограничным со случаем II при $\varphi < \pi$ и со случаем I при $\varphi \geq \pi$ (см. классификацию на слайде 9). Для обоих условий кривая A6 состоит из одной точки.

На левом рисунке показан пример для $\varphi < \pi$. Здесь мы имеем множество $B_\varphi(t_f)$ (введённое для случая II), вырождающееся в точку H . Граница φ -сечения состоит из дуги A1 и дуг A2 и A3 до точки их первого пересечения.

На среднем и правом рисунках показаны примеры для $\varphi \geq \pi$. Здесь также кривые A2 и A3 после попадания в точку H не имеют продолжения. Мы получаем границу φ -сечения как последовательное соединение кривых A1, A3 и A2.

В целом, граница φ -сечения описывается при помощи трёх кривых (как и в невырожденном подслучае случая III).

Slide 16

This subcase of the case III borders with case II for $\varphi < \pi$ and with case I for $\varphi \geq \pi$ (see classification on slide 9). For both conditions, the curve A6 consists of one point.

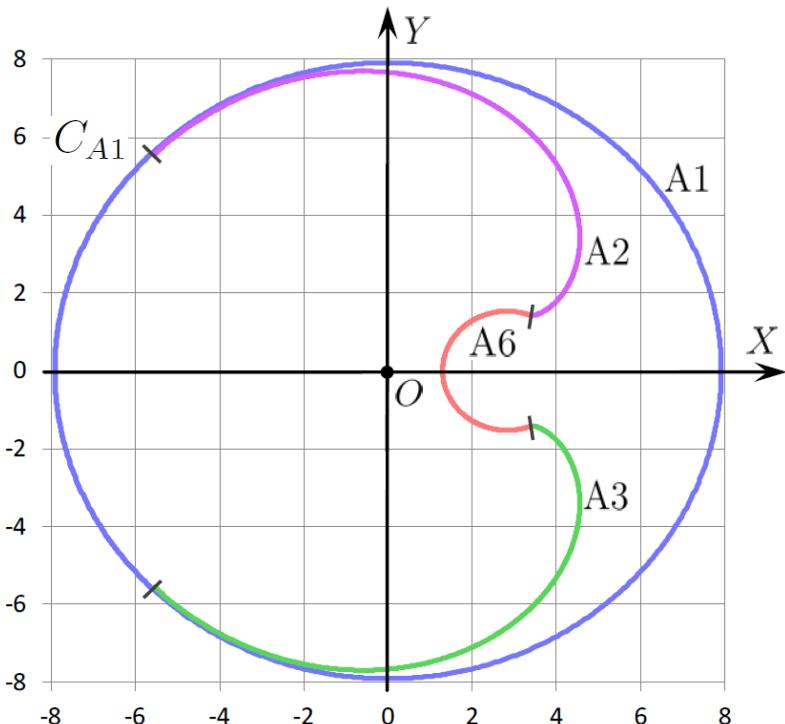
The left figure shows an example for $\varphi < \pi$. Here we have the set $B_\varphi(t_f)$ (is introduced for case II) degenerating into the point H . The boundary of the φ -section consists of the arc A1 and the arcs A2 and A3 up to the point of their first intersection.

On the middle and right figures, the examples are shown for $\varphi \geq \pi$. Here, too, the curves A2 and A3 after hitting the point H have no continuation. We obtain the boundary of the φ -section as sequential connecting the curves A1, A3, and A2.

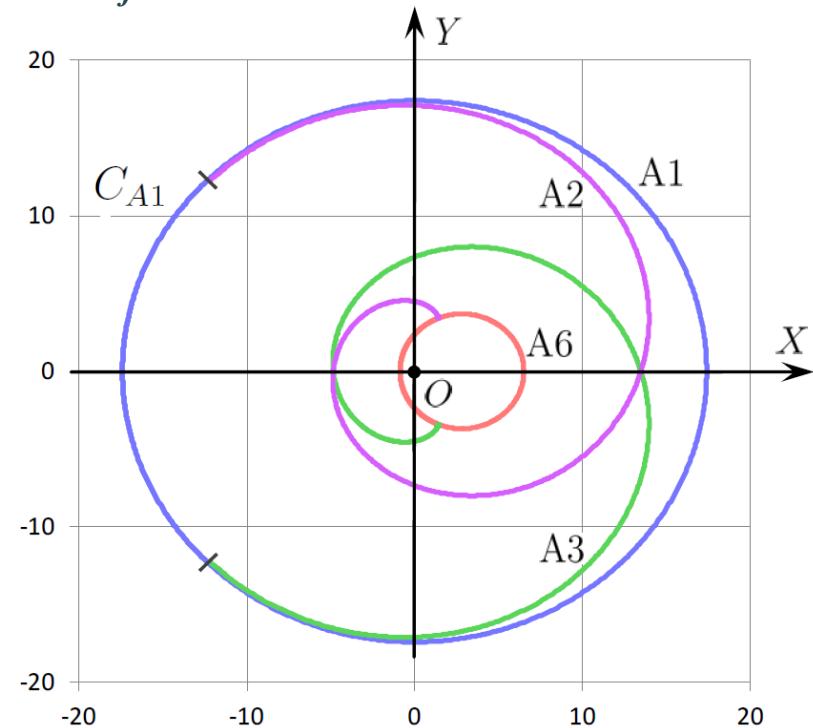
In general, the boundary of the φ -section is described using three curves (as in the non-degenerate subcase of the case III).

View of φ -sections for case IV

$$(2\pi \leq \varphi < t_f)$$



$$t_f = 5\pi, \quad \varphi = 2.5\pi$$



$$t_f = 8\pi, \quad \varphi = 2.5\pi$$

The curve $A1$ is a circle with an “overlap” (with a scope greater than 2π).

The set $G_\varphi(t_f)$ is the circle C_{A1} .

Слайд 17

Случай IV определяется условием $2\pi \leq \varphi < t_f$. Здесь кривая A1 представляет собой окружность “с переклестом”. Эта окружность и является границей φ -сечения. Центр окружности совпадает с началом вспомогательной системы координат, а радиус равен $t_f - \varphi$. Кривая A6 целиком и кривые A2 и A3, за исключением точек их стыковки с кривой A1, лежат во внутренности множества $G_\varphi(t_f)$ и не участвуют в формировании границы.

Slide 17

The case IV is determined by the condition $2\pi \leq \varphi < t_f$. Here, the curve A1 is a circle (a circumference) with an “overlap”. This circle is the boundary of the φ -section. The center of the circle coincides with the origin of the auxiliary coordinate system, and the radius is equal to $t_f - \varphi$. The curve A6 as a whole and the curves A2 and A3, except the points of their joining with the curve A1, lie in the interior of the set $G_\varphi(t_f)$ and do not participate in the formation of its boundary.

Summary

An analytical description of the boundary of two-dimensional φ -sections of the three-dimensional reachable set for Dubins car is obtained including the case of not simply connected φ -sections.

The boundary of each φ -section is formed by means of arcs of circles and parts of involutes.

A classification of possible variants of φ -section structure is introduced.

The results obtained can be used in solving various control problems.

Слайд 18

В работе исследована структура сечений по угловой координате (φ -сечений) трёхмерного множества достижимости “в момент” для машины Дубинса. Проанализированы кривые, лежащие на границе φ -сечений. Получено их аналитическое описание.

Slide 18

The paper investigates the structure of cross sections by angular coordinate (φ -sections) of three-dimensional reachable set “at instant” for the Dubins car. Curves lying on the boundary of φ -sections are analyzed. Their analytical description is obtained.

Future

An asymmetric case of restrictions on left and right turns will be considered.

We plan to prove that its study reduces to the symmetric case.

$$\dot{x} = \cos \varphi,$$

$$u_1 = -1, \quad u_2 = 1$$

$$\dot{y} = \sin \varphi,$$

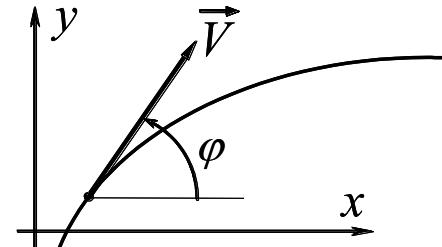
(symmetric case)

$$\dot{\varphi} = u;$$

$$u_1 < 0 < u_2$$

$$u \in [u_1, u_2]$$

(asymmetric case with two-sided turns)



$$\varphi \in (-\infty, +\infty)$$

Let we need to find φ -section $G_\varphi(t_f)$ for some values t_f and φ in the asymmetric case.

We introduce the instant t_f^* by the formula $t_f^* = \frac{2u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1} + \varphi$.

Given the same value φ , we consider the φ -section $G_\varphi^*(t_f^*)$ for the symmetric case. In the auxiliary coordinate system (it depends only on φ), we obtain the desired φ -section $G_\varphi(t_f)$ using the linear transformation (with multiplication by the coefficient and the shift):

$$G_\varphi(t_f) = \frac{u_1 - u_2}{2u_1 u_2} G_\varphi^*(t_f^*) + 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Слайд 19

В работе для управляемого объекта “машина Дубинса” рассмотрен случай симметричного ограничения на управление: $u \in [-1, 1]$. Мы планируем доказать, что полученные результаты могут быть использованы для любого несимметричного ограничения вида $u_1 \leq 0 \leq u_2$. А именно, в несимметричном случае при любых t_f и φ искомое φ -сечение можно получить из симметричного случая, взяв то же самое значение φ , но некоторое другое значение t_f^* вместо t_f .

Slide 19

In our work for the controlled object ”Dubins car”, the case of symmetric control constraint is considered: $u \in [-1, 1]$. We plan to prove that the results obtained can also be used for any asymmetric constraint of the form $u_1 \leq 0 \leq u_2$. Namely, in the asymmetric case, for any t_f and φ , the desired φ -section can be obtained from the symmetric case by taking the same value φ , but some other value t_f^* instead of t_f .