ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2003, № 3, с. 8–16

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 62-50

ТРЕХМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ*

© 2003 г. **В. С. Пацко, С. Г. Пятко, А. А. Федотов**

Екатеринбург, Институт математики и механики УрО РАН,
Санкт-Петербург, Академия гражданской авиации

Поступила в редакцию 14.05.02 г., после доработки 23.12.02 г.

Рассматривается нелинейная управляемая система третьего порядка, описывающая движение автомобиля или самолета в горизонтальной плоскости. Доказывается утверждение о числе и характере переключений управлений, ведущих на границу множества достижимости. Приведены результаты численного построения множества достижимости.

Введение. В математической теории управления не так много примеров нелинейных систем третьего порядка, для которых в трехмерном пространстве фазовых координат построены множества достижимости. Это связано с тем, что для нелинейных систем множества достижимости, как правило, не являются выпуклыми, что существенно затрудняет их аналитическое описание и численное построение.

Под множеством достижимости $G(T)$ в фиксированный момент времени T понимаем совокупность всех состояний в фазовом пространстве, в каждое из которых возможен перевод системы в момент T из заданного начального состояния при помощи некоторого допустимого управления.

В работе приводятся результаты исследования множества достижимости нелинейной управляемой системы третьего порядка, в которой две координаты имеют смысл геометрического положения на плоскости, а третья координата есть угол направления вектора скорости. Величина скорости предполагается постоянной. Скалярное управляющее воздействие ограничено по модулю и определяет мгновенную угловую скорость вращения вектора линейной скорости. Такая система часто используется [1–5] при простейшем описании движения автомобиля или самолета в горизонтальной плоскости.

Применяя к рассматриваемой системе принцип максимума Понтрягина [6], нетрудно установить, что в каждую точку на границе множества $G(T)$ ведет кусочно-постоянное управление с конечным числом переключений. В работе доказывается утверждение о числе переключений и их характере. Это утверждение используется для численного построения границы множества достижимости.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 00-01-00348, 02-01-96424).

Исследуемое множество $G(T)$ представляет интерес как нетривиальный пример множества достижимости в трехмерном пространстве для нелинейной управляемой системы. Результаты построения множества $G(T)$ могут быть использованы в качестве тестовых при разработке универсальных численных алгоритмов построения множеств достижимости нелинейных управляемых систем. Они также полезны при анализе процедур построения множеств прогноза в задачах с неполной информацией для систем, описывающих движение самолета в горизонтальной плоскости. Такие задачи рассматривались в [7, 8].

1. Постановка задачи. Пусть движение управляемого объекта на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V\cos\varphi, \\ \dot{y} &= V\sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{k}{V}u, \quad |u| \le 1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$V = \text{const} > 0, \quad k = \text{const} > 0.$$

Здесь x, y – координаты геометрического положения, φ – угол наклона вектора скорости (рис. 1), V – величина скорости, k – максимальное боковое ускорение. Допустимыми управлениями $u(\cdot)$ считаются измеримые функции времени, удовлетворяющие ограничению $|u| \le 1$. Значения угла φ рассматриваются на промежутке $(-\infty, \infty)$.

Фазовый вектор (x, y, φ) системы (1.1) обозначим через z. Для краткости положим $\alpha = k/V$.

Зафиксируем z_0 – произвольное состояние системы (1.1) в начальный момент времени t_0. Множество достижимости $G(T)$ в момент времени $T \ge t_0$ есть совокупность всех точек z трехмерного фазового пространства, в каждую из которых возможен перевод системы (1.1) в момент T при помощи некоторого допустимого управления на промежутке $[t_0, T]$ из начальной точки z_0.

В силу стационарности системы (1.1) выбор начального момента времени t_0 не существен. Кроме того, специфика системы (1.1) такова, что начальное состояние z_0 влияет на множество достижимости лишь с точностью до поворота и переноса. Из общих результатов математической теории управления следует [9], что множество $G(T)$ замкнуто и ограничено.

Цель данной работы – доказательство утверждения о числе и характере переключений управлений, ведущих на границу множества $G(T)$, и численное построение его границы.

Отметим, что описание проекции множества $G(T)$ на плоскость x, y имеется в [10]. Авторам неизвестны работы, где бы рассматривалось трехмерное множество достижимости для системы (1.1).

2. Проекция множества достижимости на плоскость геометрических координат. Прежде чем приступить к исследованию множества достижимости в трехмерном фазовом пространстве, дадим изображение его проекции на плоскость x, y. Начальный момент времени считаем равным нулю. На рис. 2 показаны проекции множества достижимости для четырех моментов времени $T_i = i0.5\pi/\alpha$, $i = 1, 2, 3, 4$. Эти моменты соответствуют времени разворота вектора скорости на угол $i0.5\pi$ ($-i0.5\pi$) при движении с управлением $u = 1$ ($u = -1$). Для каждого момента рисунок сделан в подходящем масштабе.

Траектории с крайними управлениями $u = 1$ и $u = -1$ являются окружностями радиуса V/α. Вектор начальной скорости отмечен стрелочкой. Представленные множества посчитаны при помощи соотношений из [10].

3. Принцип максимума. Известно [9], что управления, которые ведут на границу множества достижимости, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина. Запишем соотношения принципа максимума для системы (1.1).

Пусть $u^*(\cdot)$ – некоторое допустимое управление, а $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))$ – соответствующее движение системы (1.1) на промежутке $[t_0, t_*]$. Дифференциальные уравнения сопряженной системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot\psi_1 &= 0,\\ \dot\psi_2 &= 0, \\ \dot\psi_3 &= \psi_1 V\sin\varphi^*(t) - \psi_2 V\cos\varphi^*(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Принцип максимума означает, что существует ненулевое решение $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))$ системы (3.1), для которого почти всюду (п.в.) на промежутке $[t_0, t_*]$ выполнено условие

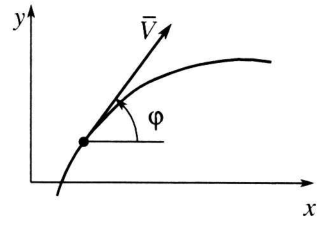

Рис. 1. Система координат.

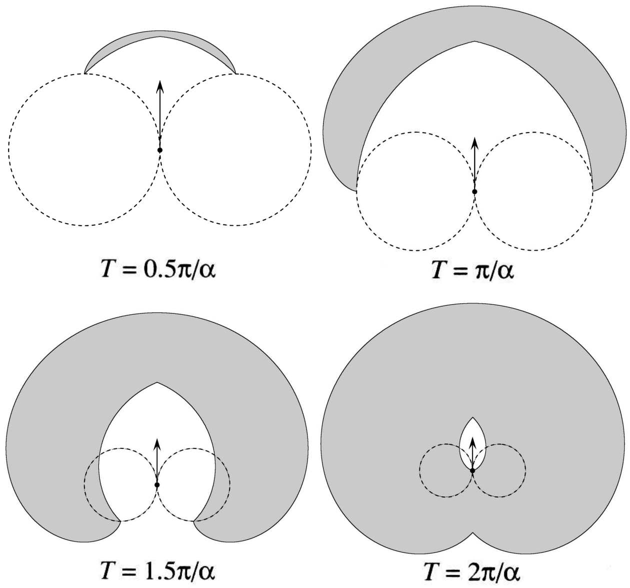

Рис. 2. Проекции множества достижимости на плоскость x, y.

$$\begin{aligned} &\psi_1^*(t)V\cos\varphi^*(t) + \psi_2^*(t)V\sin\varphi^*(t) + \\ &+ \psi_3^*(t)\alpha u^*(t) = \max_{|u|\le 1}[\psi_1^*(t)V\cos\varphi^*(t) + \\ &+ \psi_2^*(t)V\sin\varphi^*(t) + \psi_3^*(t)\alpha u]. \end{aligned}$$

Таким образом, условие максимума имеет вид

$$\text{п.в. } \psi_3^*(t)u^*(t) = \max_{|u|\le 1}\psi_3^*(t)u, \quad t\in[t_0, t_*]. \tag{3.2}$$

Отметим, что функции $\psi_1^*(\cdot)$ и $\psi_2^*(\cdot)$ есть константы. Обозначим их ψ_1^* и ψ_2^*. Если $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$, то $\psi_3^*(t) = \text{const} \ne 0$ на промежутке $[t_0, t_*]$. Следовательно, в этом случае либо п.в. $u^*(t) = 1$, либо п.в. $u^*(t) = -1$.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел ψ_1^*, ψ_2^* не равно нулю. Опираясь на (1.1) и (3.1), можно записать следующее выражение для $\psi_3^*(t)$:

$$\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C.$$

Отсюда следует, что $\psi_3^*(t) = 0$ тогда и только тогда, когда точка $(x^*(t), y^*(t))$ геометрического по-

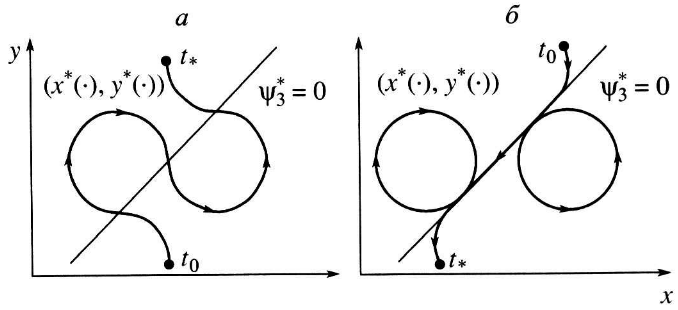

Рис. 3. Траектории принципа максимума и прямая переключения.

ложения в момент t удовлетворяет уравнению прямой

$$\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0. \quad (3.3)$$

Прямая (3.3) использовалась во многих работах (например, [3, 11]), где для системы (1.1) анализировался принцип максимума.

В силу соотношения (3.2), если $\psi_3^*(t) > 0$ ($\psi_3^*(t) < < 0$) на некотором промежутке времени, то $u^*(t) = 1$ ($u^*(t) = -1$) п.в. на этом промежутке. Соответствующее движение в проекции на плоскость x, y при этом идет по дуге окружности радиуса V/α против часовой стрелки в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C > 0$ (по часовой стрелке в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + + C < 0$). Условимся называть циклом участок движения длительностью $2\pi/\alpha$, на котором п.в. $u^*(t) = 1$ или п.в. $u^*(t) = -1$. Траектория движения на таком участке в проекции на плоскость x, y представляет собой окружность. Если $\psi_3^*(t) = 0$ на некотором промежутке времени, то на этом промежутке движение $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ идет по прямой (3.3). Стало быть, $\varphi^*(t) = \text{const}$. Поэтому $u^*(t) = 0$ п.в. на этом промежутке.

Рассмотрим варианты возможного взаимного расположения траектории движения $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ и прямой (3.3).

1. Траектория пересекает прямую (3.3) в некоторый момент времени под ненулевым углом (рис. 3*а*). Тогда траектория представляет собой набор дуг окружностей и интервалы времени между соседними моментами пересечения прямой (3.3) одинаковы. Функция $\psi_3^*(\cdot)$ меняет знак на промежутке $[t_0, t_*]$ конечное число раз.

2. Траектория касается прямой (3.3) в некоторый момент времени (рис. 3*б*). Тогда траектория представляет собой набор дуг окружностей и прямолинейных участков. Прямолинейные участки лежат на прямой (3.3), дуги окружностей касаются этой прямой. При этом любой полный участок в виде дуги окружности, не являющийся крайним, представляет собой один или несколько подряд идущих циклов. Функция $\psi_3^*(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ либо не меняет знак, либо меняет его конечное число раз.

3. Траектория не пересекается с прямой (3.3). В этом случае функция $\psi_3^*(\cdot)$ имеет один и тот же знак на всем промежутке $[t_0, t_*]$ и траектория является дугой окружности.

Таким образом, если выполнено условие максимума (3.2), то функция $\psi_3^*(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ может менять знак лишь конечное число раз. Поэтому в качестве управления $u^*(\cdot)$, порождающего движение $z^*(\cdot)$ и удовлетворяющего принципу максимума, можно взять кусочно-постоянное управление со значениями $0, \pm 1$ и конечным числом переключений на промежутке $[t_0, t_*]$. Для определенности будем считать такое управление кусочно-непрерывным справа. Момент t_* не включаем в число моментов переключения.

Кроме того, из изложенного в данном разделе вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть движение $z^*(\cdot)$ порождается кусочно-постоянным управлением $u^*(\cdot)$ и при этом выполнен принцип максимума. Тогда

а) если на движении $z^*(\cdot)$ нет участков с нулевым управлением и нет циклов, то интервалы времени между соседними моментами переключения одинаковы;

б) если на движении $z^*(\cdot)$ нет участков с нулевым управлением и есть хотя бы один цикл, то все точки геометрического положения в моменты переключения совпадают;

в) если на движении $z^*(\cdot)$ есть совпадающие точки геометрического положения в моменты переключения, то на этом движении имеется хотя бы один цикл;

г) если на движении $z^*(\cdot)$ есть участок с нулевым управлением, то любой полный участок с управлением 1 или -1, не лежащий на краю, представляет собой один или несколько подряд идущих циклов.

4. Свойства движений с кусочно-постоянным управлением. В этом разделе будем рассматривать кусочно-постоянные управления со значениями 0, ±1. Как показано в разд. 3, таких управлений достаточно для построения границы множества достижимости. В леммах 2, 3 исследуются движения без участков с нулевым управлением. В лемме 4 анализируется случай с участком нулевого управления. Символ ∂ будет означать границу множества, символ int – внутренность.

Л е м м а 2. Пусть движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ со значениями ±1 и двумя моментами переключения t_1, t_2. Предположим, что точки геометрического положения на плоскости x, y в моменты переключения не совпадают. Пусть, кроме того, выполнено неравенство

$$(t_1-t_0)+(t_*-t_2)>(t_2-t_1). \tag{4.1}$$

Тогда $z(t_*) \in \operatorname{int}G(t_*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не теряя общности, примем следующую последовательность значений управления $u(\cdot)$: –1, 1, –1. Обозначим через (x_1, y_1), (x_2, y_2) точки геометрического положения в моменты переключения t_1, t_2.

Предположим от противного, что $z(t_*) \in \partial G(t_*)$. Тогда управление $u(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума. Поскольку точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) не совпадают, то, опираясь на лемму 1б, получаем, что движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ не имеет циклов.

Выберем моменты $\bar t \in (t_0, t_1)$ и $\hat t \in (t_2, t_*)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$(t_1-\bar t)+(\hat t-t_2) = (t_2-t_1). \tag{4.2}$$

Это всегда можно сделать в силу неравенства (4.1).

Положим $\tilde t_1 = \bar t + \hat t - t_2$, $\tilde t_2 = \hat t - t_1 + \bar t$. Определим вспомогательное движение $\tilde z(\cdot) = (\tilde x(\cdot), \tilde y(\cdot), \tilde\varphi(\cdot))$, выходящее в момент t_0 из точки $z(t_0)$ и задаваемое на промежутке $[t_0, t_*]$ управлением

$$\tilde u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [t_0, \bar t), \\ 1, & t \in [\bar t, \tilde t_1), \\ -1, & t \in [\tilde t_1, \tilde t_2), \\ 1, & t \in [\tilde t_2, \hat t), \\ -1, & t \in [\hat t, t_*]. \end{cases}$$

Траектории исходного и вспомогательного движений показаны схематично на рис. 4.

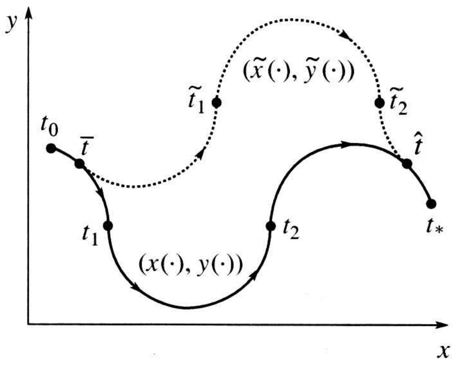

Рис. 4. Пояснение к доказательству леммы 2.

На полуинтервале $[\bar t, \hat t)$ управление $u(\cdot)$ имеет три промежутка $[\bar t, t_1)$, $[t_1, t_2)$, $[t_2, \hat t)$ постоянства со значениями –1, 1, –1. Вспомогательное управление $\tilde u(\cdot)$ имеет на $[\bar t, \hat t)$ также три промежутка $[\bar t, \tilde t_1)$, $[\tilde t_1, \tilde t_2)$, $[\tilde t_2, \hat t)$ постоянства со значениями 1, –1, 1.

Очевидно, что

$$t_1-\bar t = \hat t-\tilde t_2, \quad t_2-t_1 = \tilde t_2-\tilde t_1, \quad \hat t-t_2 = \tilde t_1-\bar t.$$

При этом на соответствующих парах промежутков управляющие воздействия исходного и вспомогательного движений противоположны по знаку. Отсюда получаем

$$\begin{gathered} u(t) = -\tilde u(\bar t+\hat t-t), \\ t \in (\bar t, t_1) \cup (t_1, t_2) \cup (t_2, \hat t). \end{gathered} \tag{4.3}$$

Таким образом, равенство $u(t) = -\tilde u(\bar t + \hat t - t)$ выполняется всюду на $(\bar t, \hat t)$, за исключением моментов t_1, t_2.

Используя третье уравнение системы (1.1), определение моментов $\tilde t_1$, $\tilde t_2$ и соотношение (4.2), имеем

$$\begin{aligned} \tilde\varphi(\hat t) &= \tilde\varphi(\bar t)+\alpha(\tilde t_1-\bar t)-\alpha(\tilde t_2-\tilde t_1)+\alpha(\hat t-\tilde t_2) = \\ &= \tilde\varphi(\bar t)+\alpha(2\tilde t_1-\bar t-2\tilde t_2+\hat t) = \tilde\varphi(\bar t). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая равенство $\tilde\varphi(\bar t) = \varphi(\bar t)$, приходим к соотношению

$$\tilde\varphi(\hat t) = \varphi(\bar t). \tag{4.4}$$

Опираясь на (4.3), (4.4) и на третье уравнение системы (1.1), получаем

$$\varphi(t) = \varphi(\bar t)+\int_{\bar t}^{t}\alpha u(\tau)d\tau = \tilde\varphi(\hat t)-\int_{\bar t}^{t}\alpha\tilde u(\bar t+\hat t-\tau)d\tau.$$

Используя замену переменных $s = \bar t + \hat t - \tau$, имеем

$$\varphi(t) = \tilde\varphi(\hat t)+\int_{\hat t}^{\bar t+\hat t-t}\alpha\tilde u(s)ds = \tilde\varphi(\bar t+\hat t-t).$$

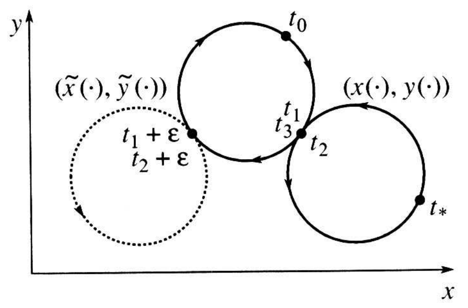

Рис. 5. Пояснение к доказательству леммы 3.

Таким образом,

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(\bar{t} + \hat{t} - t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}]. \tag{4.5}$$

Далее имеем

$$\tilde{x}(\hat{t}) = \tilde{x}(\bar{t}) + \int\limits_{\bar{t}}^{\hat{t}} V\cos\tilde{\varphi}(s)ds =$$

$$= \tilde{x}(\bar{t}) - \int\limits_{\hat{t}}^{\bar{t}} V\cos\tilde{\varphi}(\bar{t} + \hat{t} - \tau)d\tau.$$

Опираясь на (4.5) и учитывая, что $\tilde{x}(\bar{t}) = x(\bar{t})$, получаем

$$\tilde{x}(\hat{t}) = x(\bar{t}) + \int\limits_{\bar{t}}^{\hat{t}} V\cos\varphi(\tau)d\tau = x(\hat{t}).$$

Аналогично получаем $\tilde{y}(\hat{t}) = y(\hat{t})$.

Таким образом, установлено равенство $\tilde{z}(\hat{t}) = z(\hat{t})$, т.е. в момент $\hat{t}$ вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot)$ находится в той же фазовой точке, что и исходное движение $z(\cdot)$. Следовательно, $\tilde{z}(t_*) = z(t_*)$. Стало быть, $\tilde{z}(t_*) \in \partial G(t_*)$. Поэтому управление $\tilde{u}(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума.

Движение $\tilde{z}(\cdot)$ не имеет циклов на промежутке $[t_0, t_*]$. Это следует из определения управления $\tilde{u}(\cdot)$ и отсутствия циклов на движении $z(\cdot)$. В силу леммы 1а получаем, что интервалы времени между соседними моментами переключения управления $\tilde{u}(\cdot)$ должны быть одинаковы. Однако это не так. Возьмем подряд идущие моменты переключения $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \hat{t}$. С учетом (4.2) имеем $t_2 - t_1 > t_1 - \bar{t}$. Отсюда

$$\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = t_2 - t_1 > t_1 - \bar{t} = \hat{t} - \tilde{t}_2.$$

Пришли к противоречию. Таким образом, $z(t_*) \in \operatorname{int} G(t_*)$.

Л е м м а 3. Пусть движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ со значениями ± 1 и тремя моментами переключения. Тогда $z(t_*) \in \operatorname{int} G(t_*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) – точки геометрического положения в моменты переключения t_1, t_2, t_3.

1. Будем считать вначале, что среди точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) нет совпадающих. Из двух средних промежутков $[t_1, t_2]$ и $[t_2, t_3]$ возьмем меньший по длине, а если их длины совпадают, то – любой.

Предположим, что выбран промежуток $[t_2, t_3]$. Тогда на $[t_1, t_*]$ движение $z(\cdot)$ удовлетворяет условиям леммы 2 и, стало быть, $z(t_*) \in \operatorname{int} G(t_*)$.

Если выбран промежуток $[t_1, t_2]$, то условия леммы 2 выполнены для движения $z(\cdot)$ на $[t_0, t_3]$. Поэтому $z(t_3) \in \operatorname{int} G(t_3)$ и, стало быть, $z(t_*) \in \operatorname{int} G(t_*)$.

2. Пусть теперь среди точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) есть совпадающие. Предположим от противного, что $z(t_*) \in \partial G(t_*)$. Тогда управление $u(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума.

В силу леммы 1в на движении $z(\cdot)$ есть хотя бы один цикл. С учетом леммы 1б получаем тогда, что точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) совпадают. В таком случае движение на промежутке $[t_1, t_2]$ представляет собой один или несколько подряд идущих циклов в одну сторону, а на промежутке $[t_2, t_3]$ – один или несколько подряд идущих циклов в другую сторону (рис. 5).

Рассмотрим вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot)$ (рис. 5), полученное путем небольшого смещения моментов переключения t_1 и t_2. А именно, возьмем вместо них моменты переключения $t_1 + \varepsilon$ и $t_2 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 2\pi/\alpha$.

Движения $\tilde{z}(\cdot)$ и $z(\cdot)$ совпадают на промежутке $[t_2 + \varepsilon, t_*]$. Следовательно, $\tilde{z}(t_*) = z(t_*)$. Поэтому $\tilde{z}(t_*) \in \partial G(t_*)$. Стало быть, выполнен принцип максимума. Однако на движении $\tilde{z}(\cdot)$ есть циклы, хотя точки геометрического положения в моменты переключения не совпадают. Это противоречит лемме 1б. Таким образом, $z(t_*) \in \operatorname{int} G(t_*)$.

Л е м м а 4. Пусть движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ со значениями 0, ± 1 и двумя моментами переключения. Предположим, что участок с нулевым управлением один и является одним из двух крайних участков постоянства управления. Тогда $z(t_*) \in \operatorname{int} G(t_*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности управление $u(\cdot)$ принимает последовательно значения 0, 1, –1. Точки геометрического положения в моменты переключения t_1, t_2 обозначим (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Предположим от противного, что $z(t_*) \in \partial G(t_*)$. Тогда управление $u(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума.

В силу леммы 1г движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_1, t_2]$ представляет собой один или несколько подряд идущих циклов (рис. 6). Следовательно, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Рассмотрим вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot)$ (рис. 6), выходящее в момент t_0 из точки $z(t_0)$ и задаваемое управлением

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_1), \\ -1, & t \in [t_1, t_1 + \varepsilon), \\ 1, & t \in [t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon), \\ -1, & t \in [t_2 + \varepsilon, t_*]. \end{cases}$$

Здесь ε – достаточно малое число: $0 < \varepsilon < t_* - t_2$, $\varepsilon < 2\pi/\alpha$.

Движения $\tilde{z}(\cdot)$ и $z(\cdot)$ совпадают на промежутке $[t_2 + \varepsilon, t_*]$. Следовательно, $\tilde{z}(t_*) = z(t_*)$. Поэтому $\tilde{z}(t_*) \in \partial G(t_*)$. Стало быть, управление $\tilde{u}(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума. Однако движение $\tilde{z}(\cdot)$ на промежутке $[t_1, t_1 + \varepsilon]$ не имеет циклов, что противоречит лемме 1г.

Таким образом, $z(t_*) \in \operatorname{int} G(t_*)$.

5. Управления, ведущие на границу множества достижимости. Сформулируем основное утверждение.

Т е о р е м а. В каждую точку границы множества достижимости системы (1.1) можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями. При этом в случае двух переключений можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений

$$\begin{matrix} 1)\ 1, 0, 1; & 2)\ -1, 0, 1; & 3)\ 1, 0, -1; \\ 4)\ -1, 0, -1; & 5)\ 1, -1, 1; & 6)\ -1, 1, -1. \end{matrix} \tag{5.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим от противного, что на границе множества достижимости $G(T)$ есть точка $\hat{z}$, перевод в которую возможен лишь при помощи управления с тремя или более переключениями. Если таких управляющих функций несколько, то возьмем управление с наименьшим числом переключений. Обозначим выбранное управление – через $u^*(\cdot)$, а порождаемое им движение через $z^*(\cdot)$.

Рассмотрим движение $z^*(\cdot)$ на четырех последних участках постоянства управления. Среди них может быть не более двух участков с нулевым управлением. При этом возможны следующие четыре варианта.

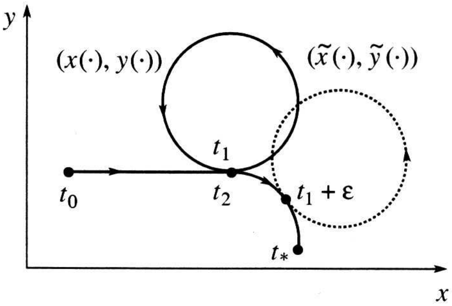

Рис. 6. Пояснение к доказательству леммы 4.

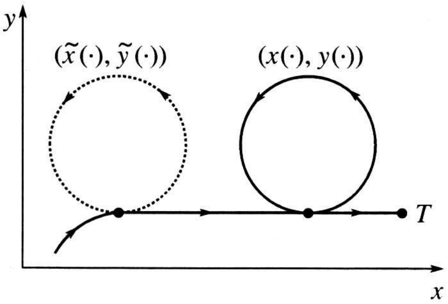

Рис. 7. Пояснение к доказательству теоремы.

1. Участков с нулевым управлением нет. Тогда в силу леммы 3 имеем $z^*(T) \in \operatorname{int} G(T)$. Это противоречит тому, что $z^*(T) = \hat{z} \in \partial G(T)$.

2. Участок с нулевым управлением один. В этом случае можно выделить три подряд идущих участка так, чтобы участок с нулевым управлением был расположен в начале или в конце такой тройки. Опираясь на лемму 4, имеем $z^*(T) \in \operatorname{int} G(T)$, что противоречит соотношению $z^*(T) = \hat{z} \in \partial G(T)$.

3. Участков с нулевым управлением два, и они расположены по краям. Здесь аналогично п. 2 при помощи леммы 4 устанавливаем, что $z^*(T) \in \operatorname{int} G(T)$ и получаем противоречие.

4. Участков с нулевым управлением два (из четырех), и между ними – только один участок с ненулевым управлением. Управление $u^*(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума. Поэтому в силу леммы 1г) средний участок с ненулевым управлением, лежащий между участками с нулевым управлением, представляет собой один или несколько подряд идущих циклов (рис. 7).

Переносим все циклы со среднего участка в начальную точку первого прямолинейного участка либо в конечную точку второго прямолинейного участка. Склеивая во времени прямолинейные участки, получаем вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot)$, ведущее в ту же точку в момент времени T, что и исходное движение $z^*(\cdot)$ (рис. 7). При этом вспомогательное движение имеет на одно переключение меньше, чем исходное. Это противоре-

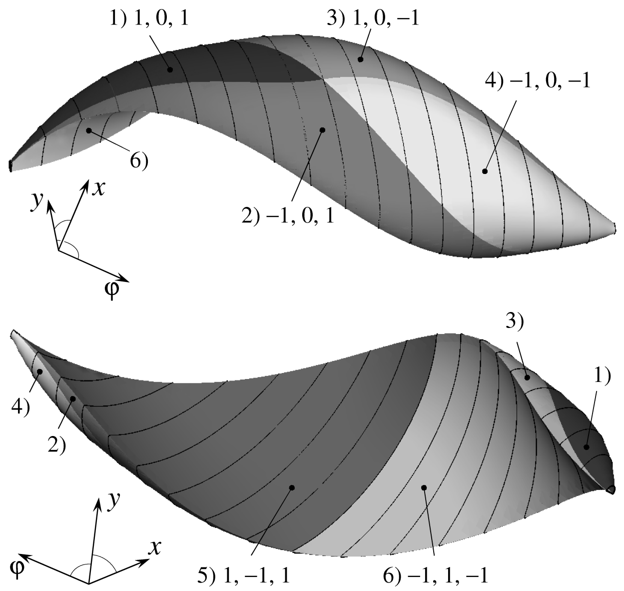

Рис. 8. Структура границы множества достижимости для $T = \pi/\alpha$.

чит сделанному предположению о выборе управления $u^*(\cdot)$ с наименьшим числом переключений.

Таким образом, в любую точку на границе множества достижимости $G(T)$ можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями.

Перейдем к вопросу о виде последовательности управлений. Кроме указанных в формулировке теоремы вариантов 1)–6) управлений с двумя переключениями логически возможны еще шесть вариантов

$$7)\ 0, 1, -1; \quad 8)\ 0, -1, 1; \quad 9)\ 1, -1, 0;$$

$$10)\ -1, 1, 0; \quad 11)\ 0, 1, 0; \quad 12)\ 0, -1, 0.$$

Управления вида 7)–10) не могут приводить на границу множества достижимости в силу леммы 4.

Рассмотрим варианты 11), 12). Здесь для каждого движения можно уменьшить число переключений на единицу аналогично тому, как это сделано в п. 4 . Получим управление с одним переключением, ведущее в ту же точку на границе. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Отметим, что приведенная теорема не дает полной характеристики управлений, ведущих на границу множества достижимости. Открытым является вопрос о дополнительной совокупности эффективно проверяемых условий, учет которых на движениях вида 1)–6) целиком отсеивал бы движения, идущие во внутренность множества достижимости, и оставлял все движения, которые идут на его границу.

6. Численное построение трехмерного множества достижимости. Применим теорему из разд. 5 для численного построения границы множества достижимости системы (1.1). Моменты переключения будем использовать в качестве параметров.

Полагаем $t_0 = 0$, $z_0 = 0$.

Для построения границы множества $G(T)$ перебираем все управления вида 1)–6) из списка (5.1) с двумя моментами переключения t_1, t_2. Для каждого варианта переключений параметр t_1 выбирается из промежутка $[0, T]$, а параметр t_2 – из промежутка $[t_1, T]$. Управления с одним переключением и без переключений при этом также охватываются. Взяв конкретный вариант переключений и перебирая для него параметры t_1, t_2 на некоторой достаточно мелкой сетке, получаем набор точек, образующих поверхность в трехмерном пространстве x, y, φ.

Таким образом, каждому из шести вариантов в списке (5.1) соответствует своя поверхность в трехмерном пространстве. Граница множества достижимости $G(T)$ составляется из кусков этих поверхностей. Шесть поверхностей без какой-либо дополнительной обработки загружаются в программу визуализации. С ее помощью выделяем границу множества достижимости. Некоторые поверхности частично или полностью попадают внутрь множества достижимости. При изображении границы такие участки не видны.

На рис. 8 показана с двух ракурсов граница множества $G(T)$ для момента $T = \pi/\alpha$. Различные участки границы выделены оттенками серого цвета. С некоторым шагом по оси φ изображены сечения множества достижимости плоскостью $\varphi = \text{const}$. Управление, тождественно равное нулю, ведет в точку стыковки участков 1–4. В точки линий, лежащих на стыке участков 1,2; 1,3; 2,4; 2,5; 2,6; 3,4; 3,5; 3,6, ведет управление с одним переключением. В любую точку линии, являющейся общей для участков 5 и 6, идут два движения, каждое с двумя переключениями. На этой линии участки 5,6 имеют негладкую стыковку. Угол стыковки не очень большой и на рисунке не заметен.

На рис. 9 показаны в одном ракурсе множества достижимости $G(T)$ для четырех моментов времени T. Четко прослеживается изменение структуры границы множества достижимости. С увеличением времени передняя часть границы, составленная из участков 1–4, “затягивает” тыльную часть, составленную из участков 5, 6.

При переходе от $T = 3\pi/\alpha$ к $T = 4\pi/\alpha$ наступает момент $T \approx 3.63\pi/\alpha$, начиная с которого множество достижимости $G(T)$ на некотором малом промежутке времени не является односвязным. А именно, появляется полость, не принадлежащая множеству достижимости. На рис. 10 представлено зарождение такой ситуации. Здесь изображен срез двух множеств $G(T)$ для моментов $T = 3\pi/\alpha$ и $T = 3.63\pi/\alpha$. Отсечка сделана при помощи плоско-

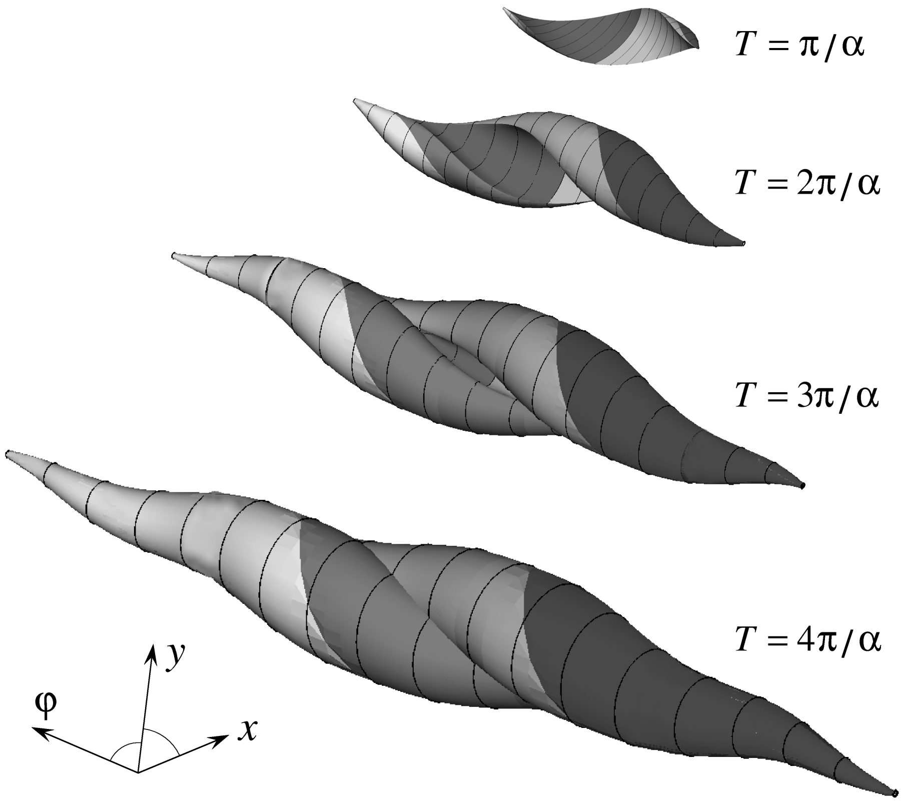

Рис. 9. Развитие множества достижимости.

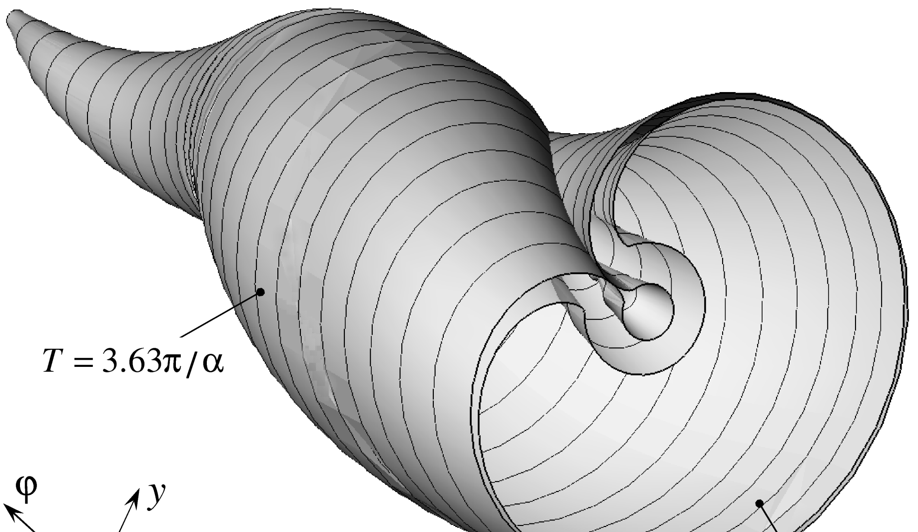

Рис. 10. Нарушение односвязности множества достижимости.

сти $\varphi = 0$. Множество $G(3\pi/\alpha)$ односвязное, а множество $G(3.63\pi/\alpha)$ односвязным не является.

Таким образом, граница трехмерного множества достижимости $G(T)$ устроена весьма просто для не слишком больших моментов времени T. При увеличении T структура границы усложняется. Существует небольшой промежуток времени, на котором множество $G(T)$ не является односвязным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. *Розенберг Г.С.* Построение траекторий оптимального преследования // АиТ. 1965. № 4.
3. *Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В.* Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Тр. Второго Междунар. симп. ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства. Вена, Австрия, сентябрь 1967. Управление космическими аппаратами и кораблями / Под ред. Б.Н. Петрова, И.С. Уколова. М.: Наука, 1971.
4. *Болычевцев Э.М.* Одна задача оптимального управления // Вестн. МГУ. Сер. Математика, Механика. 1968. № 1.
5. *Pecsvaradi T.* Optimal Horizontal Guidace Law for Aircraft in the Terminal Area // IEEE Trans. on Automatic Control. 1972. V. AC-17. № 6.
6. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
7. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Кумков С.И. и др.* Оценивание траекторного движения воздушного судна на основе информационных множеств. Научные доклады. Санкт-Петербург: Академия гражданской авиации, 1999.
8. *Kumkov S.I., Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A.* Informational Sets in a Problem of Observation of Aicraft Trajectory // Proc. Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 2. 2000.
9. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
10. *Бердышев Ю.И.* Об одной задаче построения области достижимости для нелинейной системы третьего порядка // Методы построения множеств достижимости и конструкции расширений. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2001.
11. *Бердышев Ю.И.* Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка // Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления. Свердловск: Институт математики и механики УНЦ АН СССР, 1973.