

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

---

ПРИКЛАДНАЯ  
МАТЕМАТИКА  
И МЕХАНИКА

Том 54

3

---

МОСКВА · 1990

УДК 62—50

© 1990 г.

М. А. Зарх

## УНИВЕРСАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ ВТОРОГО ИГРОКА В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Рассматривается линейная антагонистическая дифференциальная игра двух лиц с фиксированным моментом окончания, выпуклой терминальной функцией платы и геометрическими ограничениями на управления игроков.

В одном из вариантов построения оптимальной стратегии второго (максимизирующего) игрока, использующем минимальную информацию о функции цены, стратегия реализована в виде кусочно-программного управления и требует задания некоторых параметров, зависящих от начальной позиции [1].

Ниже предлагается стратегия второго игрока, в которой синтез управления по принципу обратной связи осуществляется при помощи поверхностей переключения. Оптимальность стратегии может нарушаться лишь при возникновении скольжения по поверхностям переключения. Подобная конструкция рассматривалась [2] для первого игрока в случае скалярного управления.

**1. Постановка задачи.** Пусть динамика объекта описывается соотношениями

$$y' = B(t)u + C(t)v, \quad y \in R^n, \quad u \in P, \quad v \in Q \quad (1.1)$$

Здесь  $u, v$  — векторные управляющие параметры первого и второго игроков,  $P, Q$  — выпуклые компакты. Процесс управления заканчивается в заданный момент  $\theta$ . Показатель качества определяется значением выпуклой терминальной функции  $\gamma(y(\theta))$  на положении  $y(\theta)$ . Первый игрок минимизирует, а второй максимизирует величину  $\gamma(y(\theta))$ . Требуется указать способ построения оптимальной стратегии второго игрока в игре (1.1).

Обозначим  $\Gamma$  функцию цены игры (1.1). Зафиксируем промежуток  $T = [t_{00}, \theta]$ , число  $c^*$  и невозрастающую функцию  $c_*(t): c^* > c_*(t) > \min_x \Gamma(t, x)$ . Будем считать, что множество  $\Omega = \{(t, x) \in T \times R^n: c_*(t) \leq \Gamma(t, x) \leq c^*\}$  содержит область рассматриваемых начальных позиций. Пусть  $W_c = \{(t, x) \in T \times R^n: \Gamma(t, x) \leq c\}$  — множество уровня функции  $\Gamma$  и  $W_c(t) = \{x \in R^n: (t, x) \in W_c\}$  — его сечение в момент  $t$ . Известно, что для всех  $t \leq \theta$  функция  $\Gamma(t, \cdot)$  выпукла. Следовательно, множества  $W_c(t)$  также выпуклы. Дополнительно предположим, что при всех  $t \in T, c_*(t) \leq c \leq c^*$  множества  $W_c(t)$  ограничены и имеют непустую внутренность.

**2. Общая форма задания оптимальной стратегии второго игрока.** Опишем оптимальную стратегию второго игрока, существование и вид которой установлены в [3]<sup>1</sup>. Далее определим ее обобщение.

Введем необходимые обозначения. Для  $l \in R^n$  и  $t \leq \theta$  положим

$$Q(l, t) = \{\bar{q} \in Q: l' C(t) \bar{q} = \max_{q \in Q} l' C(t) q\}$$

<sup>1</sup> См. также Зарх М. А. Универсальная оптимальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре. Свердловск, 1985. 35 с.— Деп. в ВИНТИ 25.10.85, № 7438—В—85.

Символом  $\rho(\cdot, W)$  обозначим опорную функцию. Сопоставим с каждой позицией  $(t, x) \in \Omega$  конус

$$K(t, x) = \{l \in R^n: l'x = \rho(l, W_{\Gamma(t, x)}(t))\}$$

Конус  $K(t, x)$  иначе можно определить как коническую оболочку субдифференциала в точке  $x$  функции  $\Gamma(t, \cdot)$ . Отметим, что  $K(t, x)$  — выпуклый, замкнутый конус, отличный от нуля и не содержащий линейных подпространств. Пусть  $L(t, x)$  — совокупность единичных крайних векторов конуса  $K(t, x)$ . Крайним называется [4] вектор, который не может быть представлен в виде суммы двух линейно независимых векторов конуса.

Определим стратегию второго игрока

$$V^\circ(t, x) = \bigcup_{l \in L(t, x)} Q(l, t), (t, x) \in \Omega; \quad V^\circ(t, x) = Q, (t, x) \notin \Omega$$

Стратегия  $V^\circ$  оптимальна [3] для любой начальной позиции из области  $\Omega$ . Задание стратегии вне  $\Omega$  носит формальный характер и не существенно.

Введем новую стратегию

$$\bar{V}^\circ(t, x) = \bigcup_{l \in \bar{L}(t, x)} Q(l, t)$$

где

$$\bar{L}(t, x) = \{l = \lim l_k: l_k \in L(t_k, x_k), (t, x) = \lim (t_k, x_k)\}$$

Укажем основные свойства <sup>2</sup> стратегии  $\bar{V}^\circ$ : стратегия  $\bar{V}^\circ$  оптимальна в  $\Omega$ , справедливо вложение  $V^\circ(t, x) \subset \bar{V}^\circ(t, x)$ , отображение  $\bar{V}^\circ: (t, x) \rightarrow \bar{V}^\circ(t, x)$  полунепрерывно сверху по включению.

Заметим, что стратегия  $\bar{V}^\circ$  многозначна, т. е. оптимальное в позиции  $(t, x)$  управляющее воздействие второго игрока, вообще говоря, не единственно, а может выбираться из подмножества  $\bar{V}^\circ(t, x)$  компакта  $Q$ . Если  $V^*$  — некоторая стратегия, удовлетворяющая в каждой позиции  $(t, x)$  вложению  $V^*(t, x) \subset \bar{V}^\circ(t, x)$ , то она оптимальна в  $\Omega$ .

**3. Поверхности переключения.** Рассмотрим частные случаи, когда построение стратегии  $V^*$  осуществляется в удобной для численной реализации форме при помощи поверхностей переключения.

Пусть множество  $Q \subset R^s$  — параллелепипед вида

$$Q = \{q = (q_1, \dots, q_s) \in R^s: |q_i| \leq v_i, \quad i = 1, 2, \dots, s\}$$

Пусть  $e_i$  —  $i$ -й орт пространства  $R^s$ ,  $h_i(t) = C(t)e_i$  —  $i$ -й столбец матрицы  $C(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ .

Положим

$$\Pi_i(t) = \{x \in R^n: \Gamma(t, x) = \min \Gamma(t, x + \lambda h_i(t)), \lambda \in R^1\}$$

$$D_i^+(t) = \{x \in R^n: x + \lambda h_i(t) \notin \Pi_i(t), \lambda \geq 0\}$$

$$D_i^-(t) = \{x \in R^n: x + \lambda h_i(t) \notin \Pi_i(t), \lambda \leq 0\}$$

Множество  $\Pi_i(t)$  разбивает пространство  $R^n$  на две части:  $D_i^+(t)$  и  $D_i^-(t)$ . Назовем  $\Pi_i(t)$  поверхностью переключения (ПП). Следующее утверждение поясняет смысл такого названия. Обозначим

$$G_i^+ = \{q \in Q: q_i = v_i\}, \quad G_i^- = \{q \in Q: q_i = -v_i\}$$

<sup>2</sup> Доказательства приведены в работе: Зарх М. А. Позиционное управление второго игрока в линейной дифференциальной игре. М., 1989. 19 с.— Деп. в ВИНТИ, № 6840—В89.

Утверждение 1. Пусть  $(t, x) \in \Omega$ . Условия

$$x \in D_i^+(t) \quad (x \in D_i^-(t)) \quad (3.1)$$

$$l'h_i(t) > 0 \quad \forall l \in \bar{L}(t, x) \quad (l'h_i(t) < 0 \quad \forall l \in \bar{L}(t, x)) \quad (3.2)$$

$$\bar{V}^\circ(t, x) \in G_i^+ \quad (\bar{V}^\circ(t, x) \in G_i^-) \quad (3.3)$$

эквивалентны.

*Доказательство.* Эквивалентность условий (3.2) и (3.3) следует из определения  $\bar{V}^\circ$  и представимости множества  $Q$  в виде

$$Q = \{\bar{q} + \lambda e_i: \bar{q} \in G_i, -2v_i \leq \lambda \leq 0\}$$

Покажем эквивалентность (3.1) и (3.2). Пусть выполнено условие (3.1), т. е.  $x \in D_i^+(t)$ . Это означает, что  $x + \lambda h_i(t) \notin \Pi_i(t)$ ,  $\lambda \geq 0$ . Следовательно,  $\min_\lambda \Gamma(t, x + \lambda h_i(t)) = \Gamma(t, x + \lambda^* h_i(t))$ , где  $\lambda^* < 0$ ,  $x + \lambda^* h_i(t) \in \Pi_i(t)$ . Так как  $\Gamma(t, x + \lambda^* h_i(t)) < \Gamma(t, x)$ , то  $x + \lambda^* h_i(t) \in \text{int } W_{\Gamma(t, x)}(t)$ . Поэтому  $l'(x + \lambda^* h_i(t)) < \rho(l, W_{\Gamma(t, x)}(t))$  для всех  $l \in R^n$ ,  $l \neq 0$ . При  $l \in \bar{L}(t, x)$  имеем  $\rho(l, W_{\Gamma(t, x)}(t)) = l'x$ . Стало быть,  $l'(x + \lambda^* h_i(t)) < l'x$ . Значит,  $l'h_i(t) > 0$  для  $l \in \bar{L}(t, x)$ .

Обратно, пусть выполнено условие (3.2). Так как любой ненулевой вектор конуса представим в виде суммы крайних векторов (теорема 18.5 [4], с. 183), то  $l'h_i(t) > 0$  для  $l \in K(t, x)$ ,  $l \neq 0$ . Следовательно,  $l'(x + \lambda h_i(t)) < \rho(l, W_{\Gamma(t, x)}(t))$  при  $\lambda < 0$  и  $l \in K(t, x)$ ,  $l \neq 0$ . Поэтому для близких к нулю отрицательных  $\lambda$  имеем  $x + \lambda h_i(t) \in \text{int } W_{\Gamma(t, x)}(t)$ . Значит,  $\min_\lambda \Gamma(t, x + \lambda h_i(t)) = \Gamma(t, x + \lambda^* h_i(t)) < \Gamma(t, x)$ ,  $\lambda^* < 0$ . В силу выпуклости функции  $\varphi(\lambda) = \Gamma(t, x + \lambda h_i(t))$  она возрастает на промежутке  $(\lambda^*, +\infty)$ . Следовательно,  $x + \lambda h_i(t) \notin \Pi_i(t)$  при  $\lambda \geq 0$ .

Из утверждения 1 видно, что в области  $D_i^+(t)$  ( $D_i^-(t)$ ) все векторы из множества  $\bar{V}^\circ(t, x)$  имеют  $i$ -ю компоненту, равную  $v_i$ , ( $-v_i$ ).

Определим стратегию  $V^*(t, x) = (V_1^*(t, x), \dots, V_s^*(t, x))$  в виде

$$V_i^*(t, x) = \begin{cases} \pm v_i, & x \in D_i^\pm(t) \\ \{-v_i, v_i\}, & x \in \Pi_i(t); i = 1, 2, \dots, s \end{cases}$$

Ниже будут сформулированы условия, при которых  $V^*(t, x) \subset \bar{V}^\circ(t, x)$ , т. е.  $V^*$  — оптимальная стратегия.

Введем дополнительные обозначения

$$G_i(t, x) = \begin{cases} G_i^\pm, & x \in D_i^\pm(t) \\ Q, & x \in \Pi_i(t); i = 1, 2, \dots, s \end{cases}$$

$$G(t, x) = \bigcap_{i=1}^s G_i(t, x), \quad I(t, x) = \{i \in 1, 2, \dots, s: x \in \Pi_i(t)\}$$

*Предложение 1.*  $V^*(t, x)$  есть совокупность вершин грани  $G(t, x)$ .

*Предложение 2.* Если  $I(t, x) = \emptyset$ , то  $G(t, x)$  — одноточечное множество и  $G(t, x) = V^*(t, x) = \bar{V}^\circ(t, x)$ .

Предложение 2 является прямым следствием определения  $V^*$  и утверждения 1.

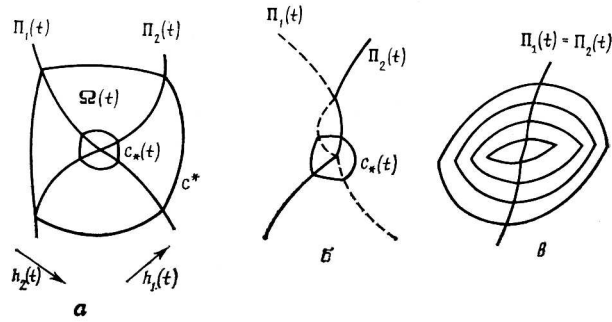
*Условие А.* Для любой вершины  $g$  грани  $G(t, x)$  найдется такая последовательность точек  $\{x_k\}$ , что  $x_k \rightarrow x$ ,  $I(t, x_k) = \emptyset$  и  $G(t, x_k) = g$ .

Отметим, что в точках, не принадлежащих ПП, условие А выполнено. Для проверки достаточно взять последовательность  $x_k \equiv x$  и сослаться на предложение 2.

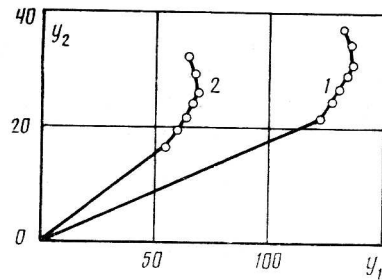
*Предложение 3.* Если в точке  $(t, x)$  выполнено условие А, то

$$V^*(t, x) \subset \bar{V}^\circ(t, x) \quad (3.4)$$

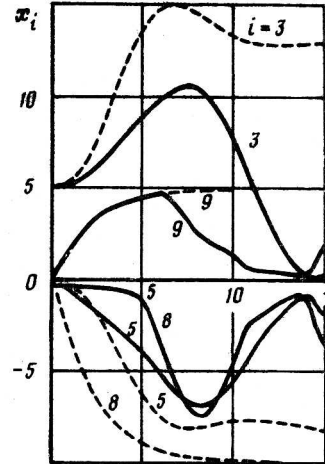
Действительно, из полунепрерывности  $\bar{V}^\circ$  и предложения 2 следует, что каждая вершина грани  $G(t, x)$  содержится в множестве  $\bar{V}^\circ(t, x)$ . Но совокупность всех вершин грани  $G(t, x)$  совпадает с  $V^*(t, x)$ . Стало быть,  $V^*(t, x) \subset \bar{V}^\circ(t, x)$ .



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

*Условие Б.* Существует такой вектор  $l \in \bar{L}(t, x)$ , что  $l'h_i(t) = 0$  для всех  $i \in I(t, x)$ .

*Предложение 4.* Пусть  $I(t, x) \neq \emptyset$  и выполнено условие Б. Тогда справедливо условие вложения (3.4).

Действительно, для вектора  $l$  из условия Б величина  $l'C(t)q$  сохраняет постоянное значение на  $G(t, x)$ . Учитывая вложение  $\bar{V}^o(t, x) \subset G(t, x)$ , следующее из утверждения 1, получаем  $\bar{V}^o(t, x) = G(t, x)$ . Отсюда, в силу предложения 1, вытекает справедливость вложения (3.4).

Из предложений 1—4 следует:

*Теорема 1.* Если в  $\Omega$  для каждой точки, принадлежащей хотя бы одной ПП, выполнено условие А или условие Б, то стратегия  $V^*$  оптимальна в  $\Omega$ .

Дадим геометрическую интерпретацию условий А и Б для случая  $n = s = 2$ . Выполнение условия А означает, что множества  $\Pi_1(t)$  и  $\Pi_2(t)$  — линии и либо не пересекаются в  $\Omega(t) = \{x \in R^2: (t, x) \in \Omega\}$  (фиг. 1, а), либо точки их пересечения изолированы (фиг. 1, б). Условие Б выполнено, например, если в точках множеств  $\Pi_1(t)$ ,  $\Pi_2(t)$  граница  $W_{\Gamma(t, x)}(t)$  является гладкой (фиг. 1, в).

*Замечания. 1°.* Для практической реализации стратегии  $V^*$  факт невыполнения условий А, Б не имеет большого значения. Именно, стратегия  $V^*$  дает оптимальный результат, если не возникает скользящего режима на ПП.

*2°.* Способ управления при помощи ПП можно использовать и в случае, когда множество  $Q \subset R^s$  представимо в виде суммы отрезков

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m, \quad Q_i = [-q^i, q^i] \subset R^s$$

Действительно, переписав игру (1.1) в виде

$$y' = B(t)u + C(t)Ev, \quad y \in R^n$$

$$u \in P, v \in Q^1 = \{q \in R^m: |q_r| \leq 1, r = 1, 2, \dots, m\}$$

где  $E$  — матрица, строки которой — векторы  $q^i$ , приходим к изученному случаю.

**4. Пример.** Используем описанный метод построения стратегии второго игрока для формирования наихудшего ветрового возмущения в задаче управления продольным движением самолета на посадке [1, 5—8].

Линеаризованные относительно номинального движения по глиссаде снижения при допущении о постоянстве силы тяги дифференциальные уравнения продольного движения центра масс самолета имеют вид [7]

$$\begin{aligned} x_j' &= x_{j+1}, \quad j = 1, 3, 5; \quad x_7' = -4x_7 + 4u \\ x_2' &= -0,05x_2 - 0,097x_4 - 0,046x_5 + 0,001x_7 + 0,05x_8 + 0,097x_9 \\ x_4' &= 0,241x_2 - 0,639x_4 + 0,79x_5 + 0,026x_7 - 0,241x_8 + 0,639x_9 \\ x_6' &= 0,017x_2 + 0,398x_4 - 0,501x_5 - 0,526x_6 - 0,383x_7 - 0,017x_8 - 0,398x_9 \\ x_{8,9}' &= -1/2x_{8,9} + 1/2x_{10,11}, \quad x_{10,11}' = -3x_{10,11} + 3v_{1,2} \\ &|u| \leq 20, |v_1| \leq 10, |v_2| \leq 5 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Координаты  $x_1, x_3$  — продольное и вертикальное отклонения центра масс самолета (м),  $x_5$  — отклонение по углу тангажа (град). Координата  $x_7$  имеет смысл отклонения руля высоты (град), параметр  $u$  — «заданное» отклонение руля высоты (град). Координаты  $x_8, x_9$  — отклонения продольной и вертикальной составляющих скорости ветра (м/с) относительно средних значений. Средние значения учтены при расчете номинального движения и равны соответственно  $-5$  и  $0$ . Компоненты  $x_8, x_9$  определяются формируемыми значениями параметров  $v_1, v_2$ . Будем считать, что параметры  $v_1, v_2$  принадлежат второму игроку, параметром  $u$  распоряжается первый игрок.

Зафиксируем промежуток времени  $T = [0, 15]$ . Содержательно момент  $\vartheta = 15c$  считаем моментом пролета торца взлетно-посадочной полосы. Введем функцию платы  $\gamma(x_3, x_4) = \min\{c \geq 0: (x_3, x_4) \in cM\}$ , где  $M$  — шестиугольник с вершинами  $(-3, 1), (0, 1), (3, 0), (3, -1), (0, -1), (-3, 0)$ . Условимся, что первый игрок минимизирует, а второй максимизирует значение платы  $\gamma$  в момент  $\vartheta$ .

Зависимость функции платы лишь от двух координат фазового вектора позволяет перейти к эквивалентной игре второго порядка. Переход осуществляется при помощи замены  $y(t) = X(\vartheta, t)x(t)$ , где  $X(\vartheta, t)$  — матрица, составленная из третьей и четвертой строк фундаментальной матрицы Коши  $\exp[A(\vartheta - t)]$ . Эквивалентная игра второго порядка имеет вид

$$y' = X(\vartheta, t)Bu + X(\vartheta, t)Cv, \quad \gamma(y_1, y_2)$$

$$u \in P = [-20, 20], v \in Q = \{(v_1, v_2): |v_1| \leq 10, |v_2| \leq 5\} \quad (4.2)$$

Если  $V^*(t, y)$  ( $U^*(t, y)$ ) — оптимальная стратегия второго (первого) игрока в игре (4.2), то стратегия  $V_*(t, x) = V^*(t, X(\vartheta, t)x)$  ( $U_*(t, x) = U^*(t, X(\vartheta, t)x)$ ) оптимальна в игре (4.1).

Зафиксируем набор  $C = \{0,6; 0,8; 1,0; 1,5; 2,0; 4,0; 6,0\}$  значений параметра  $c$  и шаг  $\varkappa = 0,05$ , разбивающий отрезок времени  $T = [0, 15]$  точками  $t_i$ . При каждом  $c \in C$  численно построенные множества  $W_c(t_i)$  — выпуклые многоугольники. Значение  $c = 0,6$  есть наименьшее значение, при котором множества  $W_c(t_i)$  не пусты при всех  $t_i \in T$ .

Стратегия  $V^*$  (а следовательно, и стратегия  $V_*$ ) определяется двумя линиями  $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$ , зависящими от  $t$ . Оптимальное значение компоненты  $v_k$  в момент  $t$  определяется линией  $\Pi_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ . На фиг. 2 показаны линии  $\Pi_1(t), \Pi_2(t)$  для момента  $t = 5$ . (Кривые 1 и 2 соответственно — пересечение линий  $\Pi_1(5), \Pi_2(5)$  с полуплоскостью  $y_2 \geq 0$ , части  $\Pi_1(5), \Pi_2(5)$ , лежащие ниже прямой  $y_2 = 0$ , центрально симметричны относительно нуля кривым 1, 2). Оптимальное значение  $v_1(v_2)$  равно  $-10(5)$  справа от  $\Pi_1(5)(\Pi_2(5))$  и  $10(-5)$  слева от  $\Pi_1(5)(\Pi_2(5))$ .

Введем два способа управления первого игрока. Первый — оптимальная стратегия  $U_*(t, x) = U^*(t, X(\vartheta, t)x)$ . Численно она задается при помощи линий переключения [2]. При втором способе стратегия  $\bar{U}$  задается формулами

$$a = 0,6x_3(t) + 9x_4(t) + 12x_6(t)$$

$$\bar{U}(t, x) = \begin{cases} a, & |a| \leq 20 \\ 20, & a > 20 \\ -20, & a < -20 \end{cases}$$

Данные соотношения грубо моделируют используемый в автопилотах «линейный» закон управления рулем высоты [9].

Шаг дискретной схемы для  $V_*$ ,  $U_*$ ,  $\bar{U}$  положим равным 0,05.

На фиг. 3 показаны графики изменения координат  $x_3$ ,  $x_5$ ,  $x_8$ ,  $x_9$  для начального состояния  $x_{30} = 5$ ,  $x_{j0} = 0$ ,  $j \neq 3$ . Значение функции цены в точке  $(0, x_0)$  равно 0,6. Сплошные линии соответствуют способу управления  $U_*$ , штриховые — способу  $\bar{U}$ . Значения платы равны соответственно 0,53 и 5,23. Таким образом, при оптимальном поведении первого игрока получается (в паре со стратегией  $V_*$ ) значение платы, близкое к значению цены игры в начальной позиции. В случае, когда первый игрок не придерживается оптимальной стратегии, значение платы резко возрастает.

Отметим, что существуют промежутки времени из интервала  $T$ , в которых частично или полностью совпадают линии переключения  $\Pi_1(t)$ ,  $\Pi_2(t)$ , а граница множеств  $W_c(t)$  в точках совпадения имеет явный излом, т. е. нельзя говорить о выполнении условий А, Б. Тем не менее результаты, полученные в процессе моделирования, характеризуют стратегию  $V_*$  как практически оптимальную.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зарх М. А., Пацко В. С. Стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 193—200.
2. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 4. С. 78—85.
3. Зарх М. А., Пацко В. С. Построение управления второго игрока в линейной дифференциальной игре на основе свойства отталкивания // Управление с гарантированным результатом. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 37—70.
4. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
5. Титовский И. Н. Игровой подход к задаче синтеза управления самолетом при заходе на посадку // Учен. зап. ЦАГИ. 1981. Т. 12. № 1. С. 85—92.
6. Корнеев В. А., Меликян А. А., Титовский И. Н. Стабилизация глиссады самолета при ветровых возмущениях в минимаксной постановке // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 3. С. 132—139.
7. Боткин Н. Д., Кейн В. Н., Пацко В. С. Применение методов теории дифференциальных игр к задаче управления самолетом на посадке // Позиционное управление с гарантированным результатом. Свердловск: Урал. от-ние АН СССР, 1988. С. 33—44.
8. Miele A., Wang T., Wang H., Melvin W. W. Optimal penetration landing trajectories in the presence of windshear // J. Optimiz. Theory and Appl. 1988. V. 57. N 1. P. 1—40.
9. Федоров С. М., Драбкин В. В., Михайлов О. И., Кейн В. М. Автоматизированное управление самолетами и вертолетами. М.: Транспорт, 1977. 246 с.

Свердловск

Поступила в редакцию  
3.VII.1989