

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПРИКЛАДНАЯ
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

МОСКВА

УДК 62–50

© 1995 г. С.И. Кумков, В.С. Пацко

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Рассматривается модельная задача преследования с неполной информацией. Исследуется случай, когда информационные множества [1–5] являются отрезками. Основная часть работы – доказательство оптимальности предложенных стратегий обратной связи. Приведены результаты моделирования.

Один из вариантов исследования задач управления при неполной информации о фазовом векторе связан с переходом к описанию состояния как множества точек в фазовом пространстве, совместимых с информацией о поведении системы, накопленной до данного момента. Такие множества принято называть информационными множествами (ИМ), и задача ставится как задача управления изменением ИМ во времени с целью минимизации того или иного показателя. Поскольку ИМ зависит от текущего замера, то естественно возникают минимаксные постановки, где первый игрок распоряжается полезным управлением, второй – выбором замеров. Проблеме формализации указанных задач посвящено большое число работ (см., например, [1–5]). Оптимальные решения для ряда задач рассматриваемого типа (ИМ – отрезки) получены в [3, 6, 7].

1. Содержательное описание задачи. Две материальные точки: преследователь P и убегающий E передвигаются на плоскости. Преследователь замеряет в дискретные моменты t_i угловую скорость линии визирования и, применяя в эти же моменты импульсное управление, старается уменьшить величину промаха. Большие промахи считаются неудовлетворительными (высокоточное наведение). Импульсы действуют ортогонально некоторому заранее заданному и неизменному во времени направлению. Пусть σ – величина одного импульса, N – запас импульсов. Символом $k(t_i)$ обозначим количество импульсов с предписанным знаком, поданное в момент t_i ($k(t_i)$ – либо целое отрицательное, либо целое положительное, либо нуль). Ограничение на расход: $\sum_i |k(t_i)| \leq N$. Убегающий изменяет скорость своего движения, выбирая вектор ускорения υ с компонентами υ_x, υ_z . Управление υ стеснено условием $|\upsilon| \leq v$.

Замеряемое в момент t_i значение $\omega_m(t_i)$ и истинная угловая скорость $\omega(t_i)$ линии визирования связаны соотношением $\omega_m(t_i) = \omega(t_i) + \xi(t_i)$. Здесь $\xi(t_i)$ – ошибка замера, относительно которой известно лишь, что $|\xi(t_i)| \leq c$, где $c \geq 0$ – заданная постоянная.

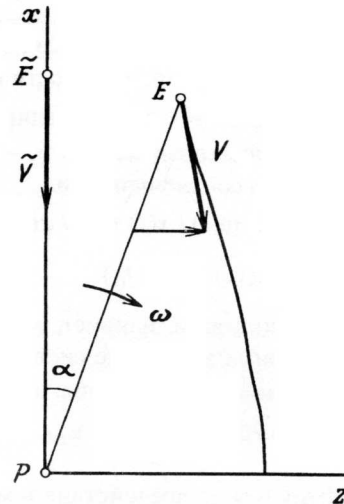
Считаем, что в начальный момент t_0 оговорены номинальное положение \tilde{E} убегающего и номинальный вектор \tilde{V}_E его скорости. Совместим начало разностной системы координат с преследователем (фиг. 1). Направим ось x противоположно вектору $\tilde{V} = \tilde{V}_E - V_P(t_0)$, где $V_P(t_0)$ – вектор начальной скорости преследователя. Условимся, что в момент t_0 преследователь выбирает вектор $V_P(t_0)$ так, чтобы ось x проходила

через точку \tilde{E} . Перпендикулярную к x ось обозначим через z . Направления осей неизменны по t . Предположим, что импульсы действуют вдоль оси z (экономное расходование ресурса в процессе преследования). Положение $E(t_0)$ убегающего в начальный момент и вектор начальной скорости $V_E(t_0)$ могут отличаться от предварительно заданных значений \tilde{E} , \tilde{V}_E . Будем считать, однако, что эти отличия не слишком велики. Пусть $\alpha(t)$ – текущий угол визирования, $V_x(t)$ – составляющая разностной скорости по оси x , e – модуль вектора \tilde{V} .

Уравнения динамики в координатах x, z имеют вид

$$\ddot{z}(t) = v_z - \sigma \sum_i k(t_i) \delta(t - t_i), \quad \ddot{x}(t) = v_x \quad (1.1)$$

$$\sum_i |k(t_i)| \leq N, \quad |v| \leq v$$



Фиг. 1

Импульсное воздействие в момент t_i изменяет скорость \dot{z} скачком на величину $-\sigma k(t_i)$.

2. Динамика вспомогательной дифференциальной игры. Воспользовавшись соотношением $z(t) = x(t) \operatorname{tg} \alpha(t)$, перепишем исходную систему (1.1) в координатах α, ω, x, V_x . Получим

$$\dot{\alpha}(t) = \omega(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) = & -2V_x(t)\omega(t) / x(t) - 2 \operatorname{tg} \alpha(t)\omega^2(t) - \sin \alpha(t) \cos \alpha(t)v_x / x(t) + \\ & + \cos^2 \alpha(t)v_z / x(t) - (\sigma \cos^2 \alpha(t) / x(t)) \sum_i k(t_i) \delta(t - t_i) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\dot{x}(t) = V_x(t), \quad \dot{V}_x(t) = v_x$$

Система в эквивалентных координатах удобна тем, что измеряемая величина ω входит в число фазовых переменных. Кроме того, появляется возможность перехода к различным по степени упрощения вспомогательным задачам. В данной статье ограничимся рассмотрением максимально простой задачи. Полученный алгоритм управления используем затем в исходной системе. Более сложная вспомогательная задача рассмотрена в [8]. Однако в более сложном случае не удастся найти оптимальные стратегии.

Предположим относительно малым изменение вектора разностной скорости, возникающее в процессе движения за счет управлений преследователя и убегающего (слабая управляемость). Поскольку здесь представляют интерес не слишком большие промахи, такое допущение влечет за собой требование малости угла α на сравнительно длительном промежутке движения, начиная от начального момента. Действительно, пусть в некоторый момент t_* угол α большой. Так как конус, в котором может идти будущее движение, мал и ось конуса близка к вертикальной, то промах в конце будет заведомо значительным, причем тем больше, чем больше время до конца от момента t_* . Итак, считаем угол α малым. В упрощенной постановке вспомогательной задачи заменим $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ на нуль, $\cos \alpha$ на единицу. Поскольку измеряемой величиной является ω , а угол α не входит теперь в соотношение для $\dot{\omega}$, то уравнение $\dot{\alpha}(t) = \omega(t)$ можно опустить. Таким образом, понижаем размерность фазового вектора на единицу.

Сделаем дополнительные упрощения. Предположение о слабой управляемости приводит к тому, что (при учете направления вектора \tilde{V} вдоль оси x) подсчет промаха

на конкретном движении можно приближенно заменить подсчетом модуля координаты z в момент, когда $x(t) = 0$. При этом на величину промаха более существенное влияние оказывает изменение скорости по оси z , чем по оси x . Таким образом, упрощая систему (2.1), можем считать составляющую $V_x(t_0)$ точно известной и совпадающей с $\tilde{V}_x = -e$, управляющее воздействие v_x – тождественно равным нулю. Изменение координат ω , x опишется соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{\omega}(t) &= 2e\omega(t)/x(t) + v_z/x(t) - (\sigma/x(t))\sum_i k(t_i)\delta(t-t_i) \\ x(t) &= x(t_0) - e(t-t_0)\end{aligned}$$

Предположим, наконец, что во вспомогательной задаче значение $x(t_0)$ оговорено точно. Тогда поведение системы по координате x определено однозначно. Обозначив через ϑ момент окончания, перепишем соотношение для $\dot{\omega}(t)$ в виде

$$\dot{\omega}(t) = 2\omega(t)/(\vartheta - t) + v_z/e(\vartheta - t) - (\sigma/e(\vartheta - t))\sum_i k(t_i)\delta(t-t_i) \quad (2.2)$$

Импульсное воздействие в момент t_i изменяет координату ω скачком на величину $-\sigma k(t_i)/e(\vartheta - t_i)$. При этом $\sum_i |k(t_i)| \leq N$.

Формулу (2.2) примем за описание динамики вспомогательной дифференциальной игры. Перечень неопределенностей:

$$\omega_m(t_i) = \omega(t_i) + \xi(t_i), \quad |\xi(t_i)| \leq c, \quad |v_z| \leq v, \quad \omega(t_0) \in A \quad (2.3)$$

Здесь A – отрезок, содержащий в себе все значения угловой скорости в момент t_0 , возможные в силу начальной неопределенности разностной системы (1.1) по x , z , \dot{x} , \dot{z} . Изменение ω описывается формулой

$$\omega(t) = \omega(\hat{t}) \frac{(\vartheta - \hat{t})^2}{(\vartheta - t)^2} + \frac{1}{e(\vartheta - t)^2} \int_{\hat{t}}^t (\vartheta - \tau)v_z(\tau)d\tau - \frac{\sigma}{e(\vartheta - t)^2} \sum_{t_i \in [\hat{t}, t]} k(t_i)(\vartheta - t_i)$$

Максимальное (минимальное) значение второго слагаемого достигается при $v_z \equiv v$ ($v_z \equiv -v$). Положим

$$\zeta(\hat{t}, t) = \frac{1}{e(\vartheta - t)^2} \int_{\hat{t}}^t (\vartheta - \tau)v d\tau = \frac{v(t - \hat{t})}{e(\vartheta - t)^2} \left(\vartheta - \frac{1}{2}(\hat{t} + t) \right)$$

3. Формализация дифференциальной игры с неполной информацией. Перейдем к формулировке вспомогательной дифференциальной игры двух лиц, в которой состоянием в момент t_i будет пара: информационное множество на прямой ω и количество оставшихся импульсов.

В качестве начального информационного множества $I_-(t_0)$ возьмем произвольный отрезок на прямой ω . Рассмотрим момент t_i и отрезок $I_-(t_i)$, $i \geq 0$. Пусть $H(t_i) = \{\omega: |\omega - \omega_m(t_i)| \leq c\}$ – множество неопределенности, соответствующее замеру $\omega_m(t_i)$. Положим $I(t_i) = I_-(t_i) \cap H(t_i)$. Условимся, что такое пересечение не пусто. В момент t_i после получения замера первый игрок, распоряжающийся выбором импульсов, может применить свое управление. Отрезок $I(t_i)$ при этом жестким переносом на величину $-\sigma k(t_i)/e(\vartheta - t)$ перейдет в отрезок $I_+(t_i)$.

Определим $I_-(t_{i+1})$ как прогноз положения системы (2.2) на момент t_{i+1} при состоянии $I_+(t_i)$ в момент t_i и нулевом управлении первого игрока на $(t_i, t_{i+1}]$. Пусть ω_* , ω^* – обозначения левого и правого краев рассматриваемых отрезков. Координата $\omega_*(t_{i+1})$ левого края отрезка $I_-(t_{i+1})$ принимает значение

$$\omega_*(t_{i+1}) = \omega_+(t_i) \frac{(\vartheta - t_i)^2}{(\vartheta - t_{i+1})^2} - \zeta(t_i, t_{i+1}) \quad (3.1)$$

Координата $\omega_{-(t_{i+1})}^*$ правого края определяется выражением (3.1) при замене $\omega_{*(t_i)}$ на $\omega_{+(t_i)}^*$ и перемене знака последнего слагаемого.

Каждое из множеств $I_-(t_i), I(t_i), I_+(t_i)$ назовем информационным (до замера, после замера, после импульсов). Множество $I_-(t_i)$ будем называть также множеством прогноза. Таким образом, рекуррентно определена последовательность информационных множеств. Во вспомогательной игре под движением будем понимать изменение во времени информационного множества и количества оставшихся импульсов. Первый игрок распоряжается выбором импульсного управления, второй – формированием замеров. Влияние v_z учитываем при построении множества прогноза. При $c = 0$ рассматриваемая игра переходит в игру с полной информацией. Измерение в момент t_i означает тогда выбор точки из множества $I_-(t_i)$, что соответствует действию некоторого управления $v_z(t)$ на промежутке $[t_{i-1}, t_i]$.

Центр информационного отрезка обозначим символом ω_c , его полуширину – символом b . Имеем $I = (\omega_c, b)$, $I_{\pm} = (\omega_{c\pm}, b_{\pm})$. Пусть $n_+(t_i) = n(t_i) - k(t_i)$. Если $k(t_i) = 0$, то $I_+(t_i) = I(t_i)$, $n_+(t_i) = n(t_i)$.

Позицией игры для первого игрока считаем совокупность (t_i, n, I) , где t_i – момент времени, n – количество оставшихся импульсов, I – информационное множество после замера. Допустимой стратегией первого игрока назовем правило $U: (t_i, n, I) \rightarrow k$, ставящее в соответствие позиции игры количество импульсов с определенным знаком, $|k| \leq n$. Позицией игры для второго игрока условимся считать совокупность (t_i, n, I_-) . Здесь I_- – информационное множество до замера (множество прогноза). Допустимой стратегией второго игрока назовем правило $\Omega: (t_i, n, I_-) \rightarrow \omega_m$, ставящее в соответствие позиции игры замер ω_m . Потребуем, чтобы $I_- \cap H \neq \emptyset$, где H – множество неопределенности, построенное по ω_m .

Задав пару допустимых стратегий U, Ω , шаг Δ дискретной схемы наблюдения и управления, а также начальную позицию $(t_0, n(t_0), I_-(t_0))$, можем говорить о движении системы во времени. Определим функционал платы. Для произвольных ω, t ($t < \vartheta$) положим $\Pi(\omega, t) = |\omega| e^{(\vartheta - t)^2}$. Величина $\Pi(\omega, t)$ приближенно есть пассивный прогнозируемый промах из состояния ω, t , т.е. расстояние от нуля на свободном движении системы (2.2) в момент, когда $x = 0$ (для точного подсчета следовало бы помимо ω, t задать угол α : $|\omega| e^{(\vartheta - t)^2 / \cos^2 \alpha}$). Пусть $\hat{\Pi}(\omega, t) = \Pi(\omega, t) + v(\vartheta - t)^2 / 2$ – максимальный прогнозируемый промах. Зафиксируем параметр $\varepsilon \geq 0$. Символом t_ε обозначим ближайший слева к $\vartheta - \varepsilon$ момент t_i . Число

$$\Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U, \Omega, \Delta, \varepsilon) = \max\{\hat{\Pi}(\omega, t_\varepsilon) : \omega \in I_+(t_\varepsilon)\}$$

назовем промахом, соответствующим начальной позиции $(t_0, n(t_0), I_-(t_0))$, стратегиям U, Ω , дискрету Δ и параметру ε .

Наилучшие гарантии игроков определим соотношениями

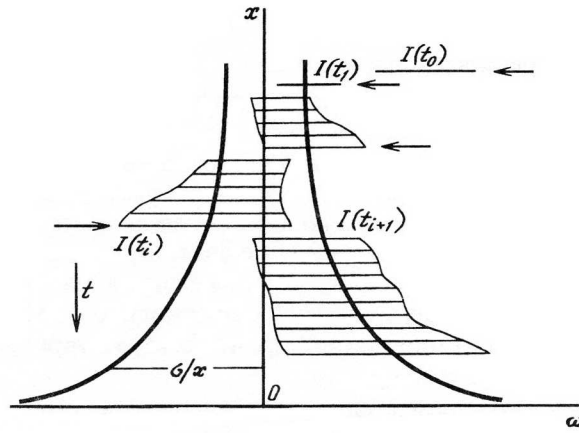
$$\Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) = \inf_U \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\Delta \rightarrow 0} \sup_{\Omega} \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U, \Omega, \Delta, \varepsilon)$$

$$\Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) = \sup_{\Omega} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \inf_U \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U, \Omega, \Delta, \varepsilon)$$

Введем стратегию U^0 первого игрока. Положим

$$k^0 = \left[\frac{\omega_c(t_i) e^{(\vartheta - t_i)^2}}{\sigma} \right] \quad (3.2)$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть. Стратегию U^0 зададим как функцию, ставящую в соответствие позиции (t_i, n, I) число k^0 , вычисляемое по формуле



Фиг. 2

(3.2), если $|k^0| \leq n$, и число $n \operatorname{sign} k^0$, если $|k^0| > n$. Поскольку $\sigma/e(\vartheta - t)$ – изменение ω (по модулю) при действии одного импульса, то вычисления по формуле (3.2) можно трактовать как сравнение величины ω_c (с учетом знака) с порогом $\sigma/e(\vartheta - t)$, равным эффективности одного импульса. Фиг. 2 поясняет сказанное: изображено возможное изменение информационного отрезка I при действии стратегии U^0 . Направления действия импульсов показаны горизонтальными стрелками.

Введем стратегию Ω^0 второго игрока. Пусть ω^0 – та из крайних точек отрезка $I_-(t_i)$, на которой достигается максимум величины $\hat{\Pi}(\omega, t_i)$ по $\omega \in I_-(t_i)$. Точка ω^0 совпадает с наиболее удаленной от нуля точкой отрезка $I_-(t_i)$. Определение Ω^0 : если ω^0 – правый край отрезка $I_-(t_i)$, положим $\omega_m = \omega^0 - c$; если ω^0 – левый край, пусть $\omega_m = \omega^0 + c$. Содержательный смысл: замер подается так, чтобы обеспечить попадание в $I(t_i)$ "наихудшей" точки ω^0 из отрезка прогноза $I_-(t_i)$ и получить при этом максимально возможную длину отрезка $I_-(t_i)$. Значение стратегии Ω^0 в момент t_i не зависит от $n(t_i)$.

4. Оптимальность стратегий U^0, Ω^0 . Изучаемая задача симметрична относительно нуля по ω . Условимся поэтому, что правый край информационного отрезка удален от нуля не меньше, чем левый. При необходимости заменяем рассматриваемый отрезок на симметричный ему.

4.1. Эталонное движение. Определим движение $t \rightarrow (n(t), I(t))$, которое назовем эталонным движением (ЭД). Содержательно это есть изменение информационного отрезка и количества оставшихся импульсов в схеме непрерывного (Δ пренебрежимо мало) наблюдения и управления при действии стратегий U^0, Ω^0 . Считаем, что правый край текущего множества неопределенности совпадает с правым краем информационного отрезка. Компонента $n(\cdot)$ характеризует расход импульсов. Описывая ЭД, будем использовать прежние обозначения: ω_* , ω^* для левого, правого краев и т.д.

Предположим, что $\omega^*(\hat{t}) \geq 0$ в некоторый исходный момент \hat{t} и $\omega_*(\hat{t}) \geq \omega^*(\hat{t}) - 2c$. Пусть $t \rightarrow \omega^*(t)$ – кусочно-непрерывная функция, описывающая изменение правого края отрезка I , а $t \rightarrow \omega_*(t)$ – аналогичная функция для левого края. Пусть далее на участках непрерывности функции $\omega^*(\cdot)$ выполнены условия 1–3:

- 1) $\dot{\omega}^*(t) = 2\omega^*(t) / (\vartheta - t) + v / e(\vartheta - t)$,
- 2) $\omega_*(t) \geq \omega^*(t) - 2c$,
- 3) если $\omega_*(t) > \omega^*(t) - 2c$, то $\dot{\omega}_*(t) = 2\omega_*(t) / (\vartheta - t) - v / e(\vartheta - t)$.

Для моментов разрыва функции $\omega^*(\cdot)$ оговорим условия 4–6:

4) Если $t \geq \hat{t}$ – момент разрыва функции $\omega^*(\cdot)$, то скачок $\Delta\omega^*(t) = \omega_+^*(t) - \omega^*(t)$ совпадает с $-\sigma k(t)/e(\vartheta - t)$ при некотором целом положительном $k(t) \leq n(t)$, т.е. разрыв $\omega^*(\cdot)$ соответствует $k(t)$ импульсам влево. Новое значение (предел справа по t) левого края вычисляется по формуле $\omega_{*+}(t) = \omega_*(t) + \Delta\omega^*(t)$.

5) Разрывы функции $\omega^*(\cdot)$ при $t > \hat{t}$ происходят в моменты, когда центр отрезка находится на пороге $\sigma/e(\vartheta - t)$. Скачок соответствует одному импульсу влево.

6) При скачке в момент \hat{t} число $k(\hat{t})$ определяется как минимальное целое положительное $k \leq n(\hat{t})$ такое, что $\omega_{c+}(\hat{t}) = \omega_c(\hat{t}) - \sigma k/e(\vartheta - \hat{t}) < \sigma/e(\vartheta - \hat{t})$. Иными словами, $k(\hat{t})$ есть минимальное k , для которого новый центр $\omega_{c+}(\hat{t})$ оказывается под порогом $\sigma/e(\vartheta - \hat{t})$. Если искомое k превышает $n(\hat{t})$, полагаем $k(\hat{t}) = n(\hat{t})$.

Зададим компоненту $n(\cdot)$:

7) Функция $t \rightarrow n(t)$ кусочно-постоянна и определяется формулой $n(\hat{t}) = n(\hat{t}) - \sum_{t_j < \hat{t}} k(t_j)$, где $t_j \geq \hat{t}$ – моменты разрыва функции $\omega^*(\cdot)$.

Пару $(n(\cdot), I(\cdot))$, удовлетворяющую условиям 1–7, назовем ЭД, выходящим из позиции $(\hat{t}, n(\hat{t}), I(\hat{t}))$. В соответствие ЭД поставим значение $F(\hat{t}, n, I)$ функции гипотетического промаха, которое определим как максимальный прогнозируемый промах, просчитываемый на ЭД в момент t_f последнего импульса: $F(\hat{t}, n, I) = \hat{P}(\omega_+^*(t_f), t_f)$.

4.2. *Вспомогательные утверждения.* Приведем некоторые свойства движений системы (2.2), ЭД и функции гипотетического промаха.¹

1°. Пусть $\omega^{(1)}(\cdot), \omega^{(2)}(\cdot)$ – решения дифференциального уравнения (2.2) на промежутке $[\hat{t}, t']$ в силу управляющих воздействий $v_z^{(1)}(\cdot), k^{(1)}(\cdot)$ и $v_z^{(2)}(\cdot), k^{(2)}(\cdot)$, выходящие из состояния $\omega^{(1)}(\hat{t}) = \omega^{(2)}(\hat{t})$. Предположим, что: $v_z^{(1)}(\cdot) = v_z^{(2)}(\cdot); k^{(1)}(t)$ принимает целые положительные значения на дискретном наборе моментов t_1, \dots, t_d и равно нулю для остальных моментов; $k^{(2)}(t) = 0$ при $t \in [\hat{t}, t')$ и $k^{(2)}(t') = \sum_{s=1}^d k^{(1)}(t_s)$. Тогда $\omega^{(1)}(t') \leq \omega^{(2)}(t')$. Равенство реализуется лишь в случае $d = 1, t_d = t'$.

2°. Пусть на ЭД для некоторого момента $t' > t_0$ выполнено неравенство $\omega_*(t') > \omega^*(t') - 2c$. Тогда $\omega_*(t) > \omega^*(t) - 2c$ при $t \in [t_0, t')$. До момента t' на промежутках без импульсов скорость развития полуширины $b(t)$ является максимально возможной и описывается соотношением $\dot{b}(t) = 2b(t)/(\vartheta - t) + v/e(\vartheta - t)$.

3°. Пусть для движения в силу дискретной схемы при произвольной стратегии U первого игрока и стратегии Ω^0 второго на промежутке (\hat{t}, t') нет импульсов. Предположим, что $\omega_*(t') > \omega^*(t') - 2c$. Тогда $\omega_*(t) > \omega^*(t) - 2c$ при $t \in (\hat{t}, t')$, скорость развития полуширины $b(t)$ на (\hat{t}, t') является максимально возможной и описывается соотношением $\dot{b}(t) = 2b(t)/(\vartheta - t) + v/e(\vartheta - t)$.

4°. Вдоль ЭД функция F гипотетического промаха есть константа.

Сформулируем в виде леммы свойство монотонности функции гипотетического промаха. Положим $F^{(i)} = F(t, n^{(i)}(t), I^{(i)}(t))$, $i = 1, 2$.

¹ См. подробное изложение: Кумков С.И., Пацко В.С. Модельная задача преследования с неполной информацией: Препринт. Екатеринбург. Ин-т математики и механики УрО РАН. 1993. 64 с.

Лемма 1. Пусть в момент t две позиции $(t, n^{(1)}(t), I^{(1)}(t))$, $(t, n^{(2)}(t), I^{(2)}(t))$ таковы, что $n^{(1)}(t) = n^{(2)}(t)$, $\omega_c^{(1)}(t) \geq \omega_c^{(2)}(t)$, $b^{(1)}(t) \geq b^{(2)}(t)$. Справедлива оценка

$$F^{(2)} \leq F^{(1)} \leq F^{(2)} + (\omega^{(1)*}(t) - \omega^{(2)*}(t))e^{(\vartheta - t)^2} \quad (4.1)$$

Неравенство $F^{(2)} \leq F^{(1)}$ выполнено также в случае $n^{(1)}(t) \leq n^{(2)}(t)$, $I^{(1)}(t) \supset I^{(2)}(t)$.

В следующих двух утверждениях говорится о значениях $F(t, n(t), I(t))$, $F(t, n(t) - 1, I_+(t))$ функции F до и после одного импульса.

5°. Пусть позиция $(t, n(t), I(t))$ произвольна и действует один импульс вправо. Тогда значение функции F после импульса не убывает.

6°. Пусть позиция $(t, n(t), I(t))$ такова, что $\omega_c(t) < \sigma/e^{(\vartheta - t)}$ (центр под порогом), и действует один импульс влево. Тогда значение функции F после импульса не убывает.

4.3. *Седловая точка.* Пусть $K = [\omega_*, \omega^*]$ – произвольный отрезок. Символом $Y(K)$ обозначим отрезок, правый край которого совпадает с ω^* , а левый определяется как $\max\{\omega_*, \omega^* - 2c\}$.

Лемма 2. Для любой начальной позиции $(t_0, n(t_0), I_-(t_0))$, любой стратегии U первого игрока, любых Δ и ϵ справедливо неравенство

$$\Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U, \Omega^0, \Delta, \epsilon) \geq F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))) \quad (4.2)$$

Доказательство. Говоря о реальном движении (РД), подразумеваем движение в силу дискретной схемы и стратегий U, Ω^0 . Символы, относящиеся к РД, отмечаем чертой сверху. Волна будет сопровождать символы вспомогательных ЭД. Основная идея – неубывание функции F вдоль РД. Выделим моменты τ_1, \dots, τ_m действия импульсов на РД.

А. Исследуем изменение F вдоль РД на промежутке от τ_s до τ_{s+1} . При действии импульсов множество $\bar{I}(\tau_s)$ переходит в $\bar{I}_+(\tau_s)$. Из свойств 4°–6° следует, что

$$F(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), \bar{I}_+(\tau_s)) \geq F(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{I}(\tau_s)), \quad s = 1, \dots, m \quad (4.3)$$

Установим неравенство

$$F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) \geq F(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), \bar{I}_+(\tau_s)), \quad s = 1, \dots, m-1 \quad (4.4)$$

Выпустим из позиции $(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), \bar{I}_+(\tau_s))$ ЭД и доведем его до момента τ_{s+1} . Пусть $g_s \geq 0$ – количество импульсов ЭД на $[\tau_s, \tau_{s+1}]$. В соответствие позиции $(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1}))$ поставим позицию $(\tau_{s+1}, \bar{n}^1(\tau_{s+1}), \bar{I}^1(\tau_{s+1}))$, где $\bar{n}^1(\tau_{s+1}) = \bar{n}(\tau_{s+1}) + g_s = \bar{n}_+(\tau_s)$, правый край $\bar{\omega}^{1*}(\tau_{s+1})$ отрезка $\bar{I}^1(\tau_{s+1})$ получен переносом вправо на g_s импульсов точки $\bar{\omega}^*(\tau_{s+1})$, полуширина $\bar{b}^1(\tau_{s+1})$ равна $\bar{b}(\tau_{s+1})$. Имеем $F(\tau_{s+1}, \bar{n}^1(\tau_{s+1}), \bar{I}^1(\tau_{s+1})) = F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1}))$ (кратко: $\bar{F}^1 = \bar{F}$).

Докажем неравенство $F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) \geq F(\tau_{s+1}, \bar{n}^1(\tau_{s+1}), \bar{I}^1(\tau_{s+1}))$ ($\bar{F} \geq \bar{F}^1$). Для сокращения записи условимся опускать аргумент τ_{s+1} . Поскольку второй игрок использует стратегию Ω^0 , то на (τ_s, τ_{s+1}) правый край информационного отрезка на РД уходит вправо с максимально возможной скоростью. В силу свойства 1° получаем $\bar{\omega}^{1*} \leq \bar{\omega}^*$. Если $\bar{\omega}_c^1 \geq \bar{\omega}_c$, то $\bar{I}^1 \subset \bar{I}$ и нужное неравенство $\bar{F} \geq \bar{F}^1$ вытекает из второй части леммы 1. Пусть $\bar{\omega}_c^1 < \bar{\omega}_c$. При $\bar{b}^1 \leq \bar{b}$ ссылаемся на левое неравенство оценки (4.1). Предположим, что $\bar{b} < \bar{b}^1$. Тогда $\bar{b} < c$. Опираясь на свойство 3°, получаем, что на (τ_s, τ_{s+1}) полуширина $\bar{b}(t)$ развивалась с максимально возможной скоростью. Поэтому $\bar{b} \geq \bar{b}^1$. Противоречие.

Итак, $\bar{F} \geq \bar{F}^1$. Поскольку $\bar{F}^1 = \bar{F}$, то $\bar{F} \geq \bar{F}$. Последнее, при учете равенства $F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) = F(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), \bar{I}_+(\tau_s))$, влечет за собой оценку (4.4).

Аналогично (4.4) для случая $\tau_1 > t_0$ (т.е. когда начальный момент t_0 не является моментом импульса) доказывается неравенство

$$F(\tau_1, \bar{n}(\tau_1), \bar{I}(\tau_1)) \geq F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0)) \quad (4.5)$$

ЭД при этом выпускается из позиции $(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0))$.

Б. Опираясь на неравенства (4.3)–(4.5), получим

$$\begin{aligned} & F(\tau_m, \bar{n}_+(\tau_m), \bar{I}_+(\tau_m)) \geq F(\tau_m, \bar{n}(\tau_m), \bar{I}(\tau_m)) \geq \dots \geq \\ & \geq F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) \geq F(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), \bar{I}_+(\tau_s)) \geq F(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{I}(\tau_s)) \geq \dots \geq \\ & \geq F(\tau_1, \bar{n}(\tau_1), \bar{I}(\tau_1)) \geq F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0)) \end{aligned}$$

Так как действует стратегия Ω^0 , то $\bar{I}(t_i) = Y(\bar{I}_-(t_i))$ в любой момент t_i . Поэтому $F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0)) = F(t_0, \bar{n}(t_0), Y(\bar{I}_-(t_0)))$ и $F(t_\varepsilon, 0, \bar{I}_+(t_\varepsilon)) = F(\tau_m, 0, \bar{I}_+(\tau_m))$. Учитывая, что $F(\tau_m, 0, \bar{I}_+(\tau_m)) \geq F(\tau_m, \bar{n}_+(\tau_m), \bar{I}_+(\tau_m))$, $\Phi(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}_-(t_0), U, \Omega^0, \Delta, \varepsilon) = F(t_\varepsilon, 0, \bar{I}_+(t_\varepsilon))$ и $\bar{n}(t_0) = n(t_0)$, $\bar{I}_-(t_0) = I_-(t_0)$, приходим к неравенству (4.2).

Лемма 3. Для любой начальной позиции $(t_0, n(t_0), I_-(t_0))$, любой стратегии Ω второго игрока, любых Δ и ε справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^0, \Omega, \Delta, \varepsilon) \leq \\ & \leq \max\{F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))) + r_1 \Delta, [r_2 + r_3(\varepsilon + \Delta)](\varepsilon + \Delta)\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

причем постоянные r_1, r_2, r_3 зависят только от параметров задачи.

Доказательство. Под РД здесь понимаем движение в силу дискретной схемы и стратегий U^0, Ω . Символы РД отмечаем чертой сверху, волной – символы вспомогательных ЭД. Основная идея – оценка возрастания функции F вдоль РД. Выделим моменты τ_1, \dots, τ_m действия импульсов на РД. Поскольку используется стратегия U^0 , то импульсы подаются в те из моментов дискретной схемы, когда центр РД находится на или за порогом.

А. Исследуем изменение F вдоль РД на промежутке от τ_s до τ_{s+1} . Из свойства 4° следует, что

$$F(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), \bar{I}_+(\tau_s)) = F(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{I}(\tau_s)), \quad s = 1, \dots, m \quad (4.7)$$

Выпустим из позиции $(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), \bar{I}_+(\tau_s))$ ЭД и доведем его до момента τ_{s+1} . Пусть g_s – число импульсов ЭД на $[\tau_s, \tau_{s+1})$. Установим неравенство

$$F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) \leq F(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), \bar{I}_+(\tau_s)) + \sigma g_s \Delta, \quad s = 1, \dots, m-1 \quad (4.8)$$

Обозначим через t' ближайший слева к τ_{s+1} момент дискретной схемы, $t' \neq \tau_{s+1}$. Возможно совпадение t' с τ_s .

Предположим, что $t' > \tau_s$. В этом случае центр РД в момент t' ниже порога. Оценим $\bar{\omega}^*(t')$ через $\tilde{\omega}^*(t')$. Если на $[\tau_s, t')$ нет импульсов ЭД, то $\bar{\omega}^*(t') \leq \tilde{\omega}^*(t')$.

Покажем, что при наличии импульсов

$$\bar{\omega}^*(t') \leq \tilde{\omega}^*(t') + \sigma / e(\vartheta - t') \quad (4.9)$$

Пусть t'' – момент последнего импульса ЭД до t' . Тогда $t'' > \tau_s$, в момент t'' центр ЭД на пороге, $\tilde{b}(t'') = \tilde{\omega}_+^*(t'')$.

В случае $\tilde{b}(t'') = c$ имеем

$$\bar{b}(t') \leq c \leq c \gamma(\vartheta, t'', t') = \tilde{\omega}_+^*(t'') \gamma(\vartheta, t'', t') \leq \tilde{\omega}^*(t')$$

$$\gamma(\vartheta, t'', t') = (\vartheta - t'')^2 / (\vartheta - t')^2$$

Пусть $\bar{b}(t'') < c$. В силу свойства 2° заключаем, что $\bar{b}(t)$ на $[\tau_s, t'')$ развивалось с максимальной возможной скоростью. Учитывая, что $\bar{b}(\tau_s) = \bar{b}_+(\tau_s)$ и $t'' > \tau_s$, получаем $\bar{b}(t'') \geq \bar{b}(t'')$ (даже если t'' не является моментом дискретной схемы). Имеем

$$\bar{b}(t') \leq \bar{b}(t'')\gamma(\vartheta, t'', t') + \zeta(t'', t') \leq \tilde{\omega}_+^*(t'')\gamma(\vartheta, t'', t') + \zeta(t'', t') = \tilde{\omega}^*(t')$$

Неравенство (4.9) следует из соотношений $\bar{\omega}^*(t') = \bar{\omega}_c(t') + \bar{b}(t')$, $\bar{\omega}_c(t') < \sigma/e(\vartheta - t')$.

Пусть $t' = \tau_s$. Тогда $\bar{\omega}_+^*(t') = \tilde{\omega}^*(t')$.

Перейдем непосредственно к доказательству оценки (4.8). Положим $h_s = 0$, если $t' = \tau_s$ или $t' > \tau_s$, но на $[\tau_s, t')$ отсутствуют импульсы эталонного движения. Считаем $h_s = 1$, если $t' > \tau_s$ и на $[\tau_s, t')$ есть импульсы эталонного движения. Пусть $\varphi_s \geq 0$ – количество импульсов эталонного движения на $[t', \tau_{s+1})$. В соответствие позиции $(\tau_{s+1}, \tilde{n}(\tau_{s+1}), \tilde{I}(\tau_{s+1}))$ поставим позицию $(\tau_{s+1}, \tilde{n}^1(\tau_{s+1}), \tilde{I}^1(\tau_{s+1}))$, где $\tilde{n}^1(\tau_{s+1}) = \tilde{n}(\tau_{s+1}) + h_s + \varphi_s$, правый край $\tilde{\omega}^{1*}(\tau_{s+1})$ отрезка $\tilde{I}^1(\tau_{s+1})$ получен переносом вправо на $h_s + \varphi_s$ импульсов точки $\tilde{\omega}^*(\tau_{s+1})$, полуширина $\tilde{b}^1(\tau_{s+1})$ равна $\tilde{b}(\tau_{s+1})$. Имеем $F(\tau_{s+1}, \tilde{n}^1(\tau_{s+1}), \tilde{I}^1(\tau_{s+1})) = F(\tau_{s+1}, \tilde{n}(\tau_{s+1}), \tilde{I}(\tau_{s+1}))$ (кратко: $\tilde{F}^1 = \tilde{F}$).

Предположим, что $t' > \tau_s$. Из точки $\bar{\omega}^*(t')$ в момент t' выпустим движение системы (2.2) при $v_z(t) \equiv v$, $k(t_i) \equiv 0$. Пусть $\hat{\omega}(\tau_{s+1})$ – его положение в момент τ_{s+1} . Имеем $\bar{\omega}^*(\tau_{s+1}) \leq \hat{\omega}(\tau_{s+1})$. Сравним $\bar{\omega}^*(\tau_{s+1})$ с $\tilde{\omega}^{1*}(\tau_{s+1})$. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(\tau_{s+1}) &= \bar{\omega}^*(t')\gamma(\vartheta, t', \tau_{s+1}) + \zeta(t', \tau_{s+1}) \leq \left(\tilde{\omega}^*(t') + \frac{\sigma h_s}{e(\vartheta - t')} \right) \gamma(\vartheta, t', \tau_{s+1}) + \zeta(t', \tau_{s+1}) \\ \tilde{\omega}^*(\tau_{s+1}) &= \tilde{\omega}^*(t')\gamma(\vartheta, t', \tau_{s+1}) + \zeta(t', \tau_{s+1}) - \sum_{j=1}^{\varphi_s} \frac{\sigma(\vartheta - t_j)}{e(\vartheta - \tau_{s+1})^2} \\ \tilde{\omega}^{1*}(\tau_{s+1}) &= \tilde{\omega}^*(\tau_{s+1}) + \frac{\sigma(h_s + \varphi_s)}{e(\vartheta - \tau_{s+1})} \end{aligned}$$

Здесь t_j ($j = 1, \dots, \varphi_s$) – моменты импульсов ЭД на промежутке от t' до τ_{s+1} ; каждому j соответствует один импульс. Далее,

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(\tau_{s+1}) - \tilde{\omega}^{1*}(\tau_{s+1}) &\leq \left(\tilde{\omega}^*(t') + \frac{\sigma h_s}{e(\vartheta - t')} \right) \gamma(\vartheta, t', \tau_{s+1}) - \tilde{\omega}^*(t')\gamma(\vartheta, t', \tau_{s+1}) + \\ &+ \sum_{j=1}^{\varphi_s} \frac{\sigma(\vartheta - t_j)}{e(\vartheta - \tau_{s+1})^2} - \frac{\sigma(h_s + \varphi_s)}{e(\vartheta - \tau_{s+1})} = \frac{\sigma h_s (\vartheta - t')}{e(\vartheta - \tau_{s+1})^2} + \sum_{j=1}^{\varphi_s} \frac{\sigma(\vartheta - t_j)}{e(\vartheta - \tau_{s+1})^2} - \\ &- \frac{\sigma(h_s + \varphi_s)}{e(\vartheta - \tau_{s+1})} \leq \frac{\sigma(h_s + \varphi_s)(\vartheta - t')}{e(\vartheta - \tau_{s+1})^2} - \frac{\sigma(h_s + \varphi_s)}{e(\vartheta - \tau_{s+1})} = \frac{\sigma(h_s + \varphi_s)\Delta}{e(\vartheta - \tau_{s+1})^2} \end{aligned}$$

В итоге

$$\bar{\omega}^*(\tau_{s+1}) \leq \tilde{\omega}^{1*}(\tau_{s+1}) + \frac{\sigma(h_s + \varphi_s)\Delta}{e(\vartheta - \tau_{s+1})^2} \quad (4.10)$$

Пусть $t' = \tau_s$. Оценка (4.10) справедлива и в этом случае, $h_s = 0$. В приведенных выкладках вместо $\bar{\omega}^*(t')$ нужно писать $\bar{\omega}_+^*(t')$, следует учесть также, что в момент $t' = t_0$ может быть несколько импульсов.

Положим $\bar{F} = F(\tau_{s+1}, \tilde{n}(\tau_{s+1}), \tilde{I}(\tau_{s+1}))$. Докажем неравенство

$$\bar{F} \leq \tilde{F}^1 + \sigma(h_s + \varphi_s)\Delta \quad (4.11)$$

Для сокращения записи условимся опускать аргумент τ_{s+1} .

Пусть $\tilde{\omega}^{1*} \leq \bar{\omega}^*$. Предположим, что $\tilde{b}^1 \leq \bar{b}$. Имеем $\tilde{\omega}_c^1 \leq \bar{\omega}_c$. В самом деле, это очевидно при $\tilde{b}^1 = \bar{b}$. Пусть $\tilde{b}^1 < \bar{b}$. Если $\tilde{b} < c$, то на $[\tau_s, \tau_{s+1})$ полуширина $\tilde{b}(t)$ развивалась с максимально возможной скоростью (свойство 2°). Так как $\tilde{b}(\tau_s) = \bar{b}_+(\tau_s)$, то $\tilde{b} \geq \bar{b}$. В итоге $\tilde{b}^1 = \bar{b} \geq \bar{b}$. Противоречие. Если $\tilde{b} = c$, то $\tilde{b}^1 = c$, и с учетом $\tilde{\omega}^{1*} \leq \bar{\omega}^*$ получаем $\tilde{\omega}_c^1 = \tilde{\omega}^{1*} - c \leq \bar{\omega}^* - c \leq \bar{\omega}_c$. Оценка (4.11) вытекает из леммы 1, неравенства (4.10) и соотношения $\tilde{n}^1 \leq \bar{n}$. Предположим, что $\tilde{b}^1 > \bar{b}$. Обозначим $\tilde{I}^1 = (\bar{\omega}_c^1, \tilde{b}^1)$, $\bar{\omega}_c^1 = \bar{\omega}^* - \tilde{b}^1$, $\tilde{n}^1 = \bar{n}$, $\tilde{F}^1 = F(\tau_{s+1}, \tilde{n}^1, \tilde{I}^1)$. Применяя лемму 1, получим $\tilde{F}^1 \leq \bar{F}^1$ в случае $\bar{\omega}_c^1 \leq \bar{\omega}_c^1$ и $\tilde{F}^1 \leq \bar{F}^1 + \sigma(h_s + \varphi_s)\Delta$, если $\bar{\omega}_c^1 > \bar{\omega}_c^1$. Поскольку $\tilde{I}^1 \supset \bar{I}$, то $\tilde{F} \leq \bar{F}^1 \leq \tilde{F}^1 + \sigma(h_s + \varphi_s)\Delta$.

Пусть $\tilde{\omega}^{1*} > \bar{\omega}^*$. Предположим, что $\tilde{b}^1 < \bar{b}$. Тогда $\tilde{b} = \tilde{b}^1 < c$. Следовательно, $\tilde{b}(t)$ развивалась на $[\tau_s, \tau_{s+1})$ с максимально возможной скоростью (свойство 2°). Поскольку $\tilde{b}(\tau_s) = \bar{b}_+(\tau_s)$, то $\tilde{b} \geq \bar{b}$. В итоге $\tilde{b}^1 = \bar{b} \geq \bar{b}$. Противоречие. Предположим, что $\tilde{b}^1 \geq \bar{b}$. В силу леммы 1 получаем $\tilde{F}^1 \geq \bar{F}$.

Итак, величины \tilde{F} и \tilde{F}^1 связаны соотношением (4.11). Поскольку $(h_s + \varphi_s) \leq g_s$ и $\tilde{F}^1 = \tilde{F}$, то из (4.11) следует

$$F(\tau_{s+1}, \tilde{n}(\tau_{s+1}), \tilde{I}(\tau_{s+1})) \leq F(\tau_{s+1}, \tilde{n}(\tau_{s+1}), \tilde{I}(\tau_{s+1})) + \sigma g_s \Delta, \quad s = 1, \dots, m-1$$

Последнее при учете равенства $F(\tau_{s+1}, \tilde{n}(\tau_{s+1}), \tilde{I}(\tau_{s+1})) = F(\tau_s, \tilde{n}_+(\tau_s), \tilde{I}_+(\tau_s))$ влечет за собой оценку (4.8). Аналогично (4.8) для случая $\tau_1 > t_0$ (т.е. когда начальный момент t_0 не является моментом импульса) доказывается неравенство

$$F(\tau_1, \tilde{n}(\tau_1), \tilde{I}(\tau_1)) \leq F(t_0, \tilde{n}(t_0), \tilde{I}(t_0)) + \sigma g_0 \Delta \quad (4.12)$$

где g_0 – число импульсов ЭД на $[t_0, \tau_1)$, выпущенного из позиции $(t_0, \tilde{n}(t_0), \tilde{I}(t_0))$.

Б. Рассмотрим момент $\tau_m \leq t_\varepsilon$ последнего импульса на РД. Предположим вначале, что $\tilde{n}_+(\tau_m) = 0$. Это означает, что истрачены все импульсы. Используя формулы (4.7), (4.8), (4.12) и соотношения $g_s \leq \tilde{n}_+(\tau_s) \leq N$, $m \leq N$, получим

$$\begin{aligned} F(\tau_m, 0, \tilde{I}_+(\tau_m)) &= F(\tau_m, \tilde{n}_+(\tau_m), \tilde{I}_+(\tau_m)) = F(\tau_m, \tilde{n}(\tau_m), \tilde{I}(\tau_m)) \leq \\ &\leq F(t_0, \tilde{n}(t_0), \tilde{I}(t_0)) + \sigma N(N+1)\Delta \end{aligned}$$

Так как стратегия Ω произвольна, то при учете леммы 1 имеем $F(t_i, \tilde{n}(t_i), \tilde{I}(t_i)) \leq F(t_i, \tilde{n}(t_i), Y(\tilde{I}_-(t_i)))$ в любой момент t_i . Поэтому $F(t_0, \tilde{n}(t_0), \tilde{I}(t_0)) \leq F(t_0, \tilde{n}(t_0), Y(\tilde{I}_-(t_0)))$ и $F(t_\varepsilon, 0, \tilde{I}_+(t_\varepsilon)) \leq F(\tau_m, 0, \tilde{I}_+(\tau_m))$. Поскольку $\Phi(t_0, \tilde{n}(t_0), \tilde{I}_-(t_0), U^0, \Omega, \Delta, \varepsilon) = F(t_\varepsilon, 0, \tilde{I}_+(t_\varepsilon))$ и $\tilde{n}(t_0) = n(t_0)$, $\tilde{I}_-(t_0) = I_-(t_0)$, то

$$\Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^0, \Omega, \Delta, \varepsilon) \leq F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))) + r_1 \Delta \quad (4.13)$$

причем постоянная r_1 зависит только от параметров задачи.

Предположим, что $\tilde{n}_+(\tau_m) = 0$. Тогда в момент t_ε центр $\bar{\omega}_{c+}(t_\varepsilon)$ РД находится под порогом. Следовательно, $F(t_\varepsilon, 0, \tilde{I}_+(t_\varepsilon)) \leq [\sigma/e(\vartheta - t_\varepsilon) + c]e(\vartheta - t_\varepsilon)^2 + v(\vartheta - t_\varepsilon)^2/2$. Учитывая неравенство $\vartheta - t_\varepsilon \leq \varepsilon + \Delta$, получим $F(t_\varepsilon, 0, \tilde{I}_+(t_\varepsilon)) \leq [\sigma + (ce + v/2)(\varepsilon + \Delta)](\varepsilon + \Delta)$. В итоге

$$\Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^0, \Omega, \Delta, \varepsilon) \leq [r_2 + r_3(\varepsilon + \Delta)](\varepsilon + \Delta) \quad (4.14)$$

причем постоянные r_2, r_3 зависят только от параметров задачи.

Объединяя (4.13) и (4.14), получаем оценку (4.6).

Теорема. В случае $x_0 = x^0$ стратегии U^0, Ω^0 являются оптимальными. При этом

$$\Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) = \Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) = F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0)))$$

Доказательство. Используя оценки (4.2) и (4.6), получаем

$$\begin{aligned} L^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0), \Omega^0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \inf_U \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U, \Omega^0, \Delta, \varepsilon) \geq \\ &\geq F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))) \\ L^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^0) &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\Delta \rightarrow 0} \sup_{\Omega} \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^0, \Omega, \Delta, \varepsilon) \leq \\ &\leq F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))) \end{aligned}$$

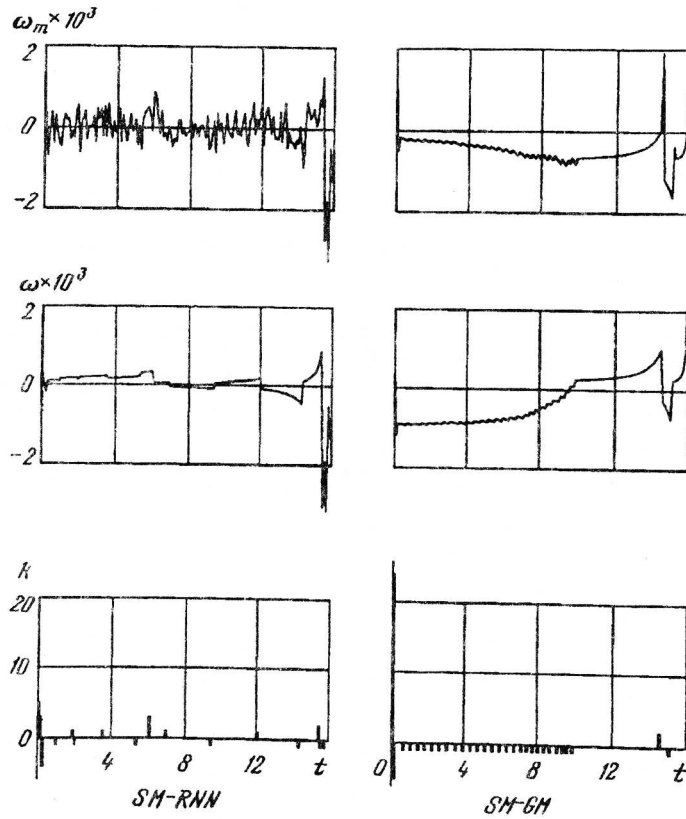
Следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) &\geq L^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0), \Omega^0) \geq F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))) \geq \\ &\geq L^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^0) \geq \Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

С другой стороны, непосредственно из определения $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ имеем $\Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) \leq \Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0))$. Таким образом, все члены соотношения (4.15) равны.

5. Результаты моделирования. Обозначим через SM способ управления в системе (1.1), соответствующий стратегии U^0 . Приведем результаты сравнения способа SM со способом управления ФК, использующим калмановскую фильтрацию угловой скорости линии визирования. Фильтр Калмана был запрограммирован для модели, в которой динамика описывается системой (2.2), наблюдение и управление осуществляются с шагом Δ , возмущающие факторы распределены по нормальному закону с нулевым средним. Дисперсии задавались через максимально возможные отклонения, определяемые геометрическими ограничениями, входящими в формулы (2.3). Возмущающие факторы, учитываемые в модели: динамическая помеха, обусловленная ускорением v_z , дисперсия подсчитывается по формуле $(v/3)^2$; ошибка замера угловой скорости, дисперсия принимается равной $(c/3)^2$; начальный разброс угловой скорости, дисперсия разброса подсчитывается через полуширину отрезка A . Соотношения рекуррентного пошагового оценивания аналогичны приведенным в [9]. При работе фильтра на каждом шаге дискретной схемы выдается оценка угловой скорости, импульсное управление в системе (1.1) вырабатывается при помощи порога $\sigma/x(t)$ так, как если бы эта оценка совпадала с точным значением.

Начальные значения $x(t_0)$ и $V_x(t_0)$ предполагались известными преследователю и равными, соответственно, 80000 м и -5000 м/с. Неопределенность начального положения по горизонтали $|z| \leq 2000$ м, неопределенность вектора начальной скорости по горизонтали $|V_z| \leq 100$ м/с. Величина одного импульса $\sigma = 5$ м/с, количество импульсов $N = 70$. Ускорение убегающего по вертикали $v_x \equiv 0$, по горизонтали $|v_z| \leq v = 2$ м/с². Погрешность замера угловой скорости линии визирования ограничена постоянной $c = 0,0009$ рад/с. Шаг $\Delta = 0,1$ с, порог $\varepsilon = 0,1$ с. Начальное информационное множество $I_-(t_0) = A$ – отрезок, его крайние точки были взяты в виде $\omega_{*-}(t_0) = (-100 \cdot 80000 - 5000 \cdot 2000)/80000^2$, $\omega_{*+}(t_0) = (100 \cdot 80000 + 5000 \cdot 2000)/80000^2$. Поскольку истинное значение угловой скорости подсчитывается по формуле $\omega(t) = (\dot{z}(t)x(t) - \dot{x}(t)z(t))/(x^2(t) + z^2(t))$, то $I_-(t_0)$ охватывает все значения ω , возможные в силу начальной неопределенности по положению и скорости.



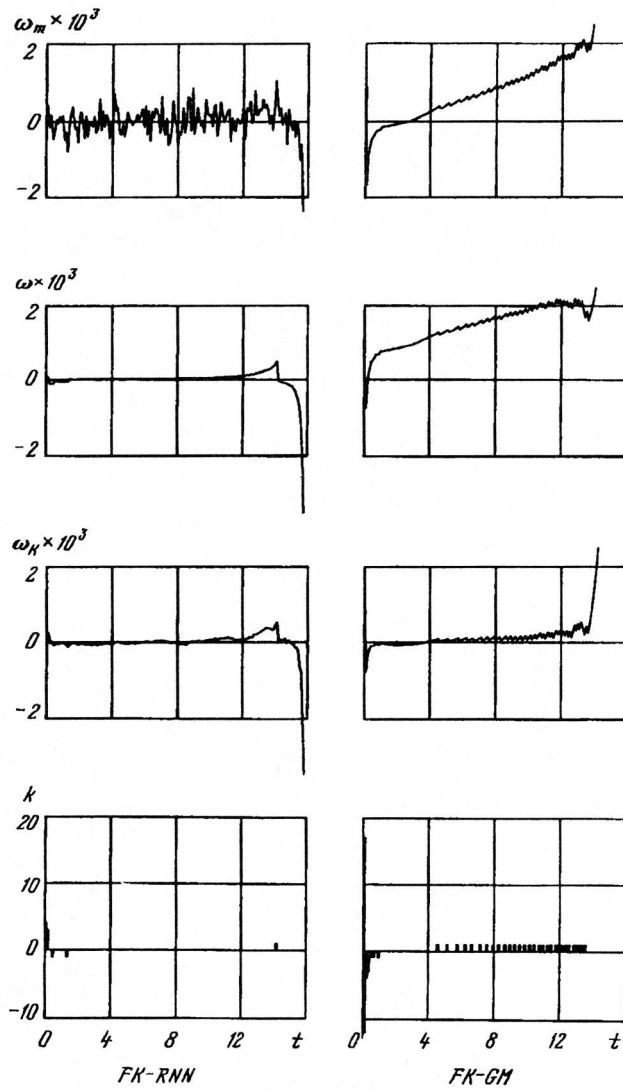
Фиг. 3

Говоря о способах формирования замеров $\omega_m(t_i)$ и ускорения v_z , укажем два варианта RNN и GM.

RNN. Значение $\omega_m(t_i)$ в каждый момент t_i вырабатывается при помощи датчика случайных чисел с нормальным распределением в диапазоне $[\omega(t_i) - c, \omega(t_i) + c]$, где $\omega(t_i)$ – истинная угловая скорость линии визирования. Аналогично в диапазоне $[-v, v]$ выбирается ускорение $v_z(t_i)$ и держится постоянным на шаге Δ .

GM. В этом варианте ω_m вырабатывается подобно правилу построения стратегии Ω^0 , описанному в разд. 3, но с учетом требования, что замер $\omega_m(t_i)$ должен находиться в промежутке $[\omega(t_i) - c, \omega(t_i) + c]$. Выбор ω_m : если точка ω^0 лежит на правом (левом) краю отрезка $I_-(t_i)$, то задаем $\omega_m(t_i)$ так, чтобы правый (левый) край множества $H(\omega_m(t_i))$ был максимально приближен к этой точке. Управление v_z выбираем заново в каждый момент t_i и держим постоянным на $[t_i, t_{i+1})$; если просчитанная на момент t_{i+1} точка ω^0 лежит на правом краю отрезка $I_-(t_{i+1})$, примем $v_z(t_i) = v$; если на левом, то $v_z(t_i) = -v$.

На фиг. 3 для сочетаний SM-RNN, SM-GM и начальных координат $x(t_0) = 80000$ м, $z(t_0) = 100$ м, $\dot{x}(t_0) = -5000$ м/с, $\dot{z}(t_0) = 20$ м/с представлены зависимости от t замеряемой ω_m и истинной ω угловых скоростей, реализации импульсного управления. Время измеряется в секундах, угловая скорость – в рад/с. Левая колонка соответствует сочетанию SM-RNN, правая – сочетанию SM-GM. В первом случае промах составил 0,15 м, израсходовано 28 импульсов; во втором – 0,22 м и 58 импульсов. Аналогичные графики для сочетаний FK-RNN и FK-GM и тех же начальных координат показаны на фиг. 4. Добавлен график выхода ω_K фильтра Калмана. Промах для сочетания FK-RNN составил 0,99 м, для сочетания



Фиг. 4

FK-GM он равен 51,35 м. В первом случае израсходовано 10 импульсов, во втором – 70 импульсов. Таким образом, игровая помеха вызывает существенно больший расход импульсов. В случае FK-GM был истрачен весь запас из 70 импульсов, что привело к значительному промаху.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00350).

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.

4. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр с неполной информацией // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215. № 4. С. 780–783.
5. Субботина Н.Н., Субботин А.И. Игровая задача управления при неполной информации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1977. № 5. С. 14–23.
6. Меликян А.А., Черноусько Ф.Л. Некоторые минимаксные задачи управления с неполной информацией // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 6. С. 952–961.
7. Пацко В.С. Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I, II // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 3. С. 424–435; 1972. Т. 8. № 8. С. 1423–1434.
8. Кумков С.И., Пацко В.С. Импульсные коррекции в задаче преследования с неполной информацией // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 115–126.
9. Merz A.W. Stochastic guidance laws in satellite pursuit-evasion // Comput. and Math. Appl. 1987. V. 13. N 1–3. P. 151–156.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
26.V.1994