А.Г.Иванов, С.С.Кумков, В.С.Пацко, В.Л.Турова, А.А.Федотов

ОБРАЗЫ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Математические объекты в теории управления и теории дифференциальных игр могут иметь сложную топологическую структуру.

Представленные изображения сопровождаются кратким пояснением динамики и исходных данных.

Картинки соответствуют содержательным задачам, рассмотренным в работах R.Isaacs, J.Breakwell, A.Merz, J.Lewin, G.Olsder, J.Shinar и авторов данной презентации.

Использованы средства визуализации, разработанные В.Л.Авербухом, А.И.Зенковым, О.А.Пыхтеевым, Д.А.Юртаевым.

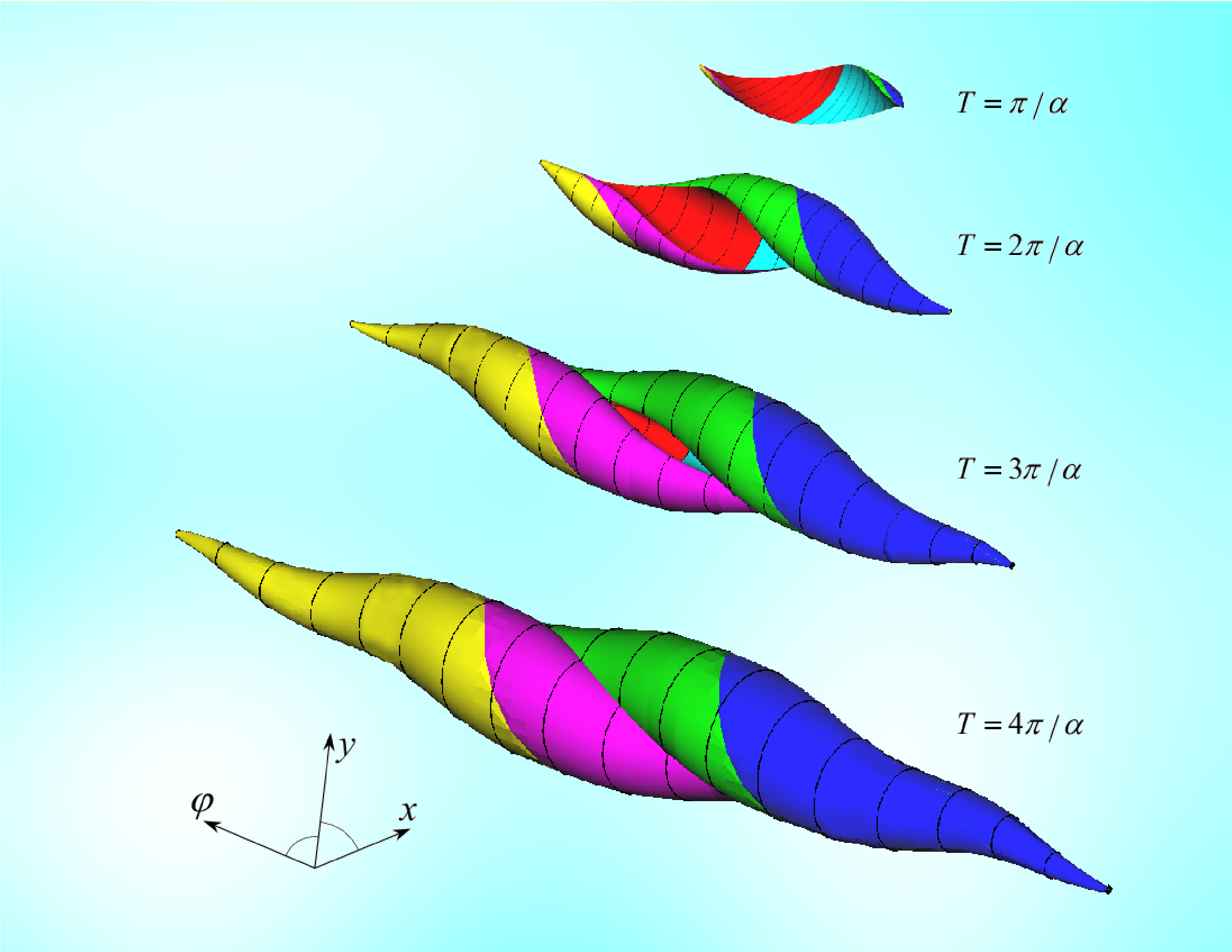
РАЗВИТИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ

$$\dot{x} = V\cos\varphi,$$
$$\dot{y} = V\sin\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = \frac{k}{V}u,$$

$$|u| \le 1,$$
$$\alpha = \frac{k}{V}.$$

Структура управлений, ведущих на границу

- 1, 0, 1
- −1, 0, 1
- 1, 0, −1
- −1, 0, −1
- 1, −1, 1
- −1, 1, −1



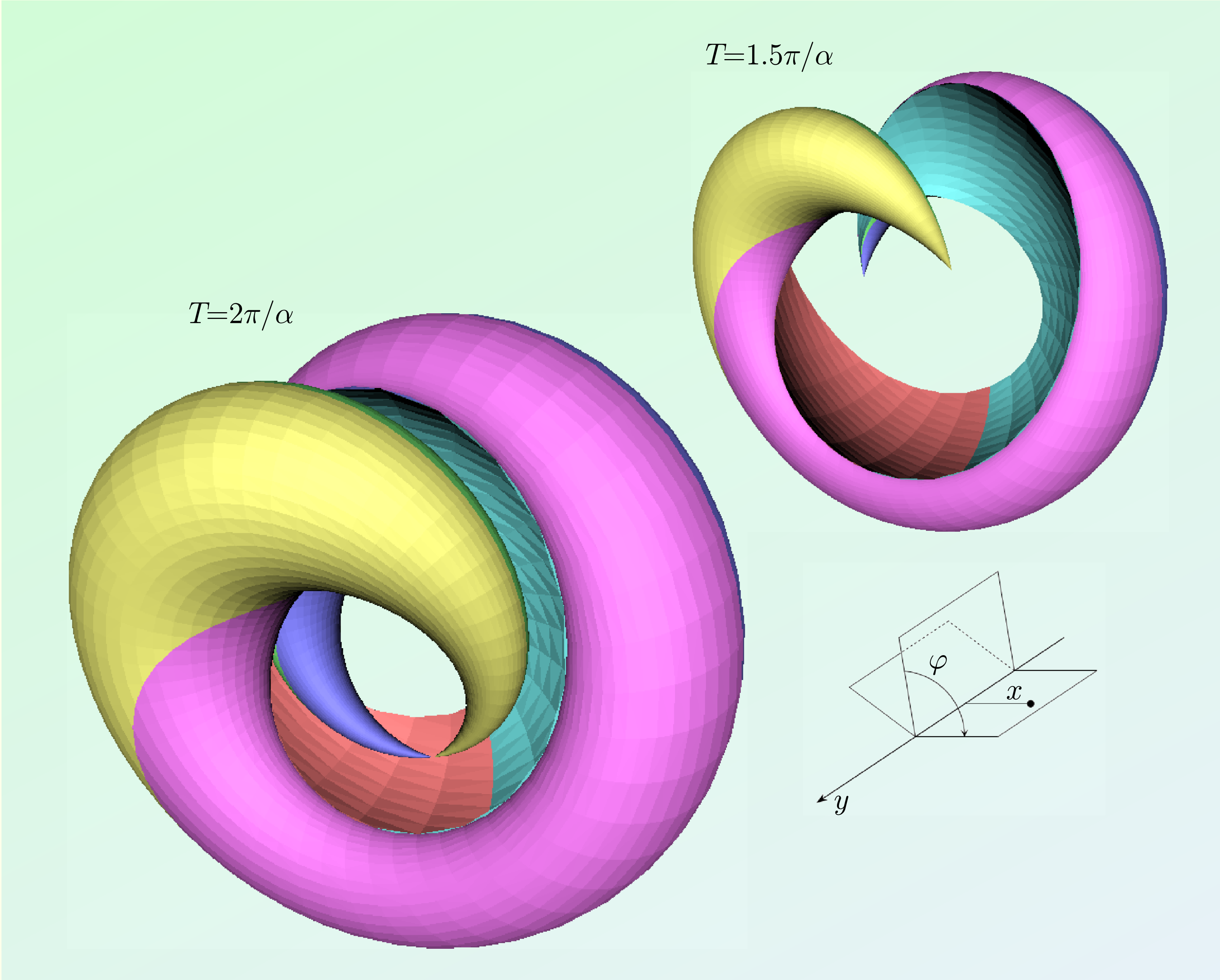
РАЗВИТИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ
(ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ)

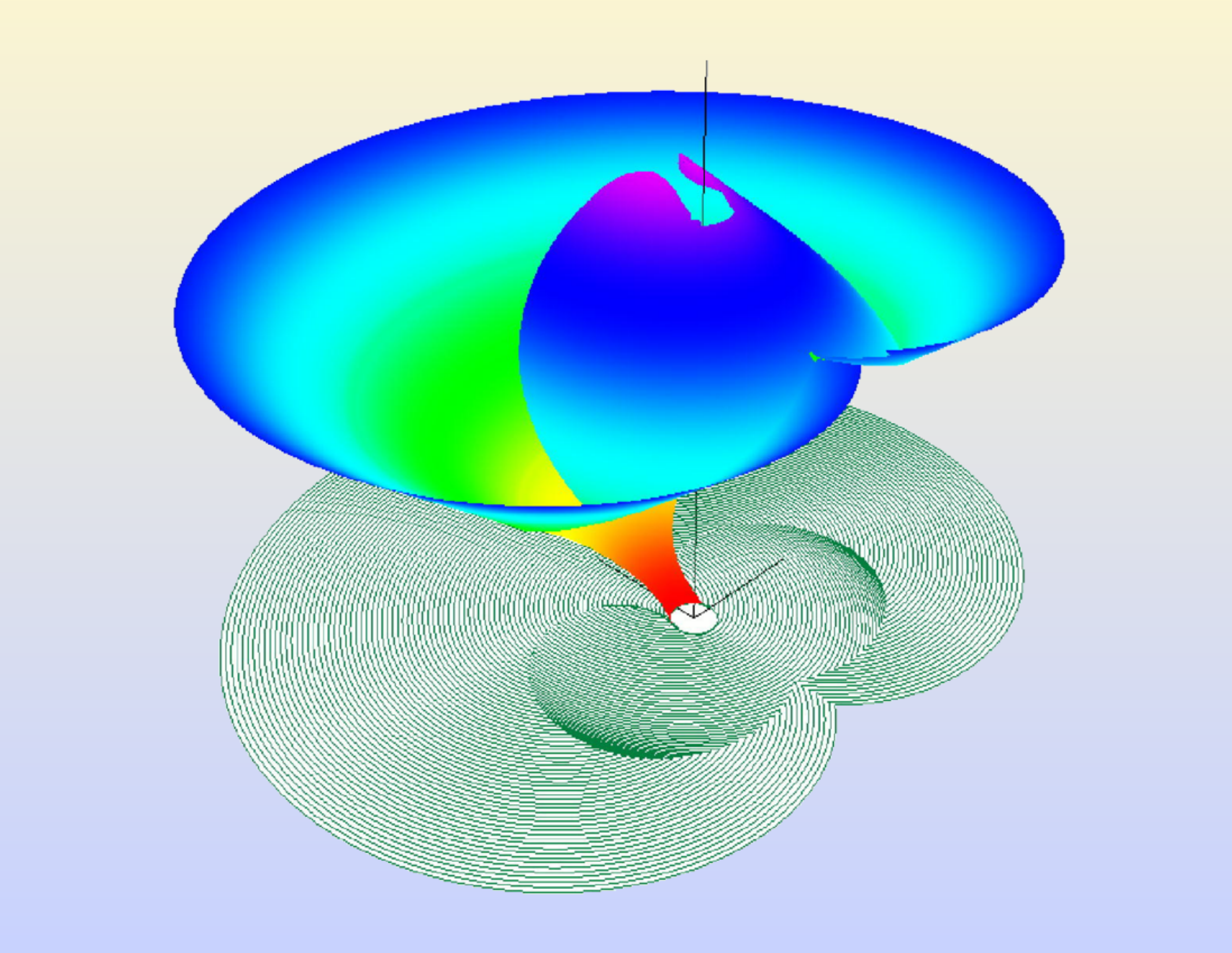
$$\dot{x} = V\cos\varphi,$$
$$\dot{y} = V\sin\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = \frac{k}{V}u,$$

$$|u| \le 1,$$
$$\alpha = \frac{k}{V}.$$

Структура управлений, ведущих на границу

синий	$1, 0, 1$
пурпурный	$-1, 0, 1$
зелёный	$1, 0, -1$
жёлтый	$-1, 0, -1$
красный	$1, -1, 1$
голубой	$-1, 1, -1$



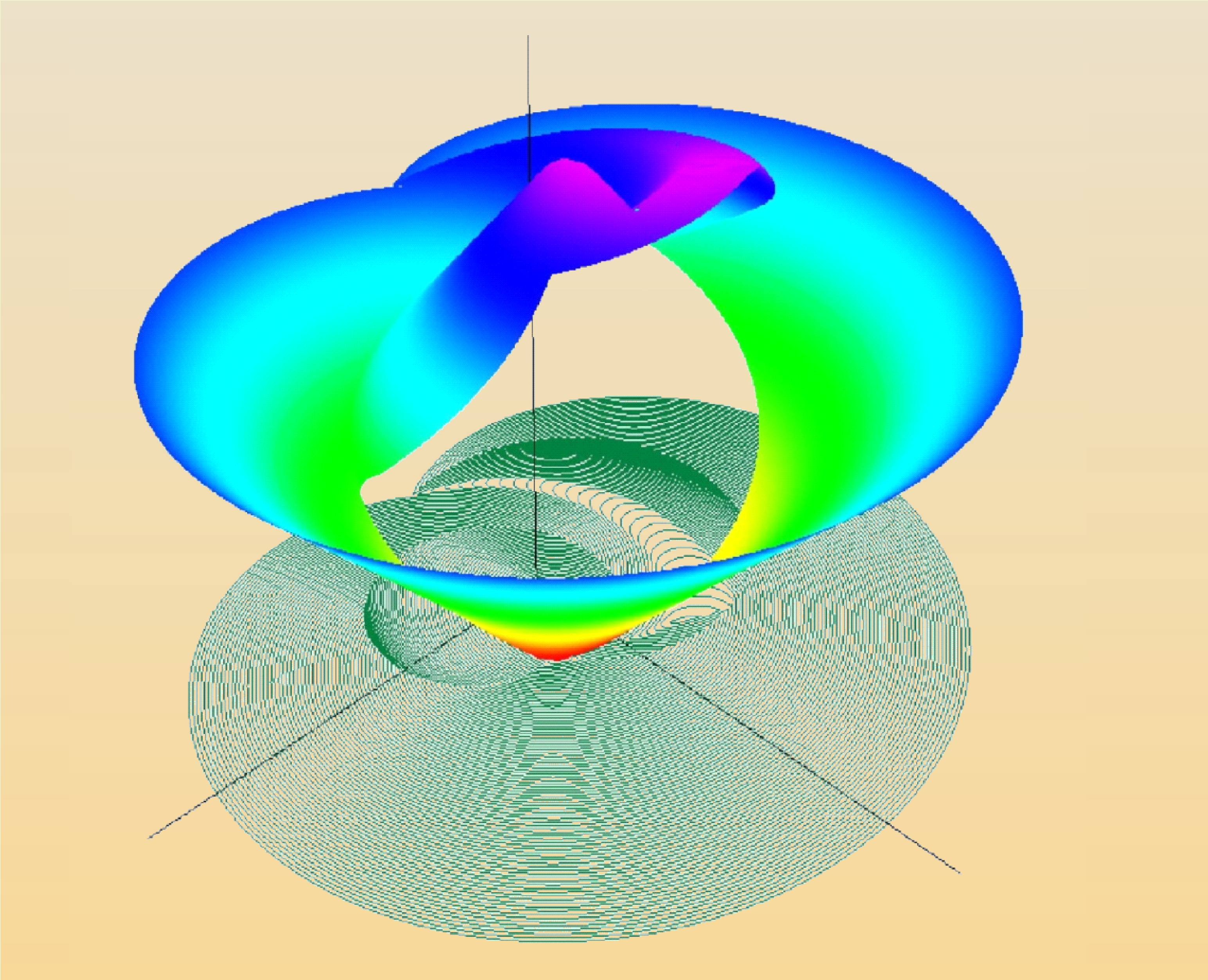


ИГРА „ШОФЕР-УБИЙЦА“
ГРАФИК ФУНКЦИИ ЦЕНЫ

$$\dot{x} = -wyu/R + v_1,$$
$$\dot{y} = wxu/R + v_2 - w,$$

$$|u| \leq 1,\ |v| \leq \nu,\ v = (v_1, v_2).$$

Параметры задачи: $R = 3$, $\nu = 1$, $w = 3$, радиус терминального круга $r = 1$.

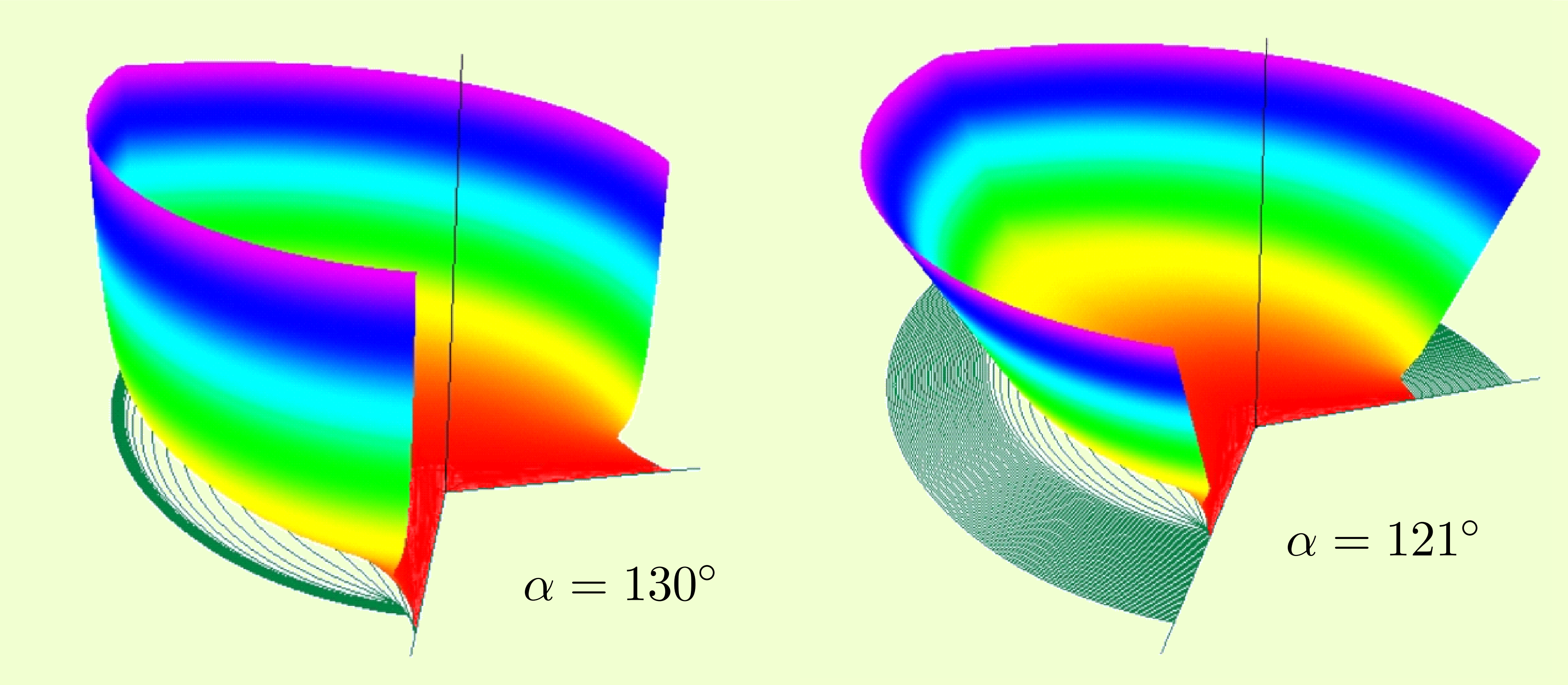


ИГРА „ШОФЕР-УБИЙЦА“
ГРАФИК ФУНКЦИИ ЦЕНЫ

$$\dot{x} = -wyu/R + v_1,$$
$$\dot{y} = wxu/R + v_2 - w,$$

$$|u| \leq 1,\ |v| \leq \nu,\ v = (v_1, v_2).$$

Параметры задачи: $R = 0.2$, $\nu = 0.6$, $w = 2$.
Целевое множество — круг малого радиуса в первом квадранте.



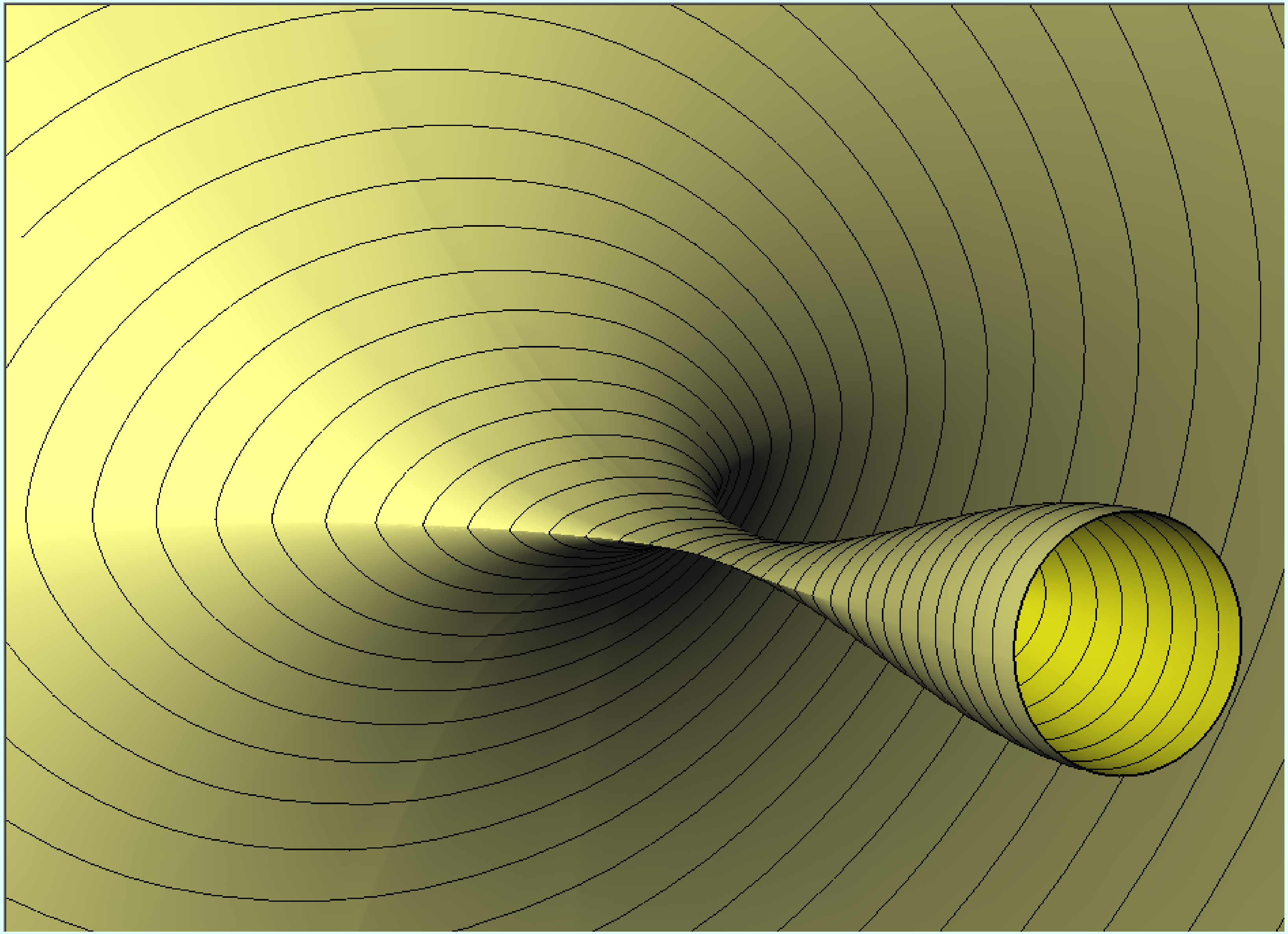
ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ В ИГРЕ СОПРОВОЖДЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ

$$\dot{x} = -wyu/R + v_1,$$
$$\dot{y} = wxu/R + v_2 - w,$$

$$|u| \leq 1,\ |v| \leq \nu,\ v = (v_1, v_2).$$

Управление u пытается удержать систему как можно дольше в невыпуклом конусе обнаружения, цель управления v противоположна. Параметры задачи: $\nu = 1$, $R = 1$, $w = 1.7$.
Величина α — полуугол невыпуклой зоны обнаружения.

РЮМКА ДЖ.ШИНАРА



$$\ddot{x} = F,$$
$$\dot{F} = -(F - u)/\tau_P,$$
$$\ddot{y} = v,$$

$t \in [0, T], \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$

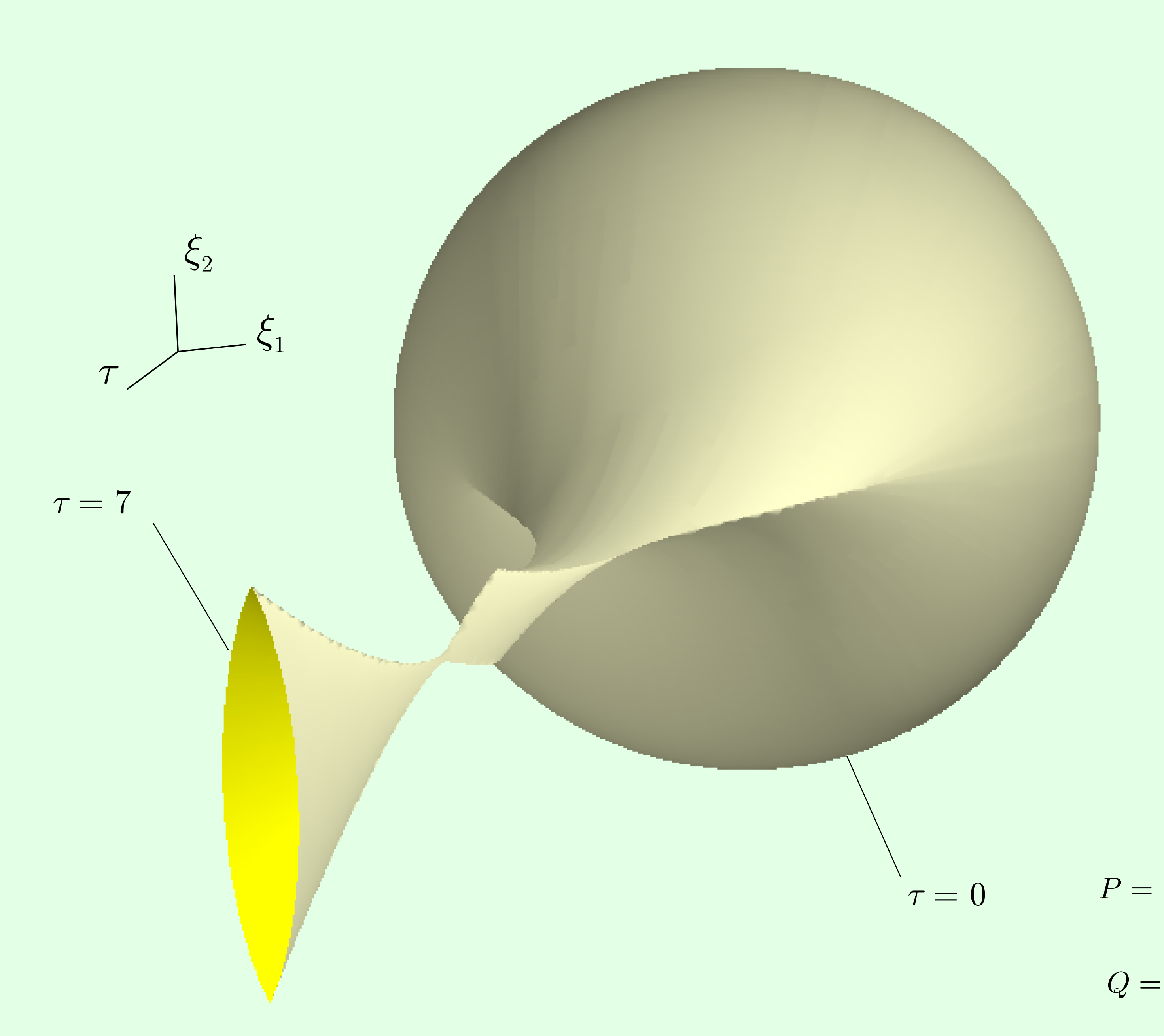
$u \in P, \quad v \in Q,$

$\varphi\,(x(T), y(T)) = |x(T) - y(T)|,$

$T = 2.0, \quad \tau_P = 1,$

$$P = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{u_1^2}{0.87^2} + \frac{u_2^2}{1.00^2} \leq 5.0^2 \right\}, \quad Q = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{v_1^2}{0.66^2} + \frac{v_2^2}{1.00^2} \leq 1.0^2 \right\}.$$

Максимальный стабильный мост (множество уровня функции цены) для значения платы 0.141.



„УЗКАЯ ШЕЙКА“

$$\ddot{x} = F,$$
$$\dot{F} = -(F-u)/\tau_P,$$
$$\ddot{y} = v,$$

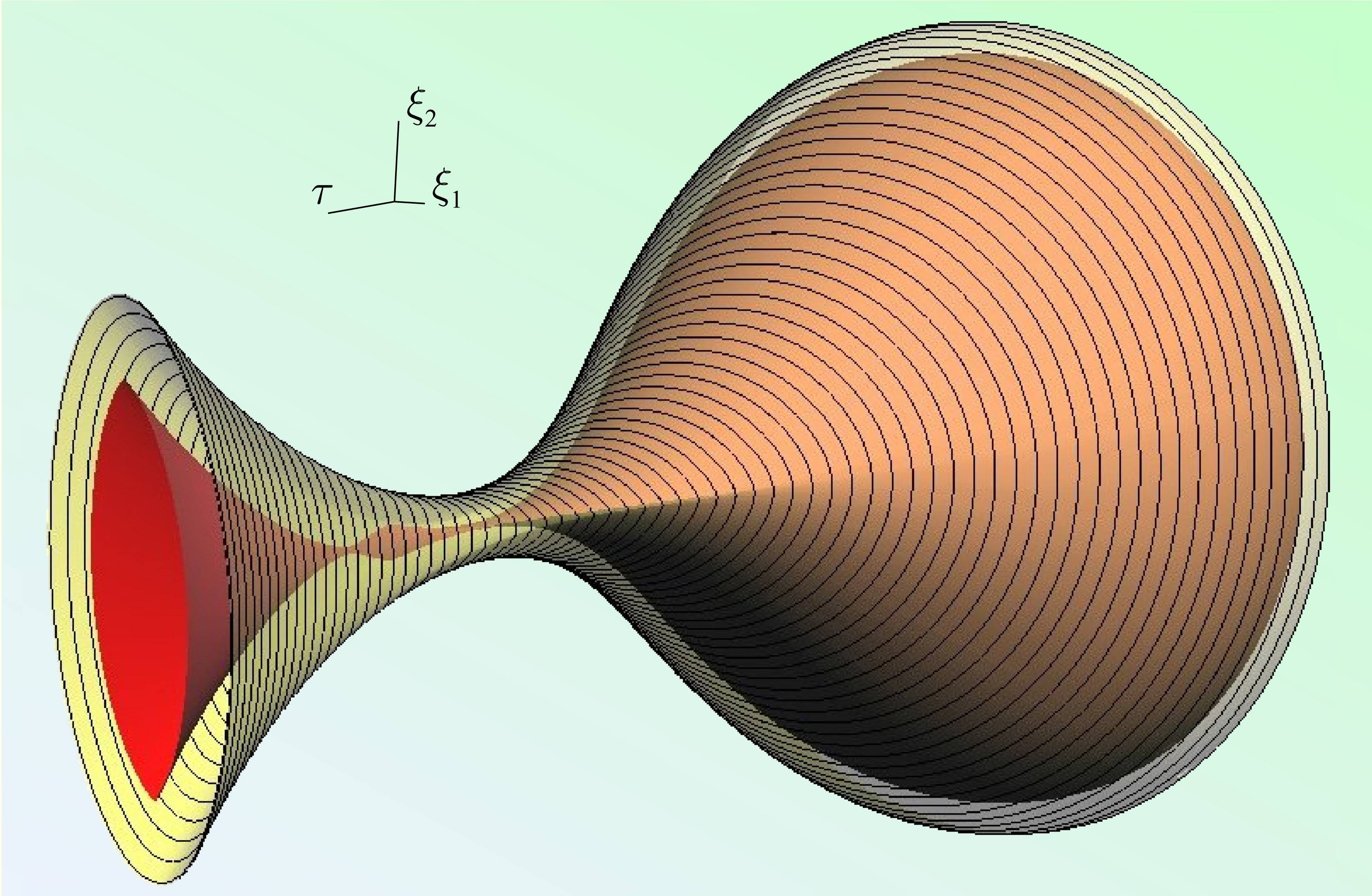
$$t \in [0, T], \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$
$$u \in P, \quad v \in Q, \ \tau_P = 1,$$
$$\varphi\,(x(T), y(T)) = |x(T) - y(T)|,$$

$$P = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{u_1^2}{0.67^2} + \frac{u_2^2}{1.00^2} \le 1.30^2 \right\},$$

$$Q = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{v_1^2}{0.71^2} + \frac{v_2^2}{1.00^2} \le 1.0^2 \right\}.$$

Максимальный стабильный мост (множество уровня функции цены) для значения платы 1.546;
$\tau = T - t$ — обратное время.

СГЛАЖИВАНИЕ С РОСТОМ УРОВНЯ



$$\ddot{x} = F,$$
$$\dot{F} = -(F-u)/\tau_P,$$
$$\ddot{y} = v,$$

$t \in [0,T],\ \ x, y \in \mathbb{R}^2, \quad u \in P,\ \ v \in Q,$

$\varphi\,(x(T), y(T)) = |x(T) - y(T)|,$

$T = 7.0,\ \ \tau_P = 1,$

$$P = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{u_1^2}{0.67^2} + \frac{u_2^2}{1.00^2} \leq 1.30^2 \right\},\ \ Q = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{v_1^2}{0.71^2} + \frac{v_2^2}{1.00^2} \leq 1.0^2 \right\}.$$

Максимальный стабильный мост (множество уровня функции цены) для значений платы 1.546 (красное множество) и 1.67 (желтое полупрозрачное множество).

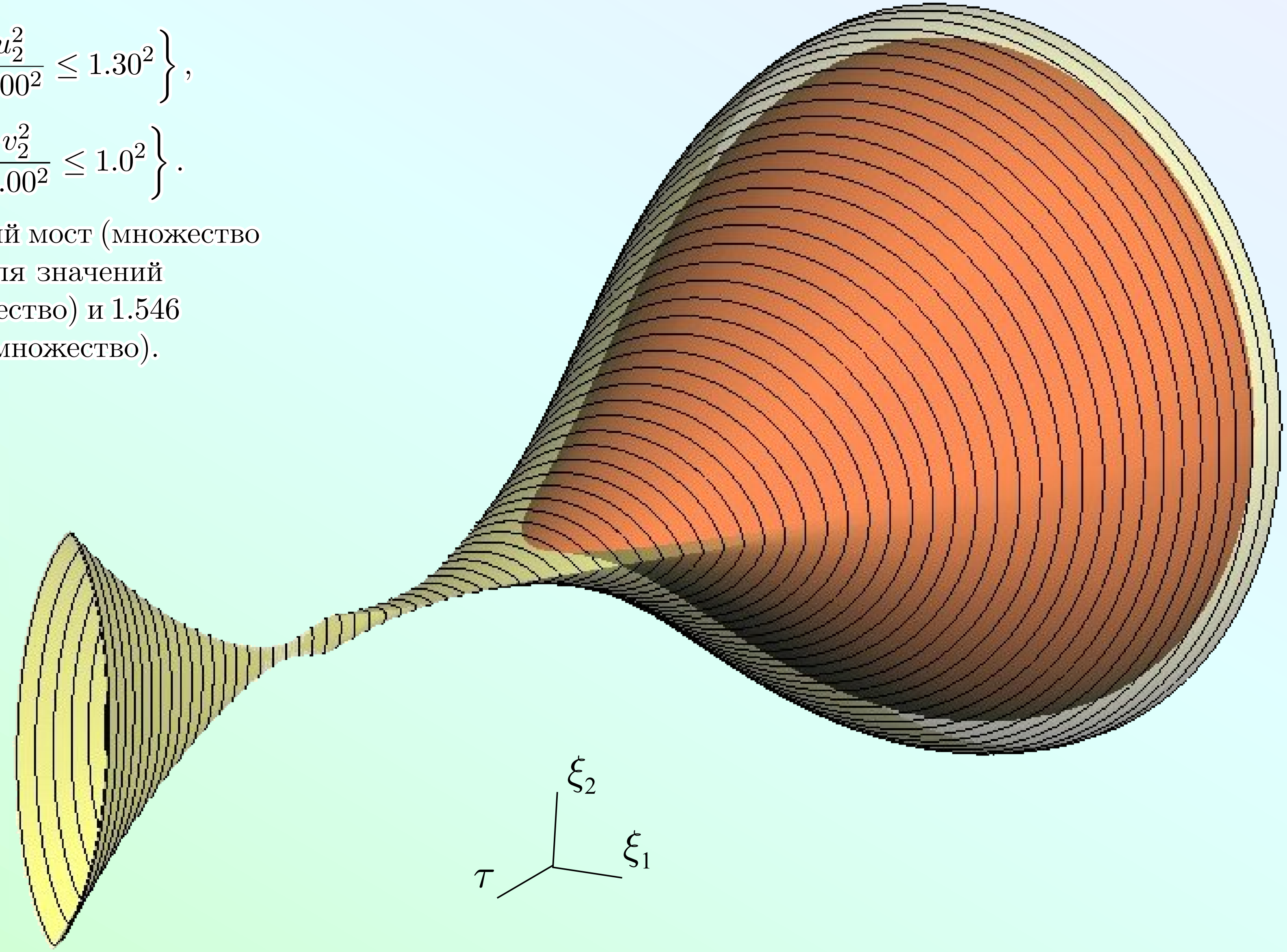
ОБРЫВ ОКОЛО „УЗКОЙ ШЕЙКИ“

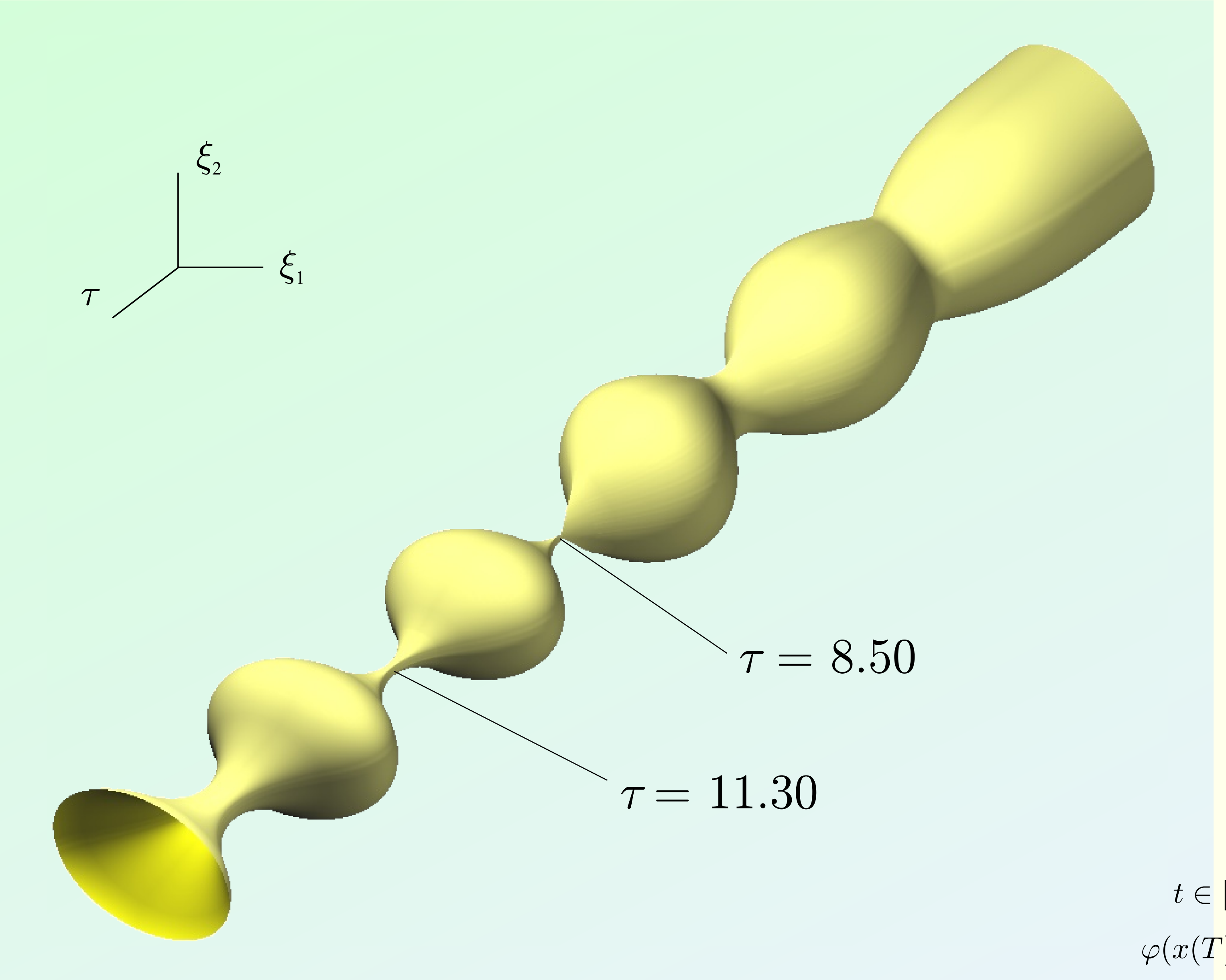
$$\ddot{x} = F, \qquad t \in [0, T],\ x, y \in \mathbb{R}^2,\ u \in P,\ v \in Q,$$
$$\dot{F} = -(F - u)/\tau_P, \qquad \varphi\,(x(T), y(T)) = |x(T) - y(T)|,$$
$$\ddot{y} = v, \qquad T = 7.0,\ \tau_P = 1,$$

$$P = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{u_1^2}{0.67^2} + \frac{u_2^2}{1.00^2} \le 1.30^2 \right\},$$

$$Q = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{v_1^2}{0.71^2} + \frac{v_2^2}{1.00^2} \le 1.0^2 \right\}.$$

Максимальный стабильный мост (множество уровня функции цены) для значений платы 1.48 (красное множество) и 1.546 (желтое полупрозрачное множество).



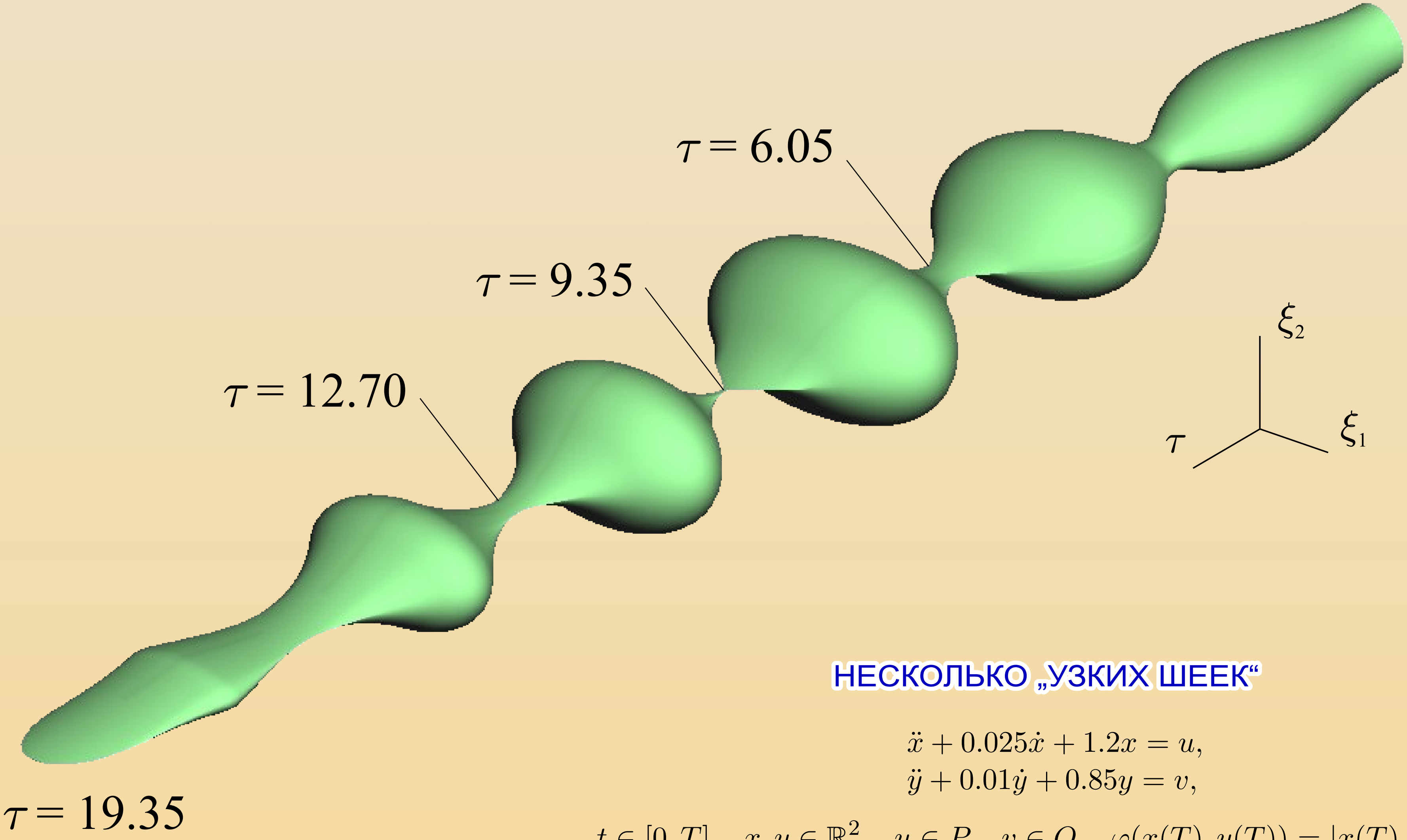


ДВЕ „УЗКИЕ ШЕЙКИ“

$$\ddot{x} - 0.025\dot{x} + 1.3x = u,$$
$$\ddot{y} + y = v,$$

$$t \in [0, T],\ \ x, y \in \mathbb{R}^2,\ \ u \in P,\ \ v \in Q,$$
$$\varphi(x(T), y(T)) = |x(T) - y(T)|,\ \ T = 16\,,$$
$$P = Q = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \frac{v_1^2}{1.5^2} + \frac{v_2^2}{1.05^2} \le 1 \right\}.$$

Максимальный стабильный мост (множество уровня функции цены) для значения платы 1.2; $\tau = T - t$ — обратное время.



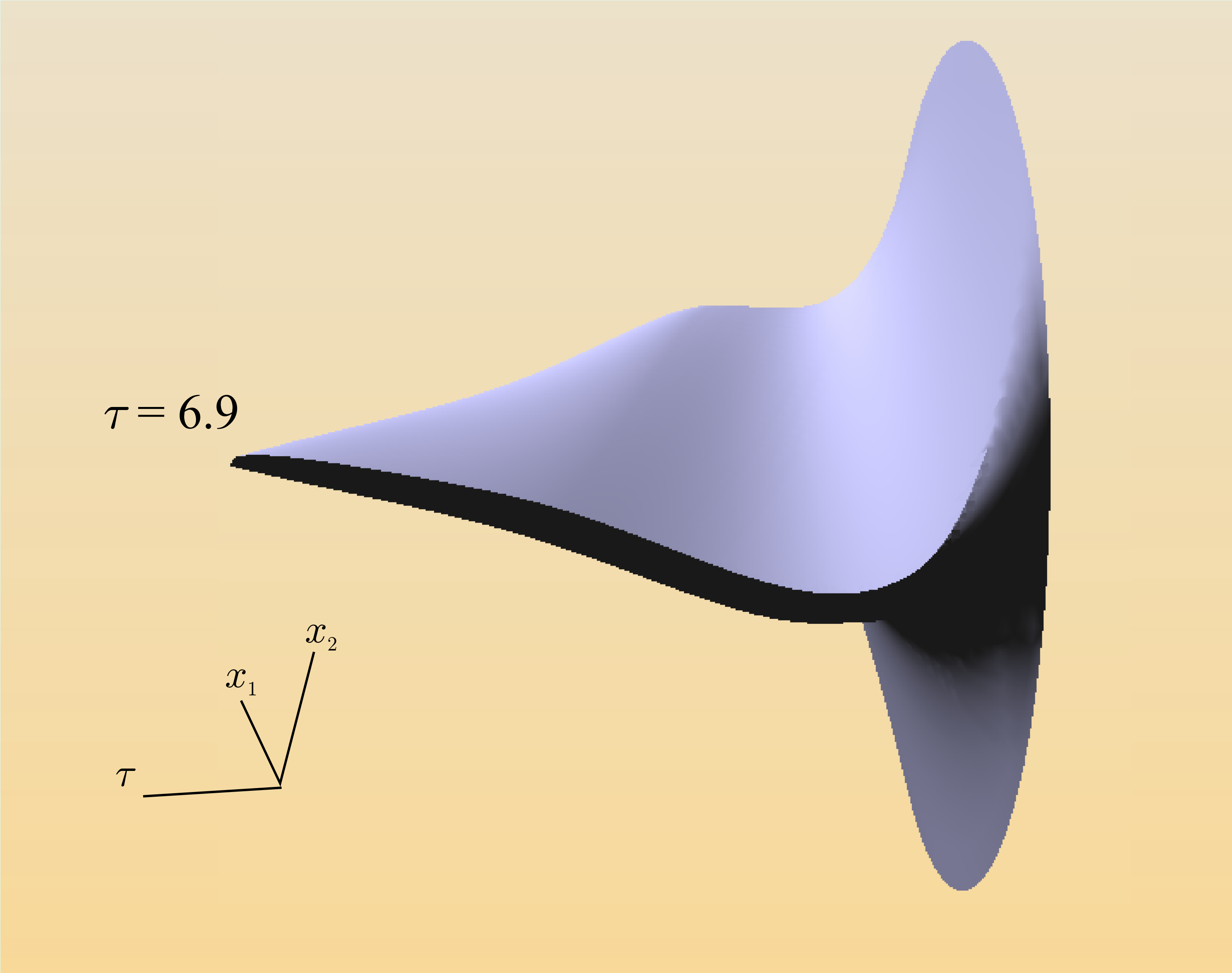
НЕСКОЛЬКО „УЗКИХ ШЕЕК“

$$\ddot{x} + 0.025\dot{x} + 1.2x = u,$$
$$\ddot{y} + 0.01\dot{y} + 0.85y = v,$$

$$t \in [0, T], \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad \varphi(x(T), y(T)) = |x(T) - y(T)|,$$

$$P = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \frac{u_1^2}{2.0^2} + \frac{u_2^2}{1.3^2} \leq 1 \right\}, \quad Q = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \frac{v_1^2}{1.5^2} + \frac{v_2^2}{1.05^2} \leq 1 \right\}.$$

Максимальный стабильный мост (множество уровня функции цены) для значения платы 0.397; $\tau = T - t$ — обратное время.



„КНОПКА“

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + v,$$
$$\dot{x}_2 = x_2 + u,$$

$$|u| \le 1, \ |v| \le 0.9, \ \varphi(x_1(T), x_2(T)) = x_1^2(T) + x_2^2(T).$$

Максимальный стабильный мост (множество уровня функции цены) для значения платы 7.0; $\tau = T - t$ — обратное время.