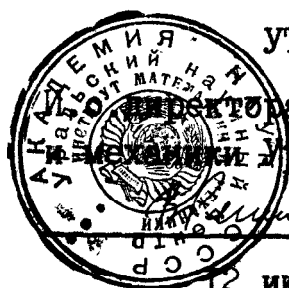


АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
Уральское отделение  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
(ИММ)

УДК 629.735.33-4

№ гос. регистрации 01880003467

Инв. № 0288.0 044271\*



УТВЕРЖДАЮ

Директора Института математики  
и механики УрО АН СССР, к.ф.-м.н.

*В.М. Решетов*  
В.М. РЕШЕТОВ

12 июня 1987 г.

О Т Ч Е Т

о научно-исследовательской работе

Разработка численных методов построения экстремальных  
ветровых возмущений, действующих на самолет на этапе  
посадки

АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
ИГР ДЛЯ ИМИТАЦИИ ВЕТРОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ  
(промежуточный)

Зав.отделом динамических систем

д.ф.-м.н.

*А.И. Субботин* 12.06.87 А.И. СУББОТИН

Зав.сектором

к.ф.-м.н.

*В.С. Пацко* 12.06.87 В.С. ПАЦКО

Свердловск - 1987

**СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ****Ответственные исполнители****Зав. сектором ,****к.ф.-м.н.***В.С. Пацко* 12.06.87 **В.С. ПАЦКО****(Введение, реферат,  
разд. I, 2, 5)****Научн. сотр.,****к.ф.-м.н.***Н.Д. Боткин* 12.06.87 **Н.Д. БОТКИН****(разд. 3, 4)**

## Р Е Ф Е Р А Т

Отчет 46 стр., 10 рисунков, 24 источника

СДВИГ ВЕТРА, МИКРОВЗРЫВ, ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ ВЕТРОВОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ,  
ЗАДАЧА ПОСАДКИ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА, ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ,  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Исследуется задача посадки самолета в условиях ветрового возмущения.

Цель работы - анализ возможности имитации экстремальных ветровых возмущений на основе численных методов теории дифференциальных игр.

Предложен метод построения экстремальных возмущений, опирающийся на нахождение оптимальных стратегий в линейных дифференциальных играх. Разработан набор программ, реализующих экстремальные возмущения.

Полученные результаты могут быть использованы при совершенствовании комплексных самолетных тренажеров.

## СОДЕРЖАНИЕ

Перечень условных обозначений и символов	5
Введение	6
1. Применение численных методов теории дифференциальных игр для построения экстремальных ветровых возмущений	8
2. Математическая модель управляемого движения	10
2.1. Нелинейные дифференциальные уравнения движения самолета на посадке	10
2.2. Аэродинамические коэффициенты	14
2.3. Учет инерционности исполнительных органов и инерционности изменения скорости ветра. Полная нелинейная система	15
2.4. Линейные системы продольного и бокового движений	18
2.5. Числовые характеристики номинального движения. Численный вид линейных систем	23
3. Вспомогательные линейные дифференциальные игры	28
4. Результаты моделирования	
5. Задача управления боковым движением с платой, зависящей от трех координат фазового вектора	39
Заключение	43
Список использованных источников	44

## ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СИМВОЛОВ

- ВПП - взлетно-посадочная полоса,
- $x_g, y_g, z_g$  - земная нормальная система координат,  
 $W_{x_g}, W_{y_g}, W_{z_g}$  - составляющие скорости ветра по осям  $x_g, y_g, z_g$ ,
- $\vartheta$  - угол тангажа,  
 $\psi$  - угол рыскания,  
 $\gamma$  - угол крена,  
 $\alpha$  - угол атаки,  
 $\beta$  - угол скольжения,  
 $P$  - сила тяги,  
 $V$  - модуль воздушной скорости,  
 $V_{x_g}, V_{y_g}, V_{z_g}$  - проекции вектора воздушной скорости на  
 оси  $x_g, y_g, z_g$ ,
- $m$  - масса самолета.

## В В Е Д Е Н И Е

В отчете рассматривается вопрос имитации экстремальных ветровых возмущений на этапе посадки самолета.

Резкие изменения скорости ветра, существенно превышающие привычные нормы, могут возникать, например, когда самолет попадает в зону микровзрыва. В настоящее время в зарубежной литературе идет интенсивный поток статей /1-5/, посвященный физике явления микровзрыва, его математическому описанию, изучению поведения самолета при сдвиге ветра. Разрабатывается аппаратура обнаружения зон микровзрыва, анализируются новые способы управления самолетом, ставится вопрос о методике имитации сдвига ветра на тренажерах.

В отчете для генерации резких изменений скорости ветра в имитаторах ветрового возмущения предлагается привлечь методы теории дифференциальных игр /6-8/. Совершенно не касаясь физики явлений, приводящих к сдвигу ветра, мы исходим из того, что в результате метеорологических наблюдений, а также при реконструкции летных происшествий могут быть известны "внешние" временные характеристики резких порывов: диапазоны перепадов, их длительность, скорость нарастания. Закладывая такие характеристики в имитатор, мы можем генерировать по принципу обратной связи реализации ветровой помехи. При одном варианте управления самолетом получим одну реализацию помехи, при другом - другую. Способ генерации по принципу обратной связи рассчитывается на основе решения тех или иных вспомогательных дифференциальных игр.

В разделе I дан краткий анализ возможности применения современных численных методов теории дифференциальных игр к вопро-

су построения экстремальных ветровых возмущений.

Подробное описание полной нелинейной модели управляемого движения среднего транспортного самолета на посадке, а также линеаризованных моделей продольного и бокового движений содержится во втором разделе. Предлагаемый способ генерации ветровой помехи опирается на эти модели и поэтому они должны быть хорошо проверены.

Постановки линейных дифференциальных игр, из решения которых собственно и получается способ генерации ветровой помехи, даны в разделе 3.

Раздел 4 посвящен некоторым результатам моделирования движений полной нелинейной управляемой системы, куда заводится экстремальная помеха. В создании комплекса моделирующих программ принимала участие техник отдела динамических систем ИММ Э.Е.Шадрина. Моделирование эффекта прохождения самолета через зону микровзрыва выполнено студенткой Уральского политехнического института О.А.Журавлевой.

Раздел 5 иллюстрирует возможность постановки и решения более сложных вспомогательных линейных дифференциальных игр, чем в разделе 2. Приведенные в разделе 5 численные результаты получены мл.науч.сотрудником ИММ к.ф.-м.н. М.А.Зархом и студенткой Уральского госуниверситета им.А.М.Горького И.Ю.Андреевой.

Работа выполнена в соответствии с договором № 18-86 от 15.08.86 на проведение научно-исследовательской работы между Институтом математики и механики УрО АН СССР и Ордена Ленина Академией гражданской авиации.

## 1. ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВЕТРОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Доведенные до стандартных программ численные методы /9-14/ теории антагонистических дифференциальных игр охватывают в настоящее время задачи, где содержится возможность понижения порядка системы до размерности 2 или 3. К таким задачам относятся, в частности, линейные дифференциальные игры

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv, \quad x \in R^n, \quad (1.1)$$

двух лиц (первый игрок распоряжается векторным воздействием  $u$ , второй - векторным параметром  $v$ ) с геометрическими ограничениями

$$u \in P, \quad v \in Q,$$

фиксированным моментом окончания  $T$  и выпуклой функцией платы  $\varphi$ , зависящей от двух или трех координат фазового вектора. Первый игрок минимизирует плату  $\varphi$ , второй - максимизирует. Понижение порядка достигается переходом при помощи стандартного преобразования /6, 7/ к эквивалентной дифференциальной игре размерности соответственно два или три. Стандартные программы позволяют для систем вида (1.1) находить значение функции цены в конкретной начальной позиции, строить в координатах эквивалентной задачи множества уровня функции цены (или, другими словами, максимальные стабильные мосты), находить на основе их обработки оптимальные стратегии игроков.

Типичным является случай, когда множества  $P$ ,  $Q$  - параллелепипеды в конечномерных пространствах. Тогда векторные



воздействия  $u, v$  распадаются на конечное число независимых скалярных компонент  $u_i, v_i$ , каждая из которых ограничена сверху и снизу. При небольшом числе компонент  $u_i, v_i$  удобным в реализации способом задания оптимальных стратегий является задание их при помощи линий и поверхностей переключения /8, 11, 15-17/. Мы обходимся линиями, если плата  $\varphi$  зависит от двух координат и обращаемся к поверхностям, если она зависит от трех. Линии (соответственно, поверхности) переключения строятся в координатах эквивалентной игры. Каждому моменту времени  $t_j$  некоторой заранее выбранной сетки  $\{t_j\}$  и каждой компоненте  $u_i$  управления первого игрока соответствует своя линия (поверхность) переключения. Аналогично для каждой компоненты  $v_i$ . Линии (поверхности) переключения, как правило, могут быть разумно аппроксимированы, а шаг сетки  $\{t_j\}$  может быть выбран не слишком малым.

Мы рассматриваем задачу посадки до момента пролета торца взлетно-посадочной полосы (ВПШ). Ветровую помеху отождествляем со вторым игроком, управление - с первым. Линеаризуя полную нелинейную модель управляемого движения, формируем вспомогательные дифференциальные игры вида (I.I) по продольному и боковому каналам. Построив оптимальные стратегии второго игрока, используем их для генерации "наиболее вредной" экстремальной помехи. Помеха "старается разболтать" движение при подлете к торцу ВПШ.

Указанная общая схема реализована в виде набора программ для машины БЭСМ-6 в отделе динамических систем ИММ. Результаты исследований отражены в статьях /12, 14, 15/. Численное моделирование показывает, что традиционные алгоритмы автоматической посадки плохо справляются с экстремальной ветровой помехой. Методы теории дифференциальных игр могут подсказать путь их модификации. Различным аспектам этого направления исследований посвящены работы /15, 17-19/.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ

### 2.1. Нелинейные дифференциальные уравнения движения самолета на посадке

Система нелинейных дифференциальных уравнений пространственного движения самолета на посадке имеет вид /20-22/:

$$\dot{x}_g = V_{gx} x_g \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{gx} = & [(P - qSc_x) \cos \psi \cos \vartheta + (0.03P + qSc_y) \times \\ & \times (\sin \psi \sin \gamma - \cos \gamma \cos \psi \sin \vartheta) + \\ & + qSc_z (\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma)]/m \end{aligned}$$

$$\dot{y}_g = V_{gy} y_g$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{gy} = & [(P - qSc_x) \sin \vartheta + (0.03P + qSc_y) \times \\ & \times \cos \vartheta \cos \gamma - qSc_z \cos \vartheta \sin \gamma]/m - g \end{aligned}$$

$$\dot{z}_g = V_{gz} z_g$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{gz} = & [(P - qSc_x) (-\sin \psi \cos \vartheta) + (0.03P + qSc_y) \times \\ & \times (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) + \\ & + qSc_z (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma)]/m \end{aligned}$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_x \cos \gamma^e + \omega_y \sin \gamma^e$$

$$\dot{\omega}_z = [J_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2) - (J_y - J_x) \omega_x \omega_y] / J_z + M_z / J_z$$

$$\dot{\psi} = (\omega_y \cos \gamma^e - \omega_x \sin \gamma^e) / \cos \vartheta$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_y = & [(J_y - J_z) J_{xy} \omega_y + (J_z - J_x) J_x \omega_x] \omega_z / J^2 + \\ & + (J_x M_y + J_{xy} M_x) / J^2 + \omega_z J_{xy} \times \\ & \times (J_x \omega_y - J_{xy} \omega_x) / J^2 \end{aligned}$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x - (\omega_y \cos \gamma^e - \omega_z \sin \gamma^e) \operatorname{tg} \vartheta$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x = & [(J_y - J_z) J_y \omega_y + (J_z - J_x) J_{xy} \omega_x] \omega_z / J^2 + \\ & + (J_y M_x + J_{xy} M_y) / J^2 + J_{xy} \omega_z \times \\ & \times (J_{xy} \omega_y - J_y \omega_x) / J^2 \end{aligned}$$

Здесь

$x_g$ ,  $y_g$ ,  $z_g$  - положение центра масс в нормальной земной системе координат (рис. 2.1),

$\vartheta$ ,  $\psi$ ,  $\gamma^e$  - углы тангажа, рыскания и крена,

$\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  - угловые скорости вращения относительно осей связанной системы координат,

Земная нормальная система координат

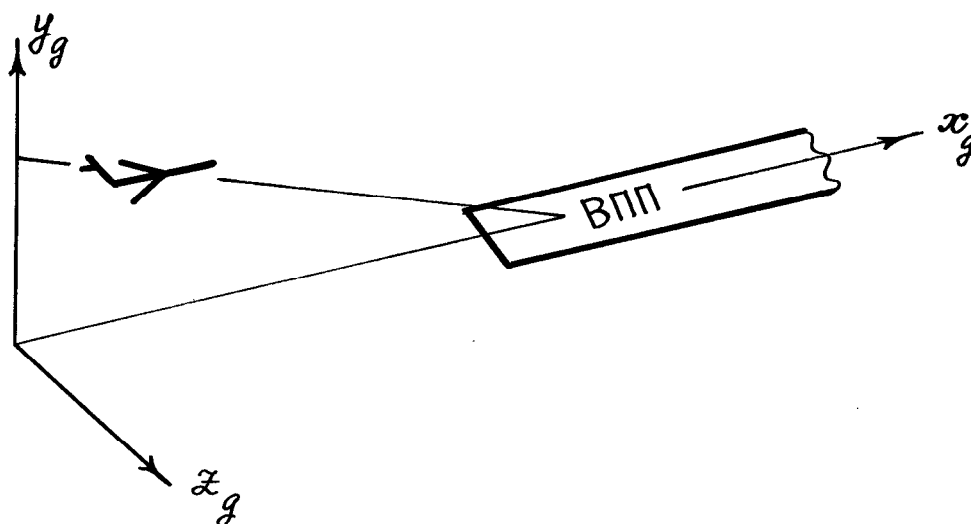


Рис. 2.1

$q = \rho V^2 / 2$  - скоростной напор,

$\rho$  - плотность воздуха,

$V$  - модуль воздушной скорости,

$J_x, J_y, J_z, J_{xy}$  - моменты инерции,  $J^2 = J_x J_y - J_{xy}^2$ ,

$M_x = q S l m_x, M_y = q S l m_y, M_z = q S b_a m_z$

- моменты силы,

$S$  - площадь крыла,

$l$  - размах крыла,

$b_a$  - средняя аэродинамическая хорда,

$C_x, C_y, C_z, m_x, m_y, m_z$  - аэродинамические коэффициенты сил и моментов (в связанной системе координат),

- $m$  - масса самолета,  
 $g$  - ускорение свободного падения,  
 $0.03$  - синус угла установки двигателей.

Управление самолетом осуществляется за счет изменения силы тяги  $P$ , отклонения элеронов  $\delta_\varepsilon$ , рулей направления  $\delta_H$  и высоты  $\delta_B$ . Величины  $\delta_\varepsilon$ ,  $\delta_B$ ,  $\delta_H$  входят в аэродинамические коэффициенты.

Ветровое возмущение, задаваемое по осям  $x_g, y_g, z_g$ , влияет на компоненты воздушной скорости  $V_{x_g}, V_{y_g}, V_{z_g}$ :

$$V_{x_g} = V_{gx_g} - W_{x_g}, \quad V_{y_g} = V_{gy_g} - W_{y_g}, \quad V_{z_g} = V_{gz_g} - W_{z_g}.$$

Аэродинамические коэффициенты зависят от угла атаки  $\alpha$  и угла скольжения  $\beta$ . Приведем формулы для этих углов:

$$\alpha = \arcsin \left\{ \left[ -V_{x_g} (\sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma) - V_{y_g} \cos \vartheta \cos \gamma - V_{z_g} (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) \right] / V \cos \beta \right\},$$

$$\beta = \arcsin \left\{ \left[ V_{x_g} (\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma) - V_{y_g} \cos \vartheta \sin \gamma + V_{z_g} (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma) \right] / V \right\}.$$

В расчетах использовались следующие численные значения:

$$m = 75 \cdot 10^3 \text{ кг}, \quad g = 9.81 \text{ м/сек}^2, \quad S = 201 \text{ м}^2,$$

$$l = 37.55 \text{ м}, \quad b_a = 5.285 \text{ м}, \quad \rho = 1.207 \text{ кг/м}^3,$$

$$J_x = 2.5 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_y = 7.5 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_z = 6.5 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$J_{xy} = 0.5 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

## 2.2. Аэродинамические коэффициенты

В системе (2.1) коэффициенты  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$  следует брать в связанной системе координат. Соответствующие коэффициенты в полусвязанной системе обозначим  $C_{nx}$ ,  $C_{ny}$ ,  $C_{nz}$ .

Имеем

$$C_x = C_{nx} \cos \alpha - C_{ny} \sin \alpha, \quad C_y = C_{ny} \cos \alpha + C_{nx} \sin \alpha, \quad C_z = C_{nz}.$$

Выражения для  $C_{nx}$ ,  $C_{ny}$ ,  $C_{nz}$  возьмем в виде

$$C_{nx} = 0.21 + 0.004 \alpha + 0.47 \cdot 10^{-3} \alpha^2,$$

$$C_{ny} = 0.65 + 0.09 \alpha + 0.003 \delta_B,$$

$$C_{nz} = -0.0115 \beta - (0.0034 - 6 \cdot 10^{-5} \alpha) \delta_H.$$

Здесь и ниже угловые величины берутся в градусах.

Коэффициенты  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  определяются соотношениями:

$$m_x = m_x^\beta \beta + m_x^{\delta_H} \delta_H + m_x^{\delta_\varepsilon} \delta_\varepsilon + \frac{\ell \cdot \pi}{2V \cdot 180} \left( m_x^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_y + m_x^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x \right),$$

$$m_x^\beta = -(0.0035 + 0.0001 \alpha) [1/\text{град}],$$

$$m_x^{\delta_H} = -(0.0005 - 0.00003 \alpha) [1/\text{град}],$$

$$m_x^{\delta_\varepsilon} = -0.00125 [1/\text{ГРАД}], \quad m_x^{\bar{\omega}_x} = -(0.61 - 0.004\alpha) [\text{БЕЗР}]$$

$$m_x^{\bar{\omega}_y} = -(0.3 + 0.012\alpha) [\text{БЕЗР}],$$

$$m_y = m_y^\beta \beta + m_y^{\delta_H} \delta_H + m_y^{\delta_\varepsilon} \delta_\varepsilon + \frac{\ell \cdot \pi}{2V \cdot 180} \left( m_y^{\bar{\omega}_y} \omega_y + m_y^{\bar{\omega}_x} \omega_x \right),$$

$$m_y^\beta = -(0.004 + 0.00005\alpha) [1/\text{ГРАД}],$$

$$m_y^{\delta_H} = -(0.00135 - 0.000015\alpha) [1/\text{ГРАД}],$$

$$m_y^{\delta_\varepsilon} = 0, \quad m_y^{\bar{\omega}_y} = -(0.21 + 0.005\alpha) [\text{БЕЗР}],$$

$$m_y^{\bar{\omega}_x} = 0.015\alpha [\text{БЕЗР}],$$

$$m_z = 0.033 - 0.017\alpha - 0.013\delta_B - \\ - 0.047\delta_{CT} - 1.29\omega_z/V.$$

### 2.3. Учет инерционности исполнительных органов и инерционности изменения скорости ветра. Полная нелинейная система

Будем считать, что изменение силы тяги подчиняется уравнению

$$\dot{P} = -\kappa_P P + \kappa_{\delta_P} (\delta_{Pz} + \delta_{P*}), \quad (2.2)$$

$$K_p = 1 [1/\text{СЕК}], \quad K_{\delta_p} = 3538 [Н/\text{СЕК.ГРАД}],$$

$$\delta_{p*} = -41.3^\circ, \quad 47^\circ \leq \delta_{pз} \leq 112^\circ. \quad (2.3)$$

Здесь  $\delta_{pз}$  - "заданное" положение органа управления силой тяги. Подставляя в правую часть уравнения (2.2) крайние значения  $\delta_{pз} = 47^\circ$  и  $\delta_{pз} = 112^\circ$ , получаем обнуление ее соответственно при  $P \approx 2 \cdot 10^4 \text{ Н}$  и  $P \approx 25 \cdot 10^4 \text{ Н}$ . Таким образом, если начальное значение  $P$  лежит в промежутке  $[2 \cdot 10^4, 25 \cdot 10^4]$ , то оно остается в нем и в дальнейшем.

Перейдем от фазовой переменной  $P$  к переменной  $P/m$ . Уравнение (2.2) заменится соотношением

$$\frac{\dot{P}}{m} = -K_p \frac{P}{m} + \frac{K_{\delta_p}}{m} (\delta_{pз} + \delta_{p*}). \quad (2.4)$$

Динамику рулевых приводов опишем соотношениями

$$\dot{\delta}_э = K_э (\delta_{эз} - \delta_э), \quad \dot{\delta}_в = K_в (\delta_{вз} - \delta_в), \quad \dot{\delta}_н = K_н (\delta_{нз} - \delta_н), \quad (2.5)$$

$$K_э \approx K_в \approx K_н = 4 [1/\text{СЕК}], \quad |\delta_{эз}| \leq 10^\circ, \quad |\delta_{вз}| \leq 10^\circ, \quad |\delta_{нз}| \leq 10^\circ \quad (2.6)$$

Величины  $\delta_{эз}$ ,  $\delta_{вз}$ ,  $\delta_{нз}$  - "заданные" управляющие воздействия.

Уравнения (2.4), (2.5) подсоединим к основной системе (2.1).

При помощи параметров  $W_{x_g}$ ,  $W_{y_g}$ ,  $W_{z_g}$  в системе (2.1) учитывается воздействие ветровой помехи. Величины  $W_{x_g}$ ,  $W_{y_g}$ ,  $W_{z_g}$  можно задавать как функции времени или как



функции, зависящие еще и от определенных фазовых координат системы. Последнее разумно, например, при имитации прохождения самолетом зоны микровзрыва.

Настоящая работа посвящена вопросу формирования  $W_{xg}, W_{yg}, W_{zg}$  по принципу обратной связи на основе численных методов теории дифференциальных игр. Чтобы учесть при этом "плавность" изменения скорости ветра, подчиним каждую из величин  $W_{xg}, W_{yg}, W_{zg}$  системе дифференциальных уравнений второго порядка. Так, для  $W_{xg}$  примем

$$\dot{W}_{xg} = \kappa_1 (\bar{W}_{xg} - W_{xg} + W_{xg0}) \quad (2.7)$$

$$\dot{\bar{W}}_{xg} = \kappa_2 (w_{xg} - \bar{W}_{xg}) .$$

Здесь  $W_{xg0}$  - номинальное значение скорости ветра,  $w_{xg}$  - новая независимая переменная. Константы  $\kappa_1, \kappa_2$  выберем равными

$$\kappa_1 = 0.5, \quad \kappa_2 = 3 .$$

Систему (2.6) вместе с аналогичными для  $W_{yg}, W_{zg}$  подсоединим к основной системе (2.1). Соответствующие новые независимые переменные обозначим  $w_{yg}, w_{zg}$ .

Полную систему дифференциальных уравнений, полученную в результате добавления к системе (2.1) указанных выше дополнительных уравнений, в векторной форме запишем в виде

$$\dot{\xi} = f(\xi, \delta_z, w) , \quad (2.8)$$

где  $\delta_z = (\delta_{pz}, \delta_{bz}, \delta_{эз}, \delta_{hz})'$  - векторный параметр управления,  $w = (w_{xg}, w_{yg}, w_{zg})'$  - векторный параметр помехи.

## 2.4. Линейные системы продольного и бокового движений

Перейдем от системы (2.8) к линеаризованной. В качестве номинального движения возьмем прямолинейное равномерное движение (без вращения) по глиссаде снижения. Номинальное значение  $W_{x_g 0}$  боковой составляющей скорости ветра условимся считать равным нулю. На номинальном движении

$$\begin{aligned} \gamma &= \psi = \beta = \omega_x = \omega_y = \omega_z = \delta_s = \delta_B = \delta_H = 0, \\ \alpha &= \text{const} = \alpha_0, \quad \vartheta = \text{const} = \vartheta_0, \quad P = \text{const} = P_0, \\ V &= V_0. \end{aligned}$$

Линеаризованная система распадается на две части: систему продольного движения и систему бокового движения.

Система продольного движения имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_g &= \Delta V_{gxg} \\ \Delta \dot{V}_{gxg} &= \Delta V_{xg} \frac{q_0 S}{m V_0} [-2(c_{x_0} \cos \vartheta_0 + c_{y_0} \sin \vartheta_0) - \\ &\quad - \frac{V_{y_{g0}}}{V_0} (c_{x_0}^\alpha \cos \vartheta_0 + c_{y_0}^\alpha \sin \vartheta_0)] + \\ &\quad + \Delta V_{yg} \frac{q_0 S}{m V_0} [-2 \frac{V_{y_{g0}}}{V_0} (c_{x_0} \cos \vartheta_0 + c_{y_0} \sin \vartheta_0) + \\ &\quad + (c_{x_0}^\alpha \cos \vartheta_0 + c_{y_0}^\alpha \sin \vartheta_0)] + \Delta \vartheta [-\frac{P_0}{m} (\sin \vartheta_0 + \\ &\quad + 0.03 \cos \vartheta_0) + \frac{q_0 S}{m} ((c_{x_0} \sin \vartheta_0 - c_{y_0} \cos \vartheta_0) - \end{aligned}$$

$$- (c_{x_0}^\alpha \cos \vartheta_0 + c_{y_0}^\alpha \sin \vartheta_0)) ] + \frac{\Delta P}{m} [\cos \vartheta_0 - 0.03 \sin \vartheta_0 ] + \Delta \delta_B \frac{q_0 S}{m} [-c_{x_0}^{\delta_B} \cos \vartheta_0 - c_{y_0}^{\delta_B} \sin \vartheta_0 ]$$

$$\Delta \dot{y}_g = \Delta V_{g y_g}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{V}_{g y_g} &= \Delta V_{x_g} \frac{q_0 S}{m V_0} [2(c_{y_0} \cos \vartheta_0 - c_{x_0} \sin \vartheta_0) + \\ &+ \frac{V_{y_g 0}}{V_0} (c_{y_0}^\alpha \cos \vartheta_0 - c_{x_0}^\alpha \sin \vartheta_0)] + \\ &+ \Delta V_{y_g} \frac{q_0 S}{m V_0} [2 \frac{V_{y_g 0}}{V_0} (c_{y_0} \cos \vartheta_0 - c_{x_0} \sin \vartheta_0) - \\ &- (c_{y_0}^\alpha \cos \vartheta_0 - c_{x_0}^\alpha \sin \vartheta_0)] + \Delta \vartheta \left[ \frac{P_0}{m} \times \right. \\ &\times (\cos \vartheta_0 - 0.03 \sin \vartheta_0) + \frac{q_0 S}{m} ((-c_{x_0} \cos \vartheta_0 - \\ &- c_{y_0} \sin \vartheta_0) + (c_{y_0}^\alpha \cos \vartheta_0 - c_{x_0}^\alpha \sin \vartheta_0))] + \\ &+ \frac{\Delta P}{m} [\sin \vartheta_0 + 0.03 \cos \vartheta_0] + \\ &+ \delta_B \frac{q_0 S}{m} [c_{y_0}^{\delta_B} \cos \vartheta_0 - c_{x_0}^{\delta_B} \sin \vartheta_0] \end{aligned}$$

$$\Delta \dot{\vartheta} = \Delta \omega_z$$

$$\Delta \dot{\omega}_z = \frac{q_0 S \beta_a}{J_z} \left\{ \Delta V_{x_g} \frac{V_{y_g 0}}{V_0^2} m_{z_0}^\alpha + \Delta V_{y_g} \frac{1}{V_0} (-m_{z_0}^\alpha) + \right.$$

$$+ \Delta \vartheta m_{z_0}^{\alpha} + \Delta \omega_z m_{z_0}^{\omega_z} + \Delta \delta_B m_{z_0}^{\delta_B} \}$$

$$\frac{\Delta \dot{P}}{m} = -K_P \frac{\Delta P}{m} + \frac{K_{\delta_P}}{m} \Delta \delta_{P3}$$

$$\Delta \dot{\delta}_B = K_B (\Delta \delta_{B3} - \Delta \delta_B)$$

$$\Delta \dot{\bar{W}}_{x_g} = K_1 (\Delta \bar{W}_{x_g} - \Delta W_{x_g})$$

$$\Delta \dot{\bar{w}}_{x_g} = K_2 (\Delta w_{x_g} - \Delta \bar{W}_{x_g})$$

$$\Delta \dot{\bar{W}}_{y_g} = K_1 (\Delta \bar{W}_{y_g} - \Delta W_{y_g})$$

$$\Delta \dot{\bar{w}}_{y_g} = K_2 (\Delta w_{y_g} - \Delta \bar{W}_{y_g}).$$

**Система бокового движения:**

$$\Delta \dot{z}_g = \Delta V_{gz_g}$$

$$\Delta \dot{V}_{gz_g} = \Delta V_{z_g} \frac{q_0 S}{m V_0} C_{z_0}^{\beta} + \Delta \psi \frac{q_0 S}{m} \frac{V_{x_g^0}}{V_0} C_{z_0}^{\beta} +$$

$$+ \Delta \gamma \left[ 0.03 \frac{P_0}{m} + \frac{q_0 S}{m} (C_{y_0} + \sin \alpha_0 C_{z_0}^{\beta}) \right] +$$

$$+ \Delta \delta_H \frac{q_0 S}{m} C_{z_0}^{\delta_H}$$

$$\Delta \dot{\psi} = \frac{\Delta \omega_y}{\cos \vartheta_0}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\omega}_y = & \frac{q_0 S l}{J} \left\{ \Delta V_{z_g} \cdot \frac{1}{V_0} \left[ m_{y_0}^\beta \frac{J_x}{J} + m_{x_0}^\beta \frac{J_{xy}}{J} \right] + \right. \\ & + \Delta \psi \frac{V_{x_{g0}}}{V_0} \left[ m_{y_0}^\beta \frac{J_x}{J} + m_{x_0}^\beta \frac{J_{xy}}{J} \right] + \\ & + \Delta \omega_y \left[ m_{y_0}^{\omega_y} \frac{J_x}{J} + m_{x_0}^{\omega_y} \frac{J_{xy}}{J} \right] + \\ & + \Delta \gamma \sin \alpha_0 \left[ m_{y_0}^\beta \frac{J_x}{J} + m_{x_0}^\beta \frac{J_{xy}}{J} \right] + \\ & + \Delta \omega_x \left[ m_{y_0}^{\omega_x} \frac{J_x}{J} + m_{x_0}^{\omega_x} \frac{J_{xy}}{J} \right] + \\ & \left. + \Delta \delta_H \left[ m_{y_0}^{\delta_H} \frac{J_x}{J} + m_{x_0}^{\delta_H} \frac{J_{xy}}{J} \right] + \Delta \delta_\vartheta m_x^{\delta_\vartheta} \frac{J_{xy}}{J} \right\} \end{aligned}$$

$$\Delta \dot{\gamma} = \Delta \omega_x - \Delta \omega_y \operatorname{tg} \vartheta_0$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\omega}_x = & \frac{q_0 S l}{J} \left\{ \Delta V_{z_g} \cdot \frac{1}{V_0} \left[ m_{y_0}^\beta \frac{J_{xy}}{J} + m_{x_0}^\beta \frac{J_y}{J} \right] + \right. \\ & + \Delta \psi \frac{V_{x_{g0}}}{V_0} \left[ m_{y_0}^\beta \frac{J_{xy}}{J} + m_{x_0}^\beta \frac{J_y}{J} \right] + \\ & + \Delta \omega_y \left[ m_{y_0}^{\omega_y} \frac{J_{xy}}{J} + m_{x_0}^{\omega_y} \frac{J_y}{J} \right] + \\ & \left. + \Delta \gamma \sin \alpha_0 \left[ m_{y_0}^\beta \frac{J_{xy}}{J} + m_{x_0}^\beta \frac{J_y}{J} \right] + \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta \omega_x \left[ m_{y_0}^{\omega_x} \frac{J_{xy}}{J} + m_{x_0}^{\omega_x} \frac{J_y}{J} \right] + \\
& + \Delta \delta_H \left[ m_{y_0}^{\delta_H} \frac{J_{xy}}{J} + m_{x_0}^{\delta_H} \frac{J_y}{J} \right] + \Delta \delta_{\mathfrak{z}} m_x^{\delta_{\mathfrak{z}}} \frac{J_y}{J} \}
\end{aligned}$$

$$\Delta \dot{\delta}_{\mathfrak{z}} = \kappa_{\mathfrak{z}} (\Delta \delta_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}} - \Delta \delta_{\mathfrak{z}})$$

$$\Delta \dot{\delta}_H = \kappa_H (\Delta \delta_{H\mathfrak{z}} - \Delta \delta_H)$$

$$\Delta \dot{\bar{W}}_{\mathfrak{z}_g} = \kappa_1 (\Delta \bar{W}_{\mathfrak{z}_g} - \Delta W_{\mathfrak{z}_g})$$

$$\Delta \dot{\bar{W}}_{\mathfrak{z}_g} = \kappa_2 (\Delta w_{\mathfrak{z}_g} - \Delta \bar{W}_{\mathfrak{z}_g}).$$

В приведенных формулах  $C_{x_0}^{\alpha}$  означает производную  $C_x$  по  $\alpha$  в номинальном режиме. Аналогичный смысл имеет  $C_{y_0}^{\alpha}$  и т.д. При линеаризации приращения величин  $q, \alpha, \beta$  брались в виде

$$\Delta q = \frac{2q_0}{V_0} \left( \Delta V_{x_g} + \Delta V_{y_g} \frac{V_{y_g^0}}{V_0} \right),$$

$$\Delta \alpha = \Delta \mathcal{D} - \frac{\Delta V_{y_g}}{V_0} + \frac{\Delta V_{x_g}}{V_0} \cdot \frac{V_{y_g^0}}{V_0},$$

$$\Delta \beta = \frac{1}{V_0} \left[ \Delta \psi V_{x_g^0} + \Delta \gamma \sin L_0 + \Delta V_{\mathfrak{z}_g} \right].$$

## 2.5. Числовые характеристики номинального движения.

### Численный вид линейных систем

Для расчета числовых значений параметров номинального движения примем угол наклона глissады  $\theta_0 = -2^\circ 40'$ , номинальное значение модуля воздушной скорости  $V_0 = 12.2$  м/сек, номинальные значения продольной и вертикальной составляющих скорости ветра  $W_{xg_0} = -5$  м/сек,  $W_{yg_0} = 0$ .

Тогда

$$V_{gxg_0} = 67.13 \text{ м/сек}, \quad V_{gyg_0} = -3.13 \text{ м/сек},$$

$$V_{gzg_0} = 0, \quad \alpha_0 = 5.42^\circ, \quad \vartheta_0 = 2.94^\circ,$$

$$C_{x_0} = 0.14, \quad C_{y_0} = 1.16, \quad C_{z_0} = 0,$$

$$\frac{P_0}{m} = 1.66 \text{ н/кг}, \quad \delta_{\text{сто}} = -1.26^\circ.$$

Номинальные значения производных от аэродинамических коэффициентов определяются этими величинами и числовыми значениями коэффициентов системы (2.1).

Численный вид линейной системы продольного движения следующий:

$$\Delta \dot{x}_g = \Delta V_{gxg} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{V}_{gxg} = & -0.05007 (\Delta V_{gxg} - \Delta W_{xg}) - \\ & -0.09729 (\Delta V_{gyg} - \Delta W_{yg}) - \end{aligned}$$

$$- 2.64220 \Delta \vartheta + 0.99714 \frac{\Delta P}{m} + 0.06276 \Delta \delta_B$$

$$\Delta \dot{y}_g = \Delta V_{gy_g}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{V}_{gy_g} &= 0.24085 (\Delta V_{gx_g} - \Delta W_{x_g}) - \\ &- 0.63873 (\Delta V_{gy_g} - \Delta W_{y_g}) + \\ &+ 45.27819 \Delta \vartheta + 0.08126 \frac{\Delta P}{m} + 1.44785 \Delta \delta_B \end{aligned}$$

$$\Delta \dot{\vartheta} = \Delta \omega_z$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\omega}_z &= 0.00030 (\Delta V_{gx_g} - \Delta W_{x_g}) + \\ &+ 0.00694 (\Delta V_{gy_g} - \Delta W_{y_g}) - \\ &- 0.50078 \Delta \vartheta - 0.52633 \Delta \omega_z - 0.38295 \Delta \delta_B \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta \dot{P}}{m} = - \frac{\Delta P}{m} + 2.70283 \Delta \delta_{p3}$$

$$\Delta \dot{\delta}_B = 4 (\Delta \delta_{B3} - \Delta \delta_B)$$

$$\Delta \dot{W}_{x_g} = 0.5 (\Delta \bar{W}_{x_g} - \Delta W_{x_g})$$



$$\Delta \dot{\bar{W}}_{xg} = 3(\Delta w_{xg} - \Delta \bar{W}_{xg})$$

$$\Delta \dot{\bar{W}}_{yg} = 0.5(\Delta \bar{W}_{yg} - \Delta W_{yg})$$

$$\Delta \dot{\bar{W}}_{yg} = 3(\Delta w_{yg} - \Delta \bar{W}_{yg})$$

**Линейная система бокового движения:**

$$\Delta \dot{z}_g = \Delta V_{gzg} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{V}_{gzg} = & -0.07694(\Delta V_{gzg} - \Delta W_{zg}) - \\ & - 5.55529 \Delta \psi + 9.27186 \Delta \gamma - \\ & - 1.48527 \Delta \delta_H \end{aligned}$$

$$\Delta \dot{\psi} = 1.00132 \Delta \omega_y$$

$$\Delta \dot{\omega}_y = -0.01293(\Delta V_{gzg} - \Delta W_{zg}) -$$

$$\begin{aligned}
 & - 0.93385 \Delta \psi - 0.25877 \Delta \omega_y - 0.08829 \Delta \gamma - \\
 & - 0.03031 \Delta \omega_x - 0.04596 \Delta \delta_{\vartheta} - 0.24564 \Delta \delta_H
 \end{aligned}$$

$$\Delta \dot{\gamma} = \Delta \omega_x - \Delta \omega_y \cdot 0.05136$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{\omega}_x &= -0.03305 (\Delta V_{g \bar{z}_g} - \Delta W_{\bar{z}_g}) - \\
 & - 2.38646 \Delta \psi - 0.95339 \Delta \omega_y - 0.22563 \Delta \gamma - \\
 & - 1.45921 \Delta \omega_x - 0.68941 \Delta \delta_{\vartheta} - 0.23270 \Delta \delta_H
 \end{aligned}$$

$$\Delta \dot{\delta}_{\vartheta} = 4 (\Delta \delta_{\vartheta 3} - \Delta \delta_{\vartheta})$$

$$\Delta \dot{\delta}_H = 4 (\Delta \delta_{H3} - \Delta \delta_H)$$

$$\Delta \dot{W}_{\bar{z}_g} = 0.5 (\Delta \bar{W}_{\bar{z}_g} - \Delta W_{\bar{z}_g})$$

$$\Delta \dot{\bar{W}}_{\bar{z}_g} = 3 (\Delta w_{\bar{z}_g} - \Delta \bar{W}_{\bar{z}_g})$$

В системах (2.9), (2.10) угловые величины следует брать в радианах.

Отметим, что  $\delta_{вз0} = \delta_{эз0} = \delta_{нз0} = 0$ ,  
 $w_{xg0} = w_{yg0} = w_{zg0} = 0$ . Поэтому  $\Delta\delta_{вз} = \delta_{вз}$ ,

$$\Delta\delta_{эз} = \delta_{эз}, \quad \Delta\delta_{нз} = \delta_{нз}, \quad \Delta w_{xg} = w_{xg},$$

$\Delta w_{yg} = w_{yg}$ ,  $\Delta w_{zg} = w_{zg}$ . Ниже будем писать  $\delta_{эз}$   
 вместо  $\Delta\delta_{эз}$ ,  $w_{xg}$  вместо  $\Delta w_{xg}$  и т.д. Поско-  
 льку  $\delta_{рз0} \neq 0$ , то для обозначения отклонения от номинала  
 величины  $\delta_{рз}$  по-прежнему будем употреблять символ  $\Delta\delta_{рз}$ .

### 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Систему (2.9) линейных дифференциальных уравнений продольного движения запишем в векторной форме

$$\dot{x} = A_* x + B_* u + C_* v, \quad x \in R^{12}, \quad (3.1)$$

$$u = (\Delta \delta_{p3}, \delta_{B3})', \quad v = (w_{xg}, w_{yg})'.$$

Условимся, что воздействия  $\Delta \delta_{p3}, \delta_{B3}$  принадлежат первому игроку,  $w_{xg}, w_{yg}$  - второму. Считаем их ограниченными по модулю:

$$|\Delta \delta_{p3}| \leq \mu_p, \quad |\delta_{B3}| \leq \mu_B,$$

$$|w_{xg}| \leq \gamma_{xg}, \quad |w_{yg}| \leq \gamma_{yg}.$$

Введем функцию  $\varphi_*$ , зависящую от координат  $x_3 = \Delta y_g$  и  $x_4 = \Delta \dot{y}_g$ . Для этого рассмотрим на плоскости  $x_3, x_4$  выпуклый шестиугольник  $M_*$ , симметричный относительно нуля. Его вершины:  $(-3, 0), (-3, 1), (0, 1), (3, 0), (3, -1), (0, -1)$ . Положим

$$\varphi_*(x_3, x_4) = \min \{c \geq 0 : (x_3, x_4)' \in c M_*\}.$$

Множество  $M_*$  можно трактовать как допуск на отклонения  $x_3 = \Delta y_g, x_4 = \Delta \dot{y}_g$  в момент пролета торца ВШ. Функция  $\varphi_*$  показывает отклонение от допуска.

Рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру с динамикой (3.1), фиксированным моментом окончания  $T$  и платой

$\varphi_*$ . Первый игрок минимизирует значения платы  $\varphi_*$  в

момент  $T$ , второй максимизирует. Примем  $T = 15$  сек. Оптимальная стратегия второго игрока в игре (3.1) будет использована для задания экстремальных ветровых возмущений по продольному каналу в полной нелинейной модели (2.8).

Система (2.10) линейных дифференциальных уравнений бокового движения в векторной форме имеет вид

$$\dot{x} = A^* x + B^* u + C^* v, \quad x \in R^{10}, \quad (3.2)$$

$$u = (\delta_{\text{ЭЗ}}, \delta_{\text{НЗ}})', \quad v = w_{\text{ЭГ}}.$$

Условимся, что воздействия  $\delta_{\text{ЭЗ}}$ ,  $\delta_{\text{НЗ}}$  принадлежат первому игроку, параметр  $w_{\text{ЭГ}}$  - второму. Ограничения:

$$|\delta_{\text{ЭЗ}}| \leq \mu_{\text{Э}}, \quad |\delta_{\text{НЗ}}| \leq \mu_{\text{Н}},$$

$$|w_{\text{ЭГ}}| \leq \gamma_{\text{ЭГ}}.$$

При помощи выпуклого шестиугольника  $M^*$  введем функцию  $\varphi^*$ :

$$\varphi^*(x_1, x_2) = \min \{ c \geq 0 : (x_1, x_2)' \in c M^* \}.$$

Вершины многоугольника  $M^*$ :  $(-6, 0)$ ,  $(-6, 1.5)$ ,  $(0, 6)$ ,  $(0, 1.5)$ ,  $(6, -1.5)$ ,  $(0, -1.5)$ . Множество  $M^*$  - допуск на отклонения  $x_1 = \Delta \dot{z}_g$ ,  $x_2 = \Delta \dot{z}_g$  в момент пролета торца ВШ.

Рассмотрим дифференциальную игру с динамикой (3.2), фиксированным моментом окончания  $T = 15$  сек и платой  $\varphi^*$ , значения которой минимизирует первый игрок и максимизирует второй. Оптимальная стратегия второго игрока в игре (3.2) будет

использована для задания экстремальных ветровых возмущений по боковому каналу в полной модели (2.8).

Таким образом, сформулированы две вспомогательные дифференциальные игры. Значения  $\mu_p$ ,  $\mu_B$ ,  $\mu_\varepsilon$ ,  $\mu_H$ , определяющие ограничения на управляющие воздействия первого игрока, должны быть согласованы с ограничениями (2.5), (2.6). Естественно взять

$$\mu_B = 10^\circ \pi / 180, \quad \mu_\varepsilon = 10^\circ \pi / 180, \quad \mu_H = 10^\circ \pi / 180.$$

Величина  $\delta_{p30} = 76.43^\circ$  не является серединой промежутка  $[47^\circ, 112^\circ]$ . В качестве  $\mu_p$  возьмем величину  $(\delta_{p30} - 47^\circ) \pi / 180 \approx \approx 29^\circ \pi / 180$ .

Значения  $\gamma_{xg}$ ,  $\gamma_{yg}$ ,  $\gamma_{zg}$  определяют ограничения на ветровую помету. Их выбор диктуется разумными соображениями о пределах возможных отклонений составляющих  $W_{xg}$ ,  $W_{yg}$ ,  $W_{zg}$  от номинальных значений. Приведенные ниже результаты вычислений соответствуют случаю  $\gamma_{xg} = 10 \text{ м/сек}$ ,  $\gamma_{yg} = 5 \text{ м/сек}$ ,  $\gamma_{zg} = 10 \text{ м/сек}$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Приведем результаты моделирования на ЭВМ движений полной нелинейной системы (2.8), когда ветровое возмущение задается на основе оптимальных стратегий второго игрока, полученных из решения вспомогательных линейных дифференциальных игр (3.1), (3.2). Стратегии реализуются при помощи линий переключения /8, I2, I5, I6/.

Пусть начальное положение  $x_g(0) = 0$  по оси  $x_g$  находится на расстоянии  $d = 3000$  м от торца ВПШ. Номинальное движение по глассаде, соответствующее заданным постоянным составляющим скорости ветра  $W_{x_{g0}} = -5$ ,  $W_{y_{g0}} = W_{z_{g0}} = 0$ , имеет скорость  $V_{gx_{g0}}$  по оси  $x_g$ , равную 67.13 м/сек и, стало быть, проходит над торцом полосы через

$$d/V_{gx_{g0}} = 3000/67.13 \approx 44.7 \text{ сек.}$$

Предположим, что на промежутке  $[0, T] = [0, 15]$  построены с некоторым шагом линии переключения второго игрока в задачах (3.1), (3.2). Линии переключения зависят от  $\tau = T - t$  ( $t$  - прямое время). Пока расстояние  $d(t)$  по оси  $x_g$  до торца ВПШ больше  $TV_{gx_{g0}} \approx 1007$  м для выбора помехи будем использовать линии переключения, соответствующие одному и тому же значению  $\tau = T = 15$  сек. Если  $d(t) \leq TV_{gx_{g0}}$ , то будем брать линии, соответствующие  $\tau = d(t)/V_{gx_{g0}}$ .

Таким образом, мы корректируем время, оставшееся до пролета торца ВПШ и выбираем  $w_{x_g}$ ,  $w_{y_g}$ ,  $w_{z_g}$  в системе (2.8) так, чтобы получить возможно большие значения функций

$\varphi_*$ ,  $\varphi^*$  в момент пролета.

Формирование помехи будем вести по времени с шагом 0.2 сек.

Символом  $\underline{\underline{II}}_*$  обозначим способ задания помехи, когда при помощи линий переключения формируются параметры  $w_{xg}$  и  $w_{yg}$  в то время, как  $w_{zg}$  полагается тождественно равным нулю. Способ  $\underline{\underline{II}}_*$  задает помеху по продольному каналу. Символ  $\underline{\underline{II}}^*$  будет означать экстремальную помеху по боковому каналу: параметр  $w_{zg}$  формируется на основе линий переключения, параметры  $w_{xg}$ ,  $w_{yg}$  считаются нулевыми.

Рассмотрим два варианта задания управляющих воздействий

$\delta_{pz}$ ,  $\delta_{vz}$ ,  $\delta_{\dot{v}z}$ ,  $\delta_{nz}$ . Первый (обозначим его  $I_A$ ) основан на использовании принятых в настоящее время (действующих) алгоритмов /23, 24/, опирающихся на теорию автоматического регулирования. Во втором варианте (обозначим его  $I_{II}$  - игровой способ) воздействия  $\delta_{vz}$ ,  $\delta_{\dot{v}z}$  будем формировать при помощи линий переключения, определяющих соответствующие компоненты оптимальных стратегий первого игрока в задачах (3.1), (3.2), воздействия  $\delta_{pz}$ ,  $\delta_{nz}$  - как в варианте  $I_A$  при помощи принятых в настоящее время алгоритмов. Шаг выбора управления в обоих вариантах примем равным 0.05 сек.

Результаты моделирования представлены на рис. 4.1-4.4.

Всюду по горизонтали откладывается пройденное расстояние. Были взяты два типа начальных условий: 1) вертикальное отклонение

$\Delta y_g = 10$  м, остальные отклонения нулевые (рис.4.1, 4.2),  
2) боковое отклонение  $\Delta z_g = 20$  м, остальные отклонения координат вектора  $\xi(0)$  от номинала нулевые (рис.4.3, 4.4).

Пояснение обозначений: надпись  $(I_{II}, \underline{\underline{II}}_*)$  означает, что управление строилось по способу  $I_{II}$ , помеха - при помощи способа  $\underline{\underline{II}}_*$ . Символ  $K$  - коэффициент, на который умно-



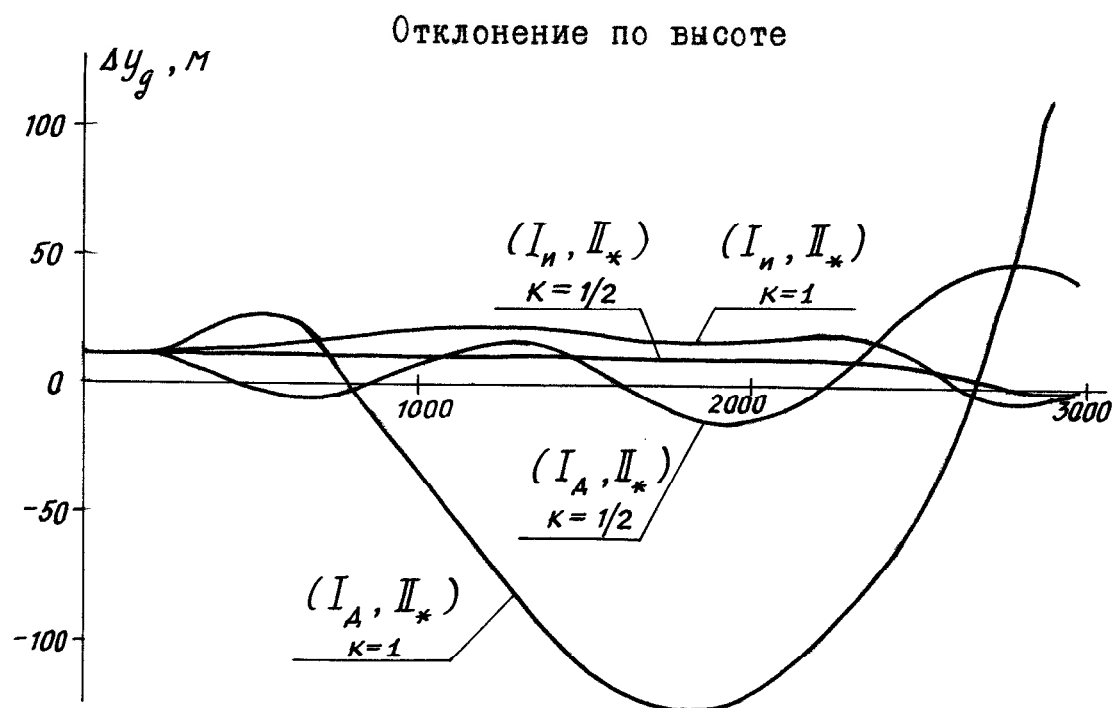


Рис.4.1

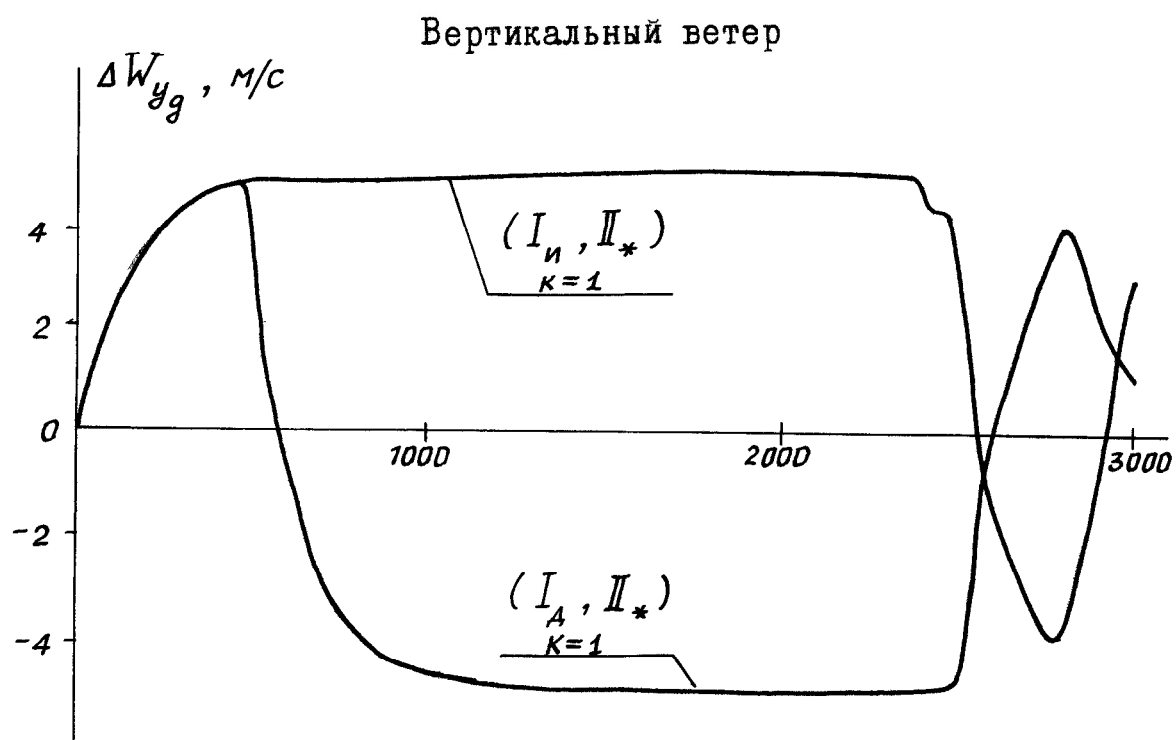


Рис.4.2

## Боковое отклонение

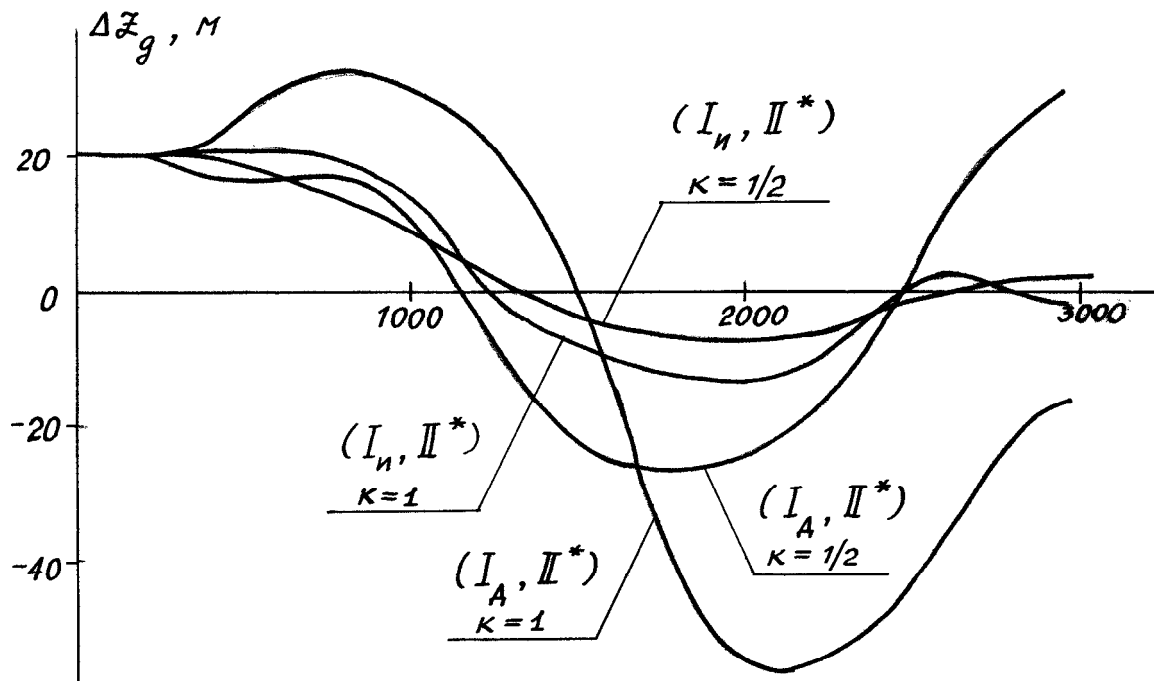


Рис.4.3

## Боковой ветер

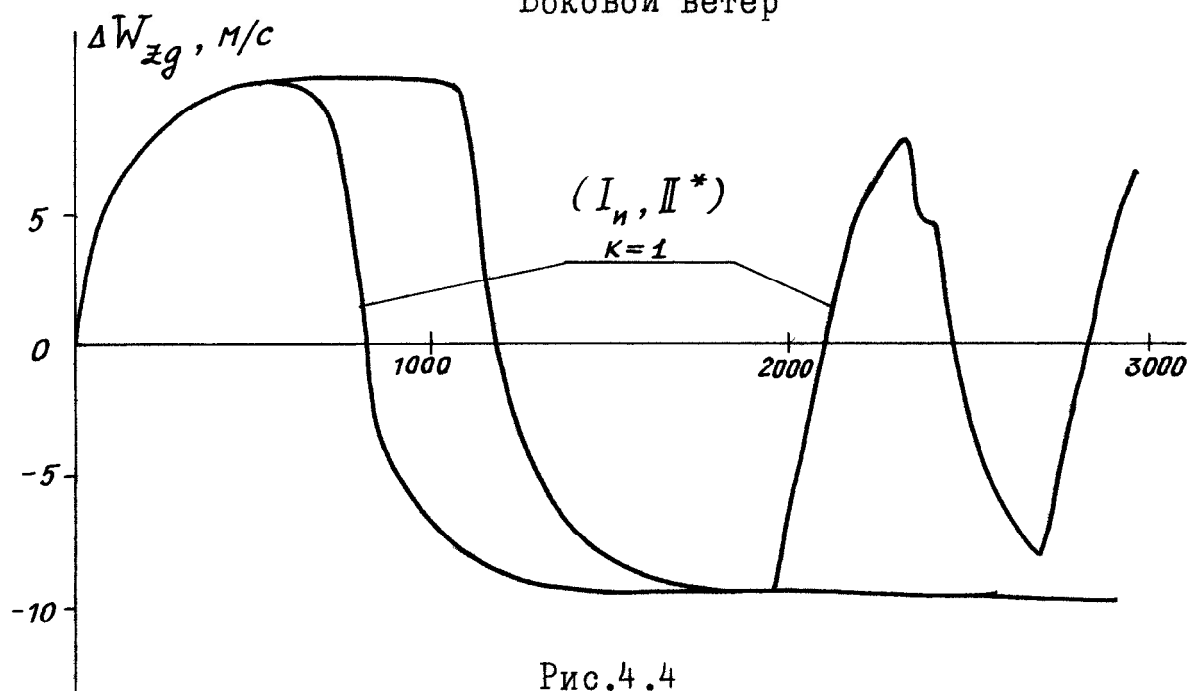


Рис.4.4

жается значение помехи, выбираемое по линиям переключения, построенным для  $\gamma_{xg} = 10$ ,  $\gamma_{yg} = 5$ ,  $\gamma_{zg} = 10$ . Таким образом, полагая  $\kappa = 1/2$ , мы изучаем влияние помехи, удовлетворяющей ограничениям  $|w_{xg}| \leq 5$ ,  $|w_{yg}| \leq 2.5$ ,  $|w_{zg}| \leq 5$ , не пересчитывая линий переключения. Поступаем так потому, что структура линий переключения не меняется принципиально при смене ограничений.

На рис.4.1, 4.3 показаны изменения отклонений  $\Delta y_g$ ,  $\Delta z_g$  при различных сочетаниях управления и помехи. Реализации вертикальной  $\Delta W_{yg}$  и боковой  $\Delta W_{zg}$  составляющих скорости ветра (в отклонении от номинала) изображены на рис. 4.2, 4.4.

Из графиков видно, что управление по способу  $I_A$  не дает удовлетворительного результата при столкновении с экстремальной помехой. Результаты для способа  $I_{II}$  существенно лучше. Следует однако учесть, что при формировании управления по способу  $I_{II}$  использовалась информация о всех фазовых координатах системы (2.8). Поэтому результаты, относящиеся к способу  $I_{II}$ , правильнее рассматривать как потенциально достижимые.

Рис. 4.5–4.7 посвящены управлению в условиях микровзрыва. Рис.4.5 показывает расположение микровзрыва относительно глиссады. Реализации  $W_{xg}$ ,  $W_{yg}$ ,  $W_{zg}$  составляющих скорости ветра даны на рис.4.6. На рис.4.7 показаны реализации координаты  $y_g$  при способе управления  $I_{II}$  и способе  $I_A$ . Отклонение  $\Delta y_g$  от номинала в момент пролета торца ВШ для способа  $I_{II}$  значительно меньше, чем для способа  $I_A$ . Числовые значения отклонений  $\Delta y_g$ ,  $\Delta \dot{y}_g$ ,  $\Delta z_g$ ,  $\Delta \dot{z}_g$  в момент пролета следующие:

$$\Delta y_g = -0.24, \quad \Delta \dot{y}_g = 0.27, \quad \Delta z_g = -0.05, \quad \Delta \dot{z}_g = 0.01$$

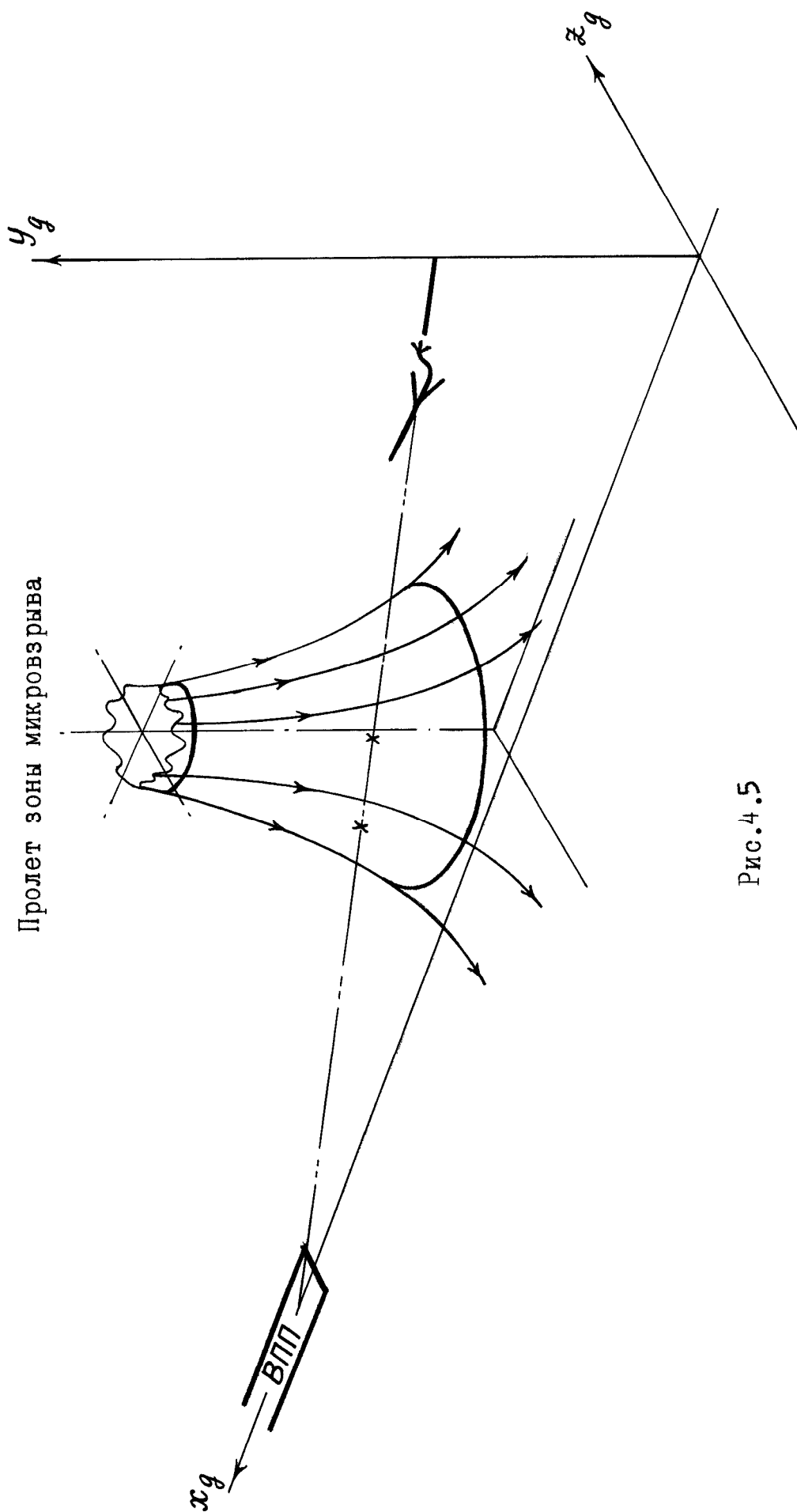


Рис. 4.5

## Составляющие скорости ветра

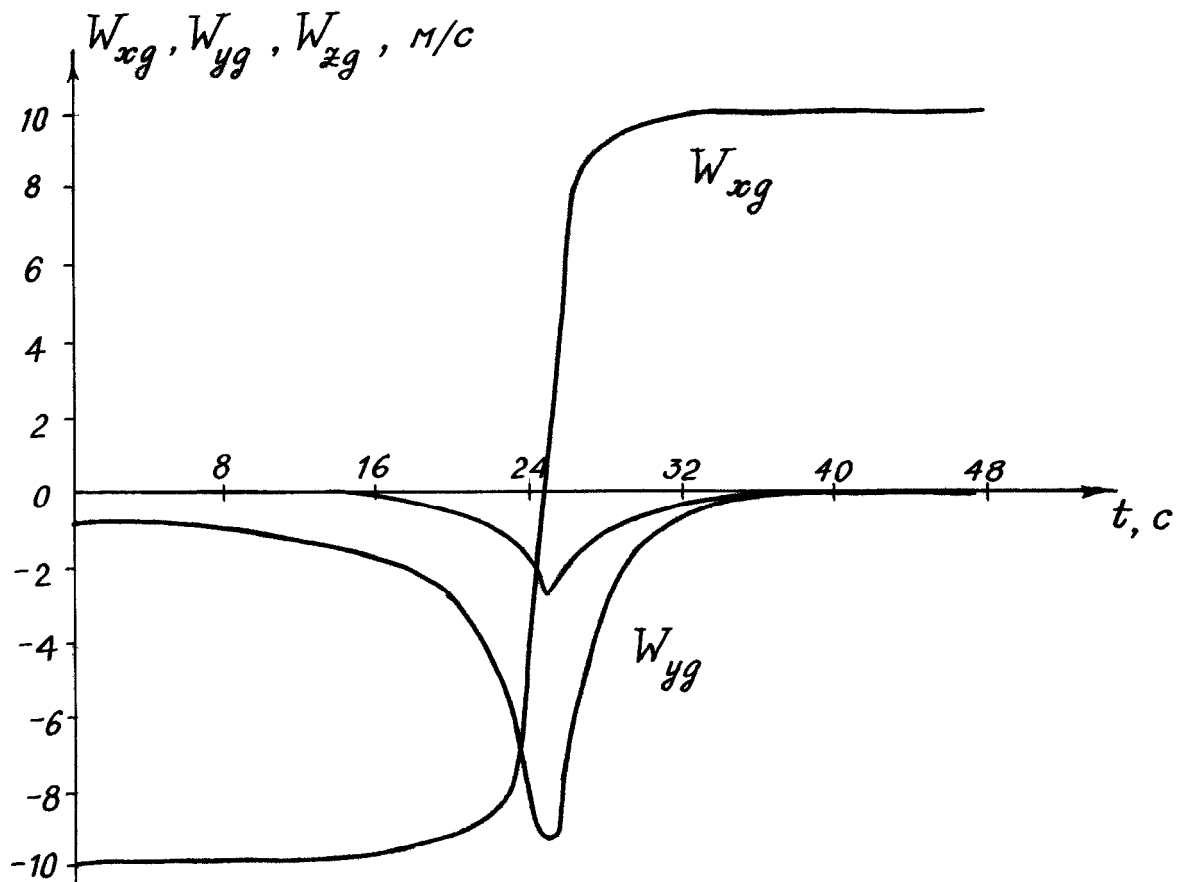


Рис.4.6



Рис.4.7

при способе  $I_{и}$  и

$$\Delta y_g = 24.98, \quad \Delta \dot{y}_g = 2.39, \quad \Delta x_g = 2.39, \quad \Delta \dot{x}_g = 0.21$$

при способе  $I_{д}$  .

## 5. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ БОКОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ С ПЛАТОЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ТРЕХ КООРДИНАТ ФАЗОВОГО ВЕКТОРА

Линейные дифференциальные игры (3.1), (3.2) были поставлены так, что функция платы в каждой из них зависела от двух координат фазового вектора в момент окончания  $T$ . Это обстоятельство позволяет в процессе решения сделать переход к эквивалентной дифференциальной игре второго порядка. В частности, конструктивное задание оптимальных стратегий осуществляется именно в координатах эквивалентной игры. Специфика плоскости существенно облегчает решение задачи. Наборы стандартных программ хорошо разработаны именно для таких, по-существу "двумерных" дифференциальных игр.

В данном разделе приведем вариант "трехмерной" постановки линейной дифференциальной игры, когда функция платы зависит от трех координат фазового вектора.

Рассмотрим в линеаризованной форме задачу об управлении боковым движением самолета на посадке. Динамика объекта в векторной записи имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv, \quad x \in R^7. \quad (5.1)$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0762 & -5.34 & 0 & 9.81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0056 & -0.392 & -0.0889 & -0.0378 & -0.17 & 0.0378 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.0129 & -0.9016 & -0.2045 & -0.0869 & -0.89 & 0.0869 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)', \quad C = (0, 0.0762, 0, 0.0056, \\ 0, 0.0129, 0)'$$

$$|\omega| \leq 8^\circ \frac{\pi}{180}, \quad |\nu| \leq 10 \text{ м/сек}.$$

Координата  $x_1$  - боковое отклонение центра масс самолета от оси взлетно-посадочной полосы,  $x_2$  - скорость бокового отклонения,  $x_3$  - угол рыскания,  $x_4$  - скорость изменения угла рыскания,  $x_5$  - угол крена,  $x_6, x_7$  - вспомогательные переменные. Боковое отклонение измеряется в метрах, углы - в радианах, время - в секундах. Управляющий параметр  $\omega$  - заданный угол крена (рад), параметр  $\nu$  - боковая составляющая скорости ветра (м/сек).

Система (5.1) взята из работ [15, 17], где она исследовалась с функцией платы, зависящей от координат  $x_1, x_2$ . Сейчас функцию платы  $\varphi^*$  будем считать зависящей от координат  $x_1, x_2, x_3$ . Пусть  $M^*$  - параллелепипед в пространстве  $x_1, x_2, x_3$  с вершинами  $(20, 0, 0), (20, -10, 0), (20, -10, 0.26), (20, 0, 0.26), (-20, 0, 0), (-20, 10, 0), (-20, 10, -0.26), (-20, 0, -0.26)$ . Положим

$$\varphi^*(x_1, x_2, x_3) = \min \{c \geq 0 : (x_1, x_2, x_3)' \in cM^*\}.$$

Таким образом, функция  $\varphi^*$  зависит, помимо бокового отклонения и его скорости, еще и от угла рыскания. Первый игрок минимизирует значения функции  $\varphi^*$  в фиксированный момент окончания  $T = 15$  сек, второй максимизирует.

Задача (5.1) исследовалась при помощи разработанных в последнее время стандартных программ решения "трехмерных" дифференциальных игр. Оптимальные стратегии реализуются при помощи поверхностей переключения, которые строятся на заданной сетке

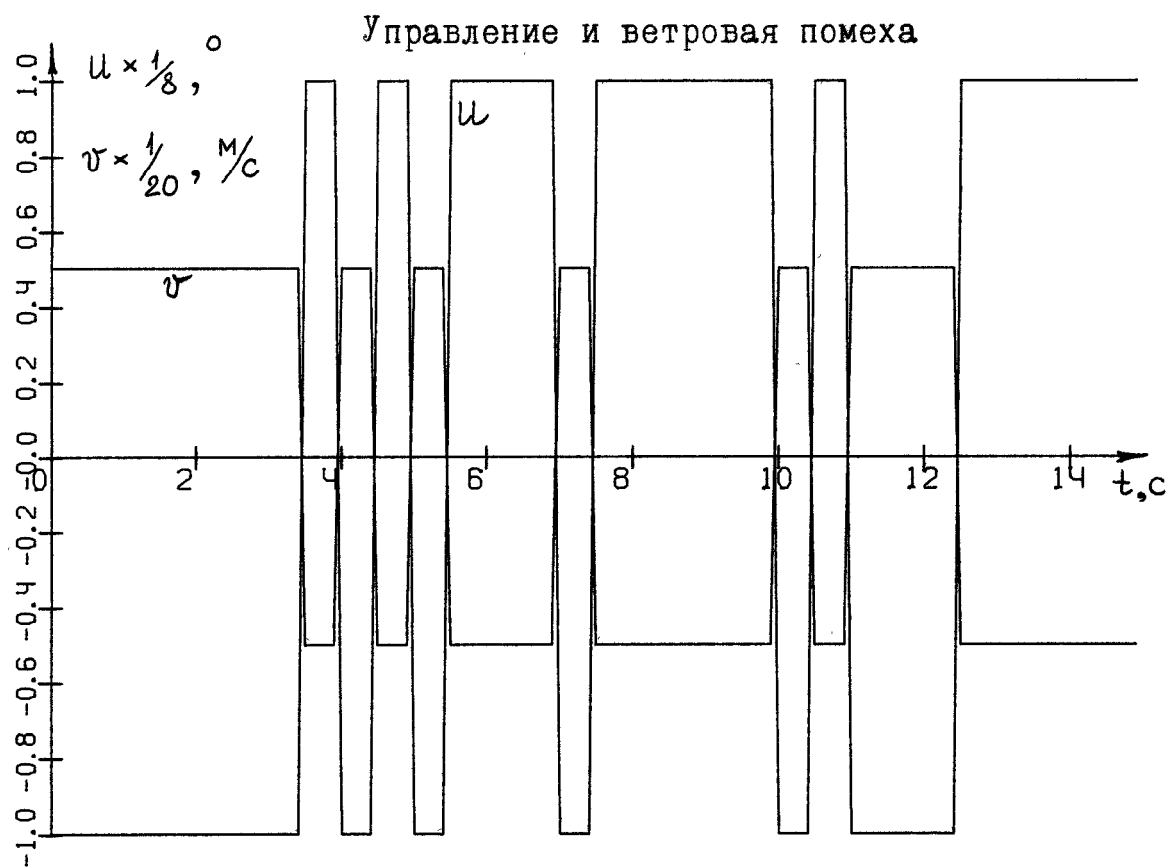
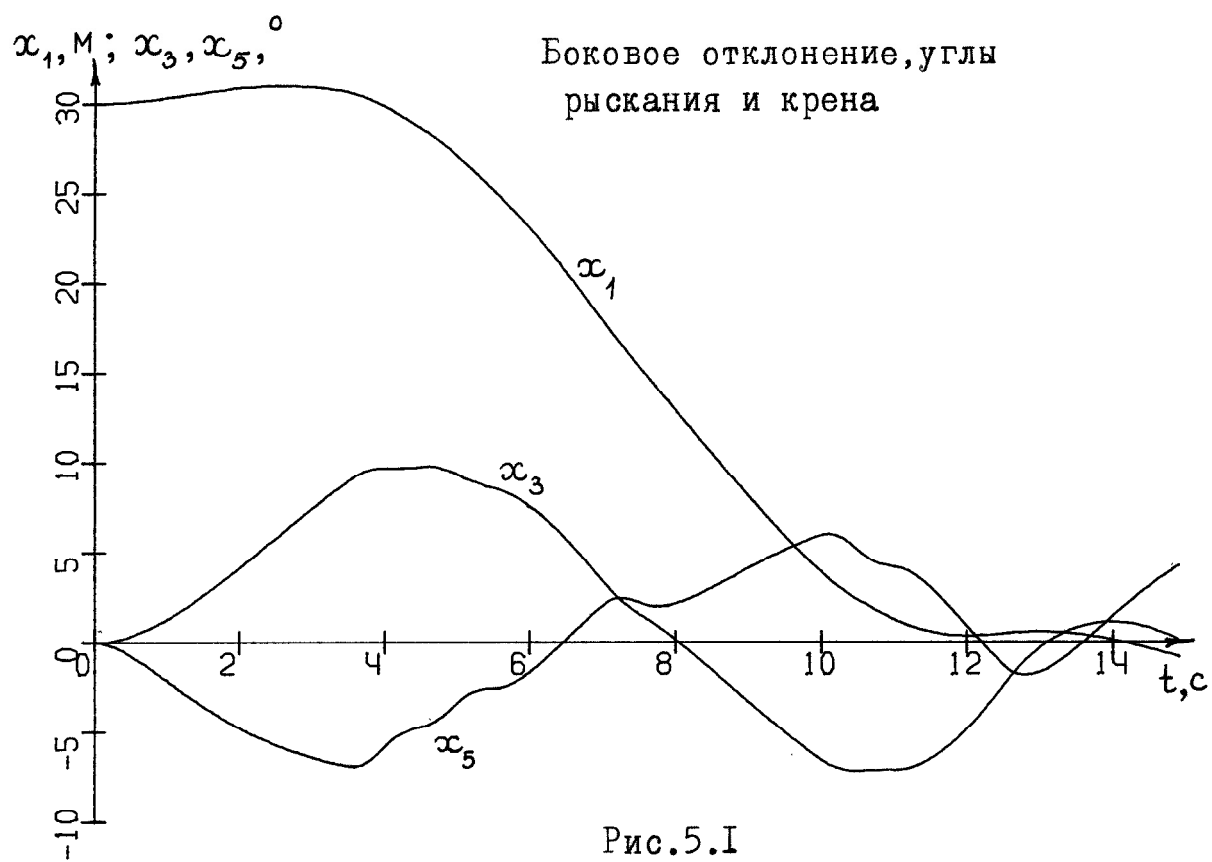


моментов времени. Соответствующая конкретному моменту времени поверхность переключения делит трехмерное пространство эквивалентной дифференциальной игры на две части, задавая тем самым области, где оптимальное управляющее воздействие (или воздействие помехи) принимает крайние значения. Поверхности переключения строятся независимо для каждого из игроков путем специальной обработки сечений максимальных стабильных мест.

На рис.5.1, 5.2 представлены результаты моделирования движения системы (5.1). Начальное боковое отклонение  $x_1(0)$  равно 30 м, остальные координаты фазового вектора  $x(0)$  равны нулю. Каждый из игроков использовал оптимальную стратегию.

Зависимость бокового отклонения, углов рыскания и крена от времени показана на рис.5.1. Реализации управляющего воздействия  $u(t)$  и помехи  $v(t)$  даны на рис.5.2.

При нахождении поверхностей переключения использовались максимальные стабильные места, построенные для трех значений параметра  $c = 1, 3, 5$ . Шаг выбора управления и помехи был одинаков и равен 0.5 сек. Значение функции  $\varphi^*$  в момент  $T = 15$  сек равно 0.26.



### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отчете предложен путь использования численных методов теории дифференциальных игр для имитации экстремальных ветровых возмущений на этапе посадки самолета. Результаты исследований доведены до набора программ для машины БЭСМ-6. Дальнейшая работа должна быть связана с адаптацией предложенных алгоритмов к конкретным имитационным устройствам.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Дитенбергер М.А., Хейнс П.А., Луэрс Дж.К. Реконструкция условий авиакатастрофы в Новом Орлеане. - Аэрокосмическая техника, 1986, № 5, с.3-15.
2. Лернер Э. Коварный сдвиг ветра будет побежден. - Аэрокосмическая техника, 1987, № 3, с.20-24.
3. Лернер Э. Оперативное средство защиты от сдвига ветра.- Аэрокосмическая техника, 1987, № 3, с.25-26.
4. Miele A., Wang T., Melvin W. Optimal take-off trajectories in the presence of windshear. - J. Opt. Theory and Appl., 1986, v.49, N1, p.1-45.
5. Miele A., Wang T., Melvin W. Guidance strategies for near-optimum take-off performance in a windshear. - J. Opt. Theory and Appl., 1986, v.50, N1, p.1-47.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974, 456 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
8. Кейн В.М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. М.: Наука, 1985. 248 с.
9. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (материалы по математическому обеспечению ЭВМ). - Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984. 295 с.
10. Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления. - Прикл. матем. и механ., 1987, т.51, вып.2, с.216-222.

11. Боткин Н.Д., Пацко В.С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре. - Изв. АН СССР. Техн.кибернетика, 1983, № 4, с.78-85.

12. Зарх М.А., Пацко В.С. Позиционное управление второго игрока в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. - Свердловск, 1985. - 84 с. - Рукопись представлена Институтом математики и механики УНЦ АН СССР. Деп. в ВИНТИ I авг. 1985, № 5756-85.

13. Зарх М.А., Пацко В.С. Численное решение трехмерных линейных дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания. - Свердловск, 1985. - 42 с. - Рукопись представлена Институтом математики и механики УНЦ АН СССР. Деп. в ВИНТИ 28 окт. 1985, № 7509-В-85.

14. Зарх М.А., Пацко В.С. Стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре. - Прикл. матем. и механ., 1987, т.51, вып.2, с.193-200.

15. Боткин Н.Д., Кейн В.М., Пацко В.С. Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке. - Прикл. матем. и механ., 1984, т.48, вып.4, с.560-567.

16. Зарх М.А. Универсальная оптимальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре. - Свердловск, 1985. - Рукопись представлена Урал.ун-том. Деп. в ВИНТИ 25 окт. 1985, № 7438-В-85.

17. Кейн В.М., Париков А.Н., Смуров М.Ю. Об одном способе оптимального управления по методу экстремального прицеливания. - Прикл.матем. и механ., 1980, т.44, вып.3, с.434-440.

18. Титовский И.Н. Игровой подход к задаче синтеза управления самолетом при заходе на посадку. - Уч.зап. ЦАГИ, 1981, т.12, № 1, с.85-92.

19. Корнеев В.А., Меликян А.А., Титовский И.Н. Стабилизация глиссады самолета при ветровых возмущениях в минимаксной постановке. - Изв. АН СССР. Техн.кибернетика, 1985, № 3, с.132-139.

20. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983. 320 с.

21. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1969. 499 с.

22. Системы цифрового управления самолетом. Под ред. А.Д. Александрова, С.М.Федорова. М.: Машиностроение, 1983. 223 с.

23. Федоров С.М., Дробкин В.В., Михайлов О.И., Кейн В.М. Автоматическое управление самолетами и вертолетами. М.: Транспорт, 1977. 246 с.

24. Кейн В.М., Красов А.И., Федоров С.М., Шидловский В.И. Системы автоматического и директорного управления полетом. - Ленинград: Изд-е ордена Ленина Академии гражд.авиации, 1982. 80 с.