

АКАДЕМИЯ НАУК СССР · УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ
С ГАРАНТИРОВАННЫМ
РЕЗУЛЬТАТОМ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

СВЕРДЛОВСК 1988

Н. Д. БОТКИН, А. И. КРАСОВ

ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В МОДЕЛЬНОЙ
ЗАДАЧЕ О РАЗБЕГЕ САМОЛЕТА

Демонстрируется применение методов теории дифференциальных игр к задаче управления самолетом, совершающим разбег по взлетно-посадочной полосе (ВПП) при наличии возмущающего воздействия ветра. Исследования проводятся в рамках линейной нестационарной модели, которая, с одной стороны, позволяет получить полное решение соответствующей дифференциальной игры, а с другой, достаточно хорошо отражает реальное поведение объекта. Описывается построение законов формирования оптимального управления и наихудшего ветрового возмущения. Приводятся результаты моделирования движения управляемого объекта при различных сочетаниях законов формирования управления и помехи.

§ 1. Линейная математическая модель движения самолета по ВПП получена из полной нелинейной модели (см., например, [6]) путем введения ряда упрощающих предположений. А именно, предполагается отсутствие продольной составляющей скорости ветра и постоянство продольного ускорения. Аэродинамическая боковая сила считается пропорциональной углу скольжения, а боковая сила, действующая на колесо, — углу увода колеса. Игнорируются моменты сил, вызывающие изменение угла тангажа и перераспределение нагрузок между передней и задней стойками колес. Считается, что моменты, обуславливающие изменение угла крена, компенсируются элеронами. Управление самолетом производится посредством согласованного поворота рулевого колеса и руля направления.

При указанных выше предположениях математическая модель движения самолета по ВПП представляет собой нестационарную линейную систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3 + a_{24}(t)x_4 + a_{25}(t)x_5 + c_2(t)v, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_4 &= a_{42}(t)x_2 + a_{43}(t)x_3 + a_{44}(t)x_4 + a_{45}(t)x_5 + c_4(t)v, \\ \dot{x}_5 &= -4(x_5 + u). \end{aligned} \right\}$$

Здесь первая координата x_1 фазового вектора x имеет смысл бокового отклонения центра масс самолета от оси ВПП, x_2 — скорость бокового отклонения, x_3 — угол рыскания, x_4 — его скорость, x_5 — угол отклонения руля направления. Управляющее воздействие u трактуется как заданный угол отклонения руля направления, который через устройство привода, моделируемое последним уравнением системы (1), отрабатывается в реальный угол. В системе (1) учтено, что угол поворота рулевого колеса жестко связан с углом отклонения руля направления и составляет одну треть последнего. Параметр v имеет смысл скорости бокового ветра. Линейные отклонения измеряются в метрах, углы — в градусах, время — в секундах. Выражения для переменных коэффициентов имеют вид

$$\begin{aligned} a_{22}(t) &= 0,229(1 - 100/t) - 0,345 \cdot 10^{-2}t, \\ a_{23}(t) &= 0,12 \cdot 10^{-3}t^2 - 0,8(1 - 0,01t), \\ a_{24}(t) &= -0,138 \cdot 10^{-2}(1 - 100/t), \\ a_{25}(t) &= -0,2 \cdot 10^{-4}t^2 + 0,32 \cdot 10^{-1} \cdot (1 - 0,01t), \\ a_{42}(t) &= -0,132 \cdot 10^{-1}t, \\ a_{43}(t) &= -0,464 \cdot 10^{-3}t^2, \\ a_{44}(t) &= 0,715 \cdot 10^{-1}(1 - 100/t), \\ a_{45}(t) &= -0,164 \cdot 10^{-3}t^2 - 0,3(1 - 0,01t), \\ c_2(t) &= 0,345 \cdot 10^{-2}t, \\ c_4(t) &= 0,132 \cdot 10^{-1}t. \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов записаны так, что момент $t_0 = 1$ с считается начальным. Время разбега предполагается фиксированным и равным 34 с. Фиксированная продолжительность процесса разбега есть следствие допущения о постоянстве продольного ускорения. Таким образом, процесс управления рассматривается на промежутке $[t_0, \theta]$, где $t_0 = 1$ с, $\theta = 35$ с.

Задачу управления системой (1) будем рассматривать как дифференциальную игру [3], где первый игрок распоряжается управлением u , а в распоряжении второго находится управление v . Ограничения на мгновенные значения управляющих воздействий следующие:

$$|u| \leq \mu = 25 \text{ град}, \quad |v| \leq \nu = 17 \text{ м/с}. \quad (2)$$

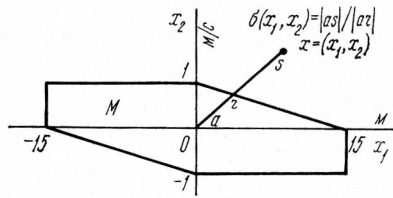


Рис. 1.

Игра рассматривается в позиционной формализации, т. е. игроки могут формировать свои управляющие воздействия по принципу обратной связи. Для оценки качества процесса управления вводится функция платы

$$\sigma(x_1, x_2) = \min \{c \geq 0 : (x_1, x_2)' \in c \cdot M\}, \quad (3)$$

зависящая только от первых двух координат x_1, x_2 фазового вектора x . Множество M , лежащее в пространстве первых двух координат фазового вектора, показано на рис. 1. На этом же рисунке поясняется содержательный смысл функции σ . Отметим, что $\sigma(x_1, x_2) \leq 1$ тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2)' \in M$. Цель первого игрока состоит в минимизации величины $\sigma(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))$, интересы второго игрока противоположны. Множество M выбрано из таких соображений, что в момент ϑ отрыва от поверхности ВПП самолет должен находиться в пределах ВПП и его скорость должна быть направлена в сторону, противоположную отклонению. Таким образом, соотношения (1)–(3) и момент ϑ определяют антагонистическую позиционную дифференциальную игру, для которой можно поставить задачу отыскания оптимальных стратегий первого и второго игроков.

§ 2. Зафиксируем произвольную начальную позицию (t_*, x_*) и позиционную стратегию $(t, x) \rightarrow U(t, x)$ первого игрока. Обозначим через $x_{\Delta}(\cdot, t_*, x_*, U, v(\cdot))$ ломаную Эйлера [3], выпущенную из позиции (t_*, x_*) и порожденную разбиением (диаметр которого не превосходит Δ) стратегией U и измеримой функцией $v(\cdot)$. Величину

$$\Gamma_U(t_*, x_*) = \overline{\lim}_{\Delta \rightarrow 0} \sup_{v(\cdot)} \sigma(x_{\Delta_1}(\vartheta, t_*, x_*, U, v(\cdot)), x_{\Delta_2}(\vartheta, t_*, x_*, U, v(\cdot))),$$

где \sup берется по всем измеримым функциям $v(\cdot)$, удовлетворяющим условию $|v(t)| \leq v$, $t \in [t_*, \vartheta]$, назовем результатом, гарантированным стратегией U в позиции (t_*, x_*) . Аналогично, для каждой стратегии $(t, x) \rightarrow V(t, x)$ второго игрока гарантированный результат в позиции (t_*, x_*) определяется равенством

$$\Gamma_V(t_*, x_*) = \underline{\lim}_{\Delta \rightarrow 0} \inf_{u(\cdot)} \sigma(x_{\Delta_1}(\vartheta, t_*, x_*, u(\cdot), V), x_{\Delta_2}(\vartheta, t_*, x_*, u(\cdot), V)),$$

где \inf берется по всем измеримым функциям $u(\cdot)$, удовлетворяющим условию $|u(t)| \leq \mu$, $t \in [t_*, \vartheta]$.

В теории дифференциальных игр доказывается [3, 7], что для каждой позиции игры (t_*, x_*) имеет место равенство

$$\min_U \Gamma_U(t_*, x_*) = \max_V \Gamma_V(t_*, x_*) \quad (4)$$

и минимум в левой части и максимум в правой части действительно достигаются на некоторых позиционных стратегиях U^0, V^0 . Величину $\Gamma(t_*, x_*)$, совпадающую со значением обеих частей равенства (4), называют ценой игры в позиции (t_*, x_*) , а стратегии U^0, V^0 — оптимальными стратегиями первого и второго игроков соответственно. Из указанного выше определения оптимальных стратегий вытекает их зависимость от начальной позиции и, в общем случае, такая зависимость действительно имеет место [8]. Однако из [2, 9] следует существование в игре (1)—(3) универсальных оптимальных стратегий игроков, т. е. стратегий, оптимальных для каждой начальной позиции. Более того, универсальная оптимальная стратегия первого игрока устойчива к ошибкам построения определяющих ее элементов и к погрешностям измерения текущей позиции.

§ 3. Дифференциальная игра (1)—(3), как линейная игра с фиксированным моментом окончания, обладает той особенностью, что функция платы σ зависит лишь от двух координат фазового вектора. Эта особенность позволяет [7], используя замену $y(t) = X_{1,2}(\vartheta, t)x(t)$, перейти от игры (1)—(3) к эквивалентной игре второго порядка:

$$\dot{y} = D(t)u + E(t)v, \quad y \in R^2. \quad (5)$$

Здесь $D(t) = X_{1,2}(\vartheta, t)b$, $E(t) = X_{1,2}(\vartheta, t)c(t)$,

$$b = (0; 0; 0; 0; -4), \quad c(t) = (0; 3,445 \cdot 10^{-3}t; 0; 0,132 \cdot 10^{-1}t; 0).$$

Матрица $X_{1,2}(\vartheta, t)$ составлена из первых двух строк матрицы $\exp \int_t^{\vartheta} \{a_{ij}(\xi)\} d\xi$.

Годографы вектор-функций $\tau \rightarrow D(\vartheta - \tau)$, $\tau \rightarrow E(\vartheta - \tau)$ показаны на рис. 2, 3. Функция платы, момент окончания и ограничения на управляющие воздействия игроков в новой игре такие же, как и в игре (1)—(3). Обозначим через γ функцию цены для игры (5). Для любой начальной позиции (t_*, x_*) справедливо соотношение

$$\Gamma(t_*, x_*) = \gamma(t_*, X_{1,2}(\vartheta, t_*)x_*),$$

показывающее связь между исходной игрой (1) и эквивалентной игрой (5) второго порядка. Множество уровня $W_c = \{(t, y) \in [t_0, \vartheta] \times R^2 : \gamma(t, y) \leq c\}$ функции цены в игре (5) совпадает с множеством позиционного поглощения целевого множества $M_c = c \cdot M$ в момент ϑ или с максимальным u -стабильным мостом [3], приводящим в момент ϑ на M_c . Сечение $W_c(t) = \{y \in R^2 : (t, y) \in W_c\}$ совпадает с альтернированным интегралом [5] для игры (1), построенным от множества M_c на отрезке $[t, \vartheta]$. В Институте

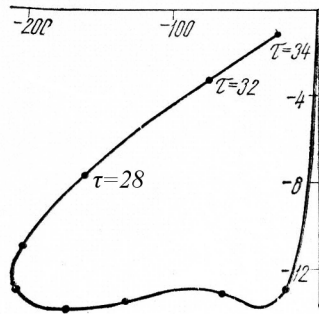


Рис. 2.

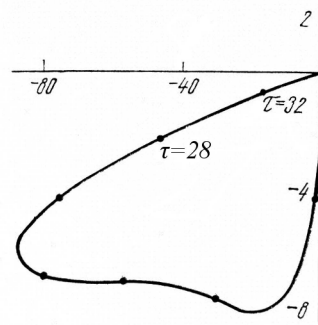


Рис. 3.

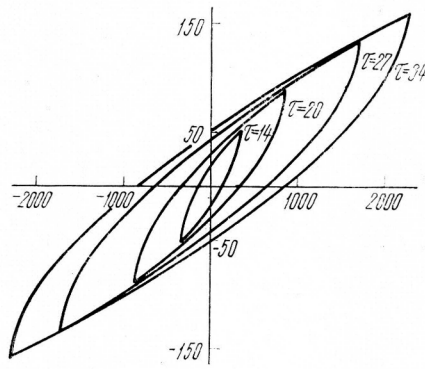


Рис. 4.

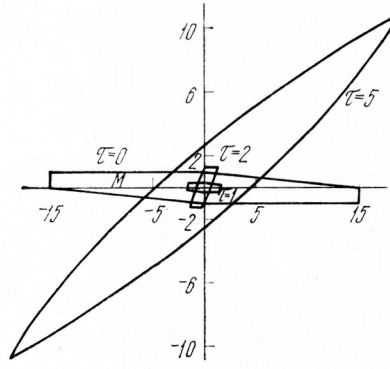


Рис. 5.

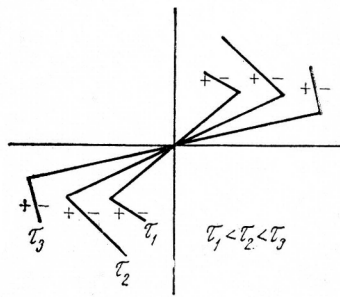


Рис. 6.

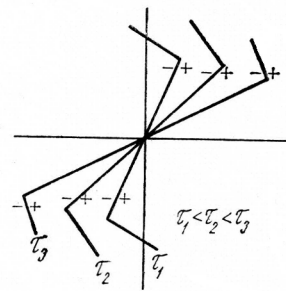


Рис. 7.

математики и механики УрО АН СССР разработаны стандартные программы [10] построения множеств позиционного поглощения в играх вида (5). На рис.4 показаны сечения $W_c(\vartheta - \tau)$ при $c = 1, \tau = 14; 20; 27; 34$. На рис. 5 аналогичные множества построены для $\tau = 0; 1; 2; 5$ (отметим, что $W_c(\vartheta) = M_c$). Множество W_c имеет смысл «трубки» в пространстве t, y_1, y_2 , откуда первый игрок гарантирует приведение системы (5) на целевое множество M_c в момент ϑ при любых действиях второго игрока. В терминах системы (1) это означает следующее. Если начальная позиция (t_0, x_0) такова, что $X_{1,2}(\vartheta, t_0)x_0 \in W_c(t_0)$, то у первого игрока существует позиционная стратегия, гарантирующая включение $(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))' \in M_c$. Если $X_{1,2}(\vartheta, t_0)x_0 \notin W_c(t_0)$, то такой стратегии нет. Более того, существует стратегия второго игрока, делающая невозможным попадание точки $(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))'$ на M_c при любых действиях первого игрока.

§ 4. Как было отмечено выше, в игре (1) существует устойчивая универсальная оптимальная стратегия первого игрока. Эту стратегию можно определить при помощи некоторой специальной поверхности S^1 , лежащей в пространстве t, y_1, y_2 и построенной на основе обработки множеств позиционного поглощения дифференциальной игры (5). Будем считать поверхность S^1 набранной из линий $S^1(t), t \in [t_0, \vartheta]$, где $S^1(t) = \{y \in R^2 : (t, y) \in S^1\}$. Пусть требуется построить линию $S^1(t)$ для некоторого момента $t \in [t_0, \vartheta]$ (т. е. линию переключения для момента t). Обозначим символом c_t наименьшее число $c \geq 0$, для которого $W_c(t) \neq \emptyset$. Выбрав достаточно близкое к c_t число $c_* > c_t$ и достаточно большое число $c^* > c_*$, зададим набор упорядоченных по возрастанию чисел $c_1 = c_*, c_2, \dots, c_k = c^*$. Для каждого числа c_i построим множество $W_{c_i}(t)$, которое будет выпуклым компактом на плоскости y_1, y_2 . Обходя границу $W_{c_i}(t)$ по часовой стрелке, найдем точку a_i (соответственно b_i), где скалярное произведение вектора $D(t)$ на вектор внешней нормали к границе меняет знак с минуса на плюс (соответственно с плюса на минус). Перебрав i от 1 до k , получим наборы точек $a_1, a_2 \dots a_k$ и b_1, b_2, \dots, b_k . В качестве $S^1(t)$ следует взять ломаную $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k$. Указанная ломаная будет тем точнее приближать истинную линию переключения $S^1(t)$, чем меньше диаметр разбиения промежутка $[c_*, c^*]$ числами c_1, \dots, c_k и чем ближе c_* к c_t . Пусть $\Lambda^1(t)$ — полоса на плоскости y_1, y_2 , составленная из прямых, проходящих через множество $W_{c^*}(t)$ и параллельных вектору $D(t)$. Нетрудно видеть, что линия $S^1(t)$ делит эту полосу на две части: ту, куда направлен вектор $D(t)$, назовем $\Lambda_-^1(t)$, противоположную — $\Lambda_+^1(t)$. Выполним приведенные выше построения для каждого момента $t \in [t_0, \vartheta]$. Тогда оптимальная универсальная стратегия первого игрока в игре (1) определяется соотношением

$$U^0(t, x) = \begin{cases} -\mu : X_{1,2}(\vartheta, t) x \in \Lambda_-^1(t), \\ \mu : X_{1,2}(\vartheta, t) x \in \Lambda_+^1(t), \\ u_t : X_{1,2}(\vartheta, t) x \in S^1(t), \end{cases}$$

где u_t — произвольное число из отрезка $[-\mu, \mu]$. Отметим, что размер полосы $\Lambda^1(t)$ зависит от числа c^* , которое нужно выбрать так, чтобы для любого возможного начального условия x_0 , из которого в момент t_0 будет начинаться игра, выполнялось бы соотношение

$$X_{1,2}(\vartheta, t_0) x_0 \in W_{c^*}(t_0).$$

В этом случае, в силу оптимальности стратегии U^0 , для любой реализации $v[\cdot]$ управления второго игрока будет поддерживаться включение

$$X_{1,2}(\vartheta, t) x(t, t_0, x_0, U^0, v[\cdot]) \in W_{c^*}(t) \subset \Lambda^1(t),$$

и позиция $(t, x(t, t_0, x_0, U^0, v[\cdot]))$ не выйдет из области определения функции U^0 .

§ 5. Управляющий параметр v второго игрока в системе (1), как и управляющий параметр u первого игрока, является скаляром. Поэтому, заменив вектор $D(t)$ вектором $-E(t)$, для каждого момента $t \in [t_0, \vartheta]$ можно построить линию $S^2(t)$, аналогичную $S^1(t)$, а также полосу $\Lambda^2(t)$ и полуполосы $\Lambda_-^2(t)$, $\Lambda_+^2(t)$. Оптимальная универсальная стратегия второго игрока в игре (1) задается формулой

$$V^0(t, x) = \begin{cases} -v : X_{1,2}(\vartheta, t) x \in \Lambda_-^2(t), \\ v : X_{1,2}(\vartheta, t) x \in \Lambda_+^2(t), \\ v_t : X_{1,2}(\vartheta, t) x \in S^2(t), \end{cases}$$

где v_t — одно из чисел v , $-v$. Стратегия V^0 определена аналогично стратегии U^0 , но в отличие от нее не является устойчивой. А именно, при неточном измерении позиции вблизи поверхности S^2 может возникнуть скользящий режим, при котором управление второго игрока будет поочередно меняться с v на $-v$. Это эквивалентно движению по поверхности S^2 с некоторым промежуточным управлением второго игрока. Стратегия же V^0 гарантирует оптимальный для второго игрока результат, если на поверхности S^2 он выбирает одно из крайних значений управления. Однако для того, чтобы осуществился скользящий режим вблизи поверхности S^2 с уменьшением цены игры, первый игрок должен искусно подыгрывать в данной ситуации. Пренебрегая такой возможностью, стратегию V^0 можно считать практически устойчивой. Таким образом, оптимальные универсальные стратегии первого и второго игрока в игре (1) определяются посредством линий переключения:

$$S^1(t), S^2(t), t \in [t_0, \vartheta].$$

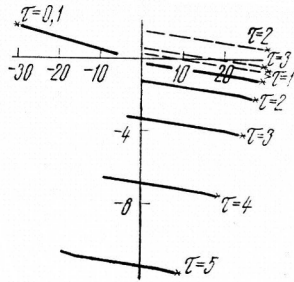


Рис. 8.

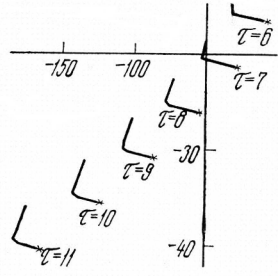


Рис. 9.

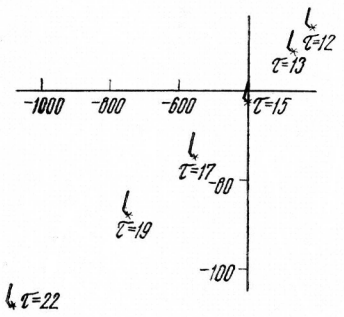


Рис. 10.

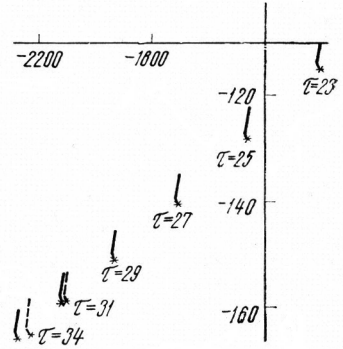


Рис. 11.

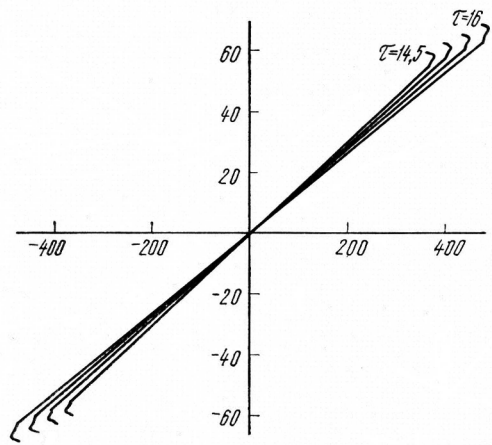


Рис. 12.

На рис. 6 и 7 показана качественная картина изменения во времени линий переключения первого и второго игроков в задаче о разбеге самолета и указаны знаки оптимальных управлений. На рис. 8—11 изображены линии переключения, просчитанные на ЭВМ. Для каждой линии переключения $S^1(t)$ первого игрока показана лишь ее часть, образованная точками a_1, a_2, \dots, a_k , поскольку другая часть (точки b_1, b_2, \dots, b_k) симметрична первой относительно начала координат. Линии переключения первого игрока изображены сплошной линией, второго игрока — штриховой. Для каждой линии указан момент обратного времени $\tau = \theta - t$, которому она соответствует, и звездочкой отмечена точка a_k , отвечающая максимальному значению параметра c , равному c^* . Во многих случаях на этих рисунках сплошная линия совмещена с штриховой, и последняя не видна. Для построения линий переключения, показанных на рис. 8—11, использовали значения c_i , равные 0,995; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,8; 2. Таким образом, $c_* = 0,995$; $c^* = 2$; $k = 9$. Рис. 8 показывает изменение линий переключения игроков при $\tau \in [0, 1; 5]$; рис. 9 соответствует промежутку $[6, 11]$; рис. 10 — промежутку $[12, 22]$; рис. 11 — промежутку $[23, 34]$. Из этих рисунков видно, что линии переключения обоих игроков устроены достаточно просто и могут быть хорошо приближены прямыми. Кроме того, на достаточно большом временном интервале линии переключения первого и второго игроков совпадают (в этих случаях штриховых не видно). На рис. 12 показаны линии переключения для моментов $\tau = 14,5; 15; 15,5; 16$, причем нарисованы обе симметричные части линий.

§ 6. При моделировании движений системы (1) в качестве начальной позиции была выбрана пара (t_0, x_0) , где $t_0 = 1$, $x_0 = (0; 0; 0; 0; 0)$. Для этой начальной позиции цена игры $\Gamma(t_0, x_0)$ равна 0,995. За первого игрока использовали стратегии U^0 и U^* , где U^0 — оптимальная универсальная стратегия, определяемая поверхностью переключения, а стратегия U^* задана соотношением

$$U^*(t, x) = \begin{cases} -\mu : l(x) < -\mu, \\ l(x) : |l(x)| \leq \mu, \\ \mu : l(x) > \mu. \end{cases}$$

	V^0	V^k	$v \equiv 17$	$v_{с.л}$
U^0	1,24	1,29	0,85	0,74
U^*	1,68	2,38	0,20	0,73

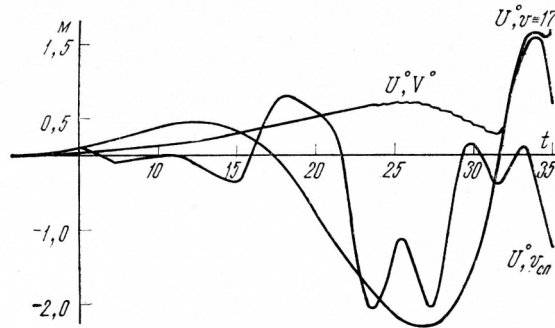


Рис. 13.

Здесь $l(x) = 3x_1 - 14x_4 + x_6$, а переменная x_6 удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}_6 = -0,1x_6 + 2x_2 - 14x_4.$$

За второго игрока помимо стратегии управления при помощи поверхности переключения использовался способ V^k [4], формирующий по принципу обратной связи кусочно-программное управление и гарантирующий так же, как и стратегия V^0 , оптимальный результат. Неоптимальные способы управления второго игрока представлены постоянным управлением $v = 17$ и случайным управлением $v_{сл}$. Оно формировалось посредством датчика случайных чисел, дающего равномерное распределение на отрезке $[-17, 17]$. Шаг выбора игроками управлений равен $0,1$ с, лишь для $v_{сл}$ второй игрок использует шаг, равный 2 с. Графики зависимости первой координаты $x_1(t)$ фазового вектора от времени при различных комбинациях законов управления игроков приведены на рис. 13, 14. В таблице указаны значения терминального показателя σ для различных комбинаций стратегий игроков. Графики (см. рис. 13, 14) показывают, что как при

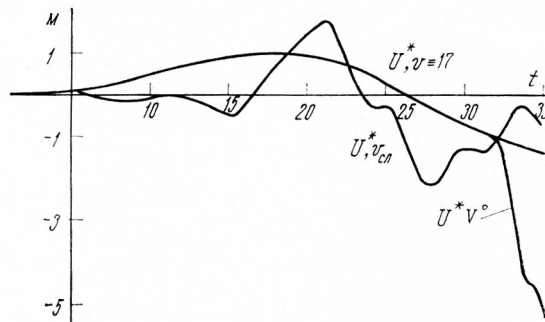


Рис. 14.

оптимальном законе U^0 , так и при линейном U^* самолет на всем протяжении процесса разбега не выкатывается за пределы ВПП. Хорошо видно, что стратегия U^0 гарантирует первому игроку значение показателя качества, приблизительно равное цене игры в позиции (t_0, x_0) . То же можно сказать о стратегиях V^0 и V^k по отношению ко второму игроку. Видно, что стратегия U^* , моделирующая действующий в системах директорного управления линейный закон, дает хороший результат даже при самом неблагоприятном ветровом возмущении. Таким образом, ограничение на силу бокового ветра, принятое в данной работе и регламентирующее в настоящее время допустимость выполнения взлета, выбрано с достаточным запасом. Тот факт, что линейный закон управления обеспечивает хороший результат, является специфичным для данной задачи. В задачах управления самолетом на этапе захода на посадку [1] линейные законы управления в сочетании с оптимальными игровыми способами формирования возмущений дают неприемлемый результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боткин Н. Д., Кейн В. М., Пацко В. С. Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке.—ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 560—567.
2. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре.—Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1983, № 4, с. 78—85.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Позиционное управление второго игрока в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания / М. А. Зарх, В. С. Пацко; Ин-т матем. и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1985. 84 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 01.08.85, № 5756-85 Деп.
5. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. II.—Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4, с. 764—766.
6. Системы цифрового управления самолетом / Под ред. А. Д. Александрова, С. М. Федорова. М.: Машиностроение, 1983. 223 с.
7. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
8. Субботина Н. Н. Универсальные оптимальные стратегии в дифференциальных играх.—Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 11, с. 1890—1896.
9. Универсальная оптимальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре / М. А. Зарх; Уральск. гос. ун-т им. А. М. Горького. Свердловск, 1985. 35 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 25.10.85, № 7438-В-85 Деп.
10. Алгоритмы и программа решения линейных дифференциальных игр (материалы по математическому обеспечению ЭВМ). Свердловск, 1984. 295 с.