

АКАДЕМИЯ НАУК СССР · УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

---

УПРАВЛЕНИЕ  
В ДИНАМИЧЕСКИХ  
СИСТЕМАХ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

СВЕРДЛОВСК 1990

---

УДК 519.9

**Управление в динамических системах:** Сб. науч. трудов.  
Свердловск, 1990.

В рамках теории дифференциальных игр исследованы задачи позиционного управления динамическими системами, подверженными воздействию помех. Основное внимание уделено изучению свойств стабильных мостов, функций цены и разработке алгоритмов их построения. Рассмотрены также вопросы, сопряженные с задачами управления.

Сборник рассчитан на специалистов в области теории оптимального управления и ее приложений.

Ответственные редакторы

доктор физико-математических наук **А. И. Субботин**,  
кандидат физико-математических наук **В. Н. Ушаков**

Рецензент

доктор физико-математических наук **Э. Г. Альбрехт**

У  $\frac{20204-1605-79(88)}{055(02)7}$  1990

© УрО АН СССР, 1990

*В. М. КЕИН, В. С. ПАЦКО, В. Л. ТУРОВА*

### **ЗАДАЧА О ПОСАДКЕ САМОЛЕТА В УСЛОВИЯХ СДВИГА ВЕТРА**

Традиционные способы управления самолетом на посадке плохо работают в условиях резкого изменения скорости (сдвига) ветра. В то же время сдвиг ветра — не настолько редкое явление, чтобы пренебрегать им. Статья посвящена минимаксному способу управления на посадке, ориентированному прежде всего на работу в условиях экстремального изменения скорости ветра. Способ основан на методах теории антагонистических дифференциальных игр двух лиц [10, 13]. Применение методов теории дифференциальных игр к задаче посадки изучалось в [2, 8, 9, 14].

В статье процесс посадки исследуется применительно к среднему транспортному самолету и рассматривается до момента пролета торца взлетно-посадочной полосы (ВПП). Результаты моделирования относятся к случаю, когда сдвиг ветра обусловлен прохождением самолета через зону микровзрыва [15—18]. Микровзрыв образуется за счет нисходящего потока воздуха, который ударяется о поверхность земли и растекается затем с образованием вихря. Математическая модель микровзрыва взята из [16] и реализована в виде программы для ЭВМ студентами УрГУ А. Г. Ивановым и Е. А. Рязанцевой.

Минимаксный способ в чистом виде — жесткий способ управления, поскольку при нем рулевые органы работают на ограничениях. В этом его недостаток по сравнению с принятыми в настоящее время методами управления на посадке. Разумное сочетание минимаксного и традиционного способов управления обсуждается в ст. Н. Д. Боткина, С. П. Жукова, А. И. Красова в наст. сб.

#### **§ 1. Математическая модель управляемого движения**

**Нелинейные дифференциальные уравнения движения самолета на посадке.** Движение самолета описывается системой дифференциальных уравнений 12-го порядка [5, 11, 12]:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_g &= V_{gxg}; \\
\dot{V}_{gxg} &= [(P - qSc_x) \cos \psi \cos \theta + (0,03P + qSc_y) \times \\
&\quad \times (\sin \psi \sin \gamma - \cos \gamma \cos \psi \sin \theta) + \\
&\quad + qSc_z (\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \theta \sin \gamma)]/m; \\
\dot{y}_g &= V_{gyg}; \\
\dot{V}_{gyg} &= [(P - qSc_x) \sin \theta + (0,03P + qSc_y) \times \\
&\quad \times \cos \theta \cos \gamma - qSc_z \cos \theta \sin \gamma]/m - g; \\
\dot{z}_g &= V_{gzg}; \\
\dot{V}_{gzg} &= [(P - qSc_x) (-\sin \psi \cos \theta) + (0,03P + qSc_y) \times \\
&\quad \times (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \theta \cos \gamma) + \\
&\quad + qSc_z (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \theta \sin \gamma)]/m; \\
\dot{\theta} &= \omega_z \cos \gamma + \omega_y \sin \gamma; \\
\dot{\omega}_z &= [I_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2) - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y]/I_z + M_z/I_z; \\
\dot{\psi} &= (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma)/\cos \theta; \\
\dot{\omega}_y &= [(I_y - I_z) I_{xy} \omega_y + (I_z - I_x) I_{xy} \omega_x] \omega_z/I^2 + \\
&\quad + (I_x M_y + I_{xy} M_x)/I^2 + \omega_z I_{xy} \times \\
&\quad \times (I_x \omega_y - I_{xy} \omega_x)/I^2; \\
\dot{\gamma} &= \omega_x - (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \operatorname{tg} \theta; \\
\dot{\omega}_x &= [(I_y - I_z) I_y \omega_y + (I_z - I_x) I_{xy} \omega_x] \omega_z/I^2 + \\
&\quad + (I_y M_x + I_{xy} M_y)/I^2 + I_{xy} \omega_z \times \\
&\quad \times (I_{xy} \omega_y - I_y \omega_x)/I^2.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $x_g, y_g, z_g$  — положение центра масс в нормальной земной системе координат (рис. 1);  $\theta, \psi, \gamma$  — углы тангажа, рыскания и крена;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — угловые скорости вращения относительно осей связанной системы координат;  $q = \rho V^2/2$  — скоростной напор;  $\rho$  — плотность воздуха;  $V$  — модуль воздушной скорости;  $S$  — площадь крыла;  $I_x, I_y, I_z, I_{xy}$  — моменты инерции;  $I^2 = I_y I_x - I_{xy}^2$ ;  $M_x = q S l m_x, M_y = q S l m_y, M_z = q S b_a m_z$  — моменты силы;  $l$  — размах крыла;  $b_a$  — средняя аэродинамическая хорда;  $c_x, c_y, c_z, m_x, m_y, m_z$  — аэродинамические коэффициенты сил и моментов (в связанной системе координат);  $m$  — масса самолета;  $g$  — ускорение свободного падения; 0,03 — синус угла установки двигателей. Управление самолетом осуществляется за счет изменения силы тяги  $P$ , отклонения элеронов  $\delta_a$ , рулей направления  $\delta_n$  и высоты  $\delta_b$ . Величины  $\delta_a, \delta_n, \delta_b$  входят в аэродинамические коэффициенты.

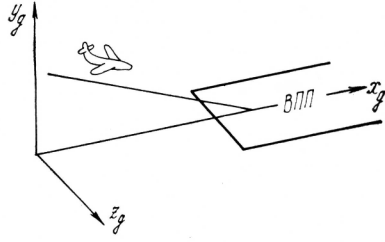


Рис. 1.

Ветровое возмущение, задаваемое по осям  $x_g, y_g, z_g$ , влияет на компоненты  $V_{x_g}, V_{y_g}, V_{z_g}$  вектора воздушной скорости:

$$V_{x_g} = V_{gx_g} - W_{x_g}, \quad V_{y_g} = V_{gy_g} - W_{y_g}, \quad V_{z_g} = V_{gz_g} - W_{z_g}.$$

Аэродинамические коэффициенты зависят от угла атаки  $\alpha$  и угла скольжения  $\beta$ . Приведем формулы для этих углов:

$$\alpha = \arcsin \{ [-V_{x_g} (\sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \theta \cos \gamma) - V_{y_g} \cos \theta \cos \gamma - V_{z_g} (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \theta \cos \gamma)] / V \cos \beta \};$$

$$\beta = \arcsin \{ [V_{x_g} (\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \theta \sin \gamma) - V_{y_g} \cos \theta \sin \gamma + V_{z_g} (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \theta \sin \gamma)] / V \}.$$

В расчетах использовались следующие численные значения:  $m = 75 \cdot 10^3$  кг;  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $\rho = 1,207$  кг/м<sup>3</sup>;  $S = 201$  м<sup>2</sup>;  $l = 37,55$  м;  $b_a = 5,285$  м;  $I_x = 2,5 \cdot 10^6$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_y = 7,5 \cdot 10^6$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_z = 6,5 \cdot 10^6$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{xy} = 0,5 \cdot 10^6$  кг·м<sup>2</sup>.

**Аэродинамические коэффициенты.** В системе (1.1) коэффициенты  $c_x, c_y, c_z$  следует брать в связанной системе координат. Соответствующие коэффициенты в полусвязанной системе обозначим  $c_{px}, c_{py}, c_{pz}$ . Имеем [12]

$$c_x = c_{px} \cos \alpha - c_{py} \sin \alpha, \quad c_y = c_{py} \cos \alpha + c_{px} \sin \alpha, \quad c_z = c_{pz}.$$

Выражения для  $c_{px}, c_{py}, c_{pz}$  возьмем в виде

$$c_{px} = 0,21 + 0,004\alpha + 0,47 \cdot 10^{-3}\alpha^2;$$

$$c_{py} = 0,65 + 0,09\alpha + 0,003\delta_B;$$

$$c_{pz} = -0,0115\beta - (0,0034 - 6 \cdot 10^{-5}\alpha) \delta_H.$$

Здесь и ниже угловые величины берутся в градусах.

Коэффициенты  $m_x, m_y, m_z$  определяются соотношениями

$$m_x = m_x^{\beta\beta} + m_x^{\delta_H\delta_H} + m_x^{\delta_\beta\delta_\beta} + \frac{l\pi}{2V \cdot 180} (m_x^{\bar{\omega}_y\omega_y} + m_x^{\bar{\omega}_x\omega_x});$$

$$m_x^{\beta\beta} = -(0,0035 + 0,0001\alpha) \text{ град}^{-1};$$

$$m_x^{\delta_H\delta_H} = -(0,0005 - 0,00003\alpha) \text{ град}^{-1};$$

$$m_x^{\delta_\beta\delta_\beta} = -0,0004 \text{ град}^{-1};$$

$$m_x^{\bar{\omega}_x\omega_x} = -(0,61 - 0,004\alpha);$$

$$\begin{aligned}
m_x^{\bar{\omega}y} &= -(0,3 + 0,012\alpha); \\
m_y &= m_y^{\beta\beta} + m_y^{\delta_n\delta_n} + m_y^{\delta_3\delta_3} + \frac{l\pi}{2V \cdot 180} (m_y^{\bar{\omega}y}\omega_y + m_y^{\bar{\omega}x}\omega_x); \\
m_y^{\beta} &= -(0,004 + 0,00005\alpha) \text{ град}^{-1}; \\
m_y^{\delta_n} &= -(0,00135 - 0,000015\alpha) \text{ град}^{-1}; \\
m_y^{\delta_3} &= 0, \quad m_y^{\bar{\omega}y} = -(0,21 + 0,005\alpha); \\
m_y^{\bar{\omega}x} &= 0,015\alpha; \\
m_z &= 0,033 - 0,017\alpha - 0,013\delta_B - \\
&\quad - 0,047\delta_{ct} - 1,29\omega_z/V.
\end{aligned}$$

В последнем выражении величина  $\delta_{ct}$  задается по номиналу и в процессе движения не меняется.

**Учет инерционности исполнительных органов. Полная нелинейная система.** Будем считать, что изменение силы тяги подчиняется уравнению

$$\dot{P} = -k_p P + k_{\delta_p} (\delta_{p3} + \delta_{p*}); \quad (1.2)$$

$$k_p = 1 \text{ с}^{-1}, \quad k_{\delta_p} = 3538 \text{ н} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}, \quad \delta_{p*} = -41,3^\circ, \quad 47^\circ \leq \delta_{p3} \leq 112^\circ. \quad (1.3)$$

Здесь  $\delta_{p3}$  — «заданное» положение органа управления силой тяги. Подставляя в правую часть уравнения (1.2) крайние значения  $\delta_{p3} = 47^\circ$  и  $\delta_{p3} = 112^\circ$ , получаем обнуление ее соответственно при  $P \approx 2 \cdot 10^4 \text{ Н}$  и  $P \approx 25 \cdot 10^4 \text{ Н}$ . Таким образом, если начальное значение  $P$  лежит в промежутке  $[2 \cdot 10^4, 25 \cdot 10^4]$ , то оно остается в нем и в дальнейшем.

Перейдем от фазовой переменной  $P$  к переменной  $P/m$ . Уравнение (1.2) заменим соотношением

$$\frac{\dot{P}}{m} = -k_p \frac{P}{m} + \frac{k_{\delta_p}}{m} (\delta_{p3} + \delta_{p*}). \quad (1.4)$$

Динамику рулевых приводов опишем уравнениями

$$\dot{\delta}_B = k_B (\delta_{B3} - \delta_B), \quad \dot{\delta}_H = k_H (\delta_{H3} - \delta_H), \quad \dot{\delta}_3 = k_3 (\delta_{33} - \delta_3), \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
k_B = k_H = k_3 &= 4 \text{ с}^{-1}; \\
|\delta_{B3}| \leq 10^\circ, \quad |\delta_{H3}| \leq 10^\circ, \quad |\delta_{33}| \leq 10^\circ. & \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Величины  $\delta_{B3}$ ,  $\delta_{H3}$ ,  $\delta_{33}$  — «заданные» управляющие воздействия.

Уравнения (1.4), (1.5) подсоединим к основной системе (1.1). Полученную систему дифференциальных уравнений запишем в векторной форме

$$\dot{\xi} = f(\xi, \delta_3, W), \quad (1.7)$$

где  $\delta_z = (\delta_{pz}, \delta_{vz}, \delta_{nz}, \delta_{\varepsilon z})'$ ;  $W = (W_{xg}, W_{yg}, W_{zg})'$  — векторные параметры управления и помехи. Управляющие воздействия  $\delta_{pz}$ ,  $\delta_{vz}$ ,  $\delta_{nz}$ ,  $\delta_{\varepsilon z}$  ограничены сверху и снизу. Ограничения задаются формулами (1.3), (1.6).

## § 2. Минимаксный способ управления

Номинальное движение самолета на этапе посадки до момента пролета торца ВПП представляет собой равномерное движение (без вращения) по прямолинейной глассаде снижения. Задача управления состоит в том, чтобы реальное движение, проходящее в условиях ветрового возмущения, не слишком сильно отличалось от номинального. Желательно также, чтобы закон управления не требовал для своей реализации какой-либо точной и детализированной информации о ветровой помехе. В данной работе считаем, что нам приближенно могут быть известны лишь «грубые» характеристики ветрового возмущения, а именно пределы возможных отклонений компонент  $W_{xg}$ ,  $W_{yg}$ ,  $W_{zg}$ , скорости ветра относительно некоторых «средних» значений  $W_{xg0}$ ,  $W_{yg0}$ ,  $W_{zg0}$  и сами эти значения. Могут быть также заданы некоторые показатели инерционности изменения скорости ветра. Естественна минимаксная постановка задачи управления, когда управление формируется по принципу обратной связи и гарантирует определенное качество процесса при любой реализации помехи из заданного класса. Оптимален закон, обеспечивающий наилучшую гарантию. Поскольку поведение самолета описывается дифференциальными уравнениями, мы имеем дело с дифференциальной игрой.

В настоящее время разработаны эффективные программы [1, 4, 7, 8], позволяющие находить оптимальные законы управления (стратегии) для линейных дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания и выпуклой функцией платы, зависящей от двух координат фазового вектора. Система (1.7) нелинейна. Однако мы можем линеаризовать ее относительно номинального движения, поставить вспомогательные линейные задачи и использовать затем их решение в исходной нелинейной системе (1.7).

Итак, задав предполагаемые средние составляющие скорости ветра  $W_{xg0}$ ,  $W_{yg0}$ ,  $W_{zg0}$ , угол наклона глассады и величину номинала модуля воздушной скорости, вычислим соответствующие номинальному движению значения фазовых переменных системы (1.7) и величин, входящих в нее. Линеаризуя систему (1.7) относительно номинального движения, приходим к линейной управляемой системе [12], распадающейся на две подсистемы продольного и бокового каналов. Если  $W_{zg0} = 0$ , то распадение строгое, при  $W_{zg0} \neq 0$  между подсистемами есть зависимость, но она мала и ею можно пренебречь.

В подсистему продольного канала в качестве фазовых переменных входят отклонения  $\Delta x_g, \Delta y_g$ , их скорости, отклонения по углу тангажа  $\theta$  и угловой скорости  $\omega_z$ , а также отклонения силы тяги  $\Delta P$  и руля высоты  $\Delta \delta_b$ . Фазовыми переменными в подсистеме бокового канала являются боковое отклонение  $\Delta z_g$ , его скорость, отклонения углов рыскания  $\psi$  и крена  $\gamma$ , угловых скоростей  $\omega_x$  и  $\omega_y$ , а также отклонения положения элеронов  $\Delta \delta_\psi$  и руля направления  $\Delta \delta_H$ . Управляющие воздействия:  $\Delta \delta_{рз}$  и  $\Delta \delta_{вз}$  — в продольном канале,  $\Delta \delta_{нз}$  и  $\Delta \delta_{аз}$  — в боковом. Воздействия помехи:  $\Delta W_{xg}, \Delta W_{yg}$  и соответственно  $\Delta W_{zg}$ .

Если известны какие-либо свойства, характеризующие инерционность изменения скорости ветра вдоль движения, их можно учесть, подчинив переменные  $\Delta W_{xg}, \Delta W_{yg}, \Delta W_{zg}$  дополнительным линейным дифференциальным уравнениям, например:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{W}_{xg} &= k_1 (\Delta \bar{W}_{xg} - \Delta W_{xg}), \\ \Delta \dot{\bar{W}}_{xg} &= k_2 (\omega_{xg} - \Delta \bar{W}_{xg}).\end{aligned}$$

Здесь новой независимой переменной является  $\omega_{xg}$ , константы  $k_1, k_2$  регулируют инерционность изменения  $\Delta W_{xg}$ . Аналогичные уравнения введем для  $\Delta W_{yg}$  и  $\Delta W_{zg}$ . Переменные  $\omega_{xg}, \omega_{yg}, \omega_{zg}$  трактуем как воздействия помехи, они выбираются в оговоренных пределах. Уравнения, определяющие  $\Delta W_{xg}$  и  $\Delta W_{yg}$ , относим к продольному каналу, уравнения для  $\Delta W_{zg}$  — к боковому.

Описав динамику продольного и бокового каналов при помощи линейных систем, поставим для каждого из них вспомогательную дифференциальную игру с фиксированным моментом окончания  $T$ , геометрическими ограничениями на управляющие воздействия и воздействия помехи, выпуклой функцией платы, зависящей от двух координат фазового вектора в момент  $T$ . В продольном канале за такие координаты возьмем  $\Delta y_g$  и  $\Delta \dot{y}_g = \Delta V_{gyg}$ , в боковом  $\Delta z_g$  и  $\Delta \dot{z}_g = \Delta V_{gzg}$ . Первый игрок, распоряжающийся управляющими воздействиями, минимизирует значения функции платы, второй, в ведении которого воздействия помехи, максимизирует. Подчеркнем, что в рамках вспомогательных задач мы можем не придавать моменту  $T$  какого-либо физического смысла.

Решая вспомогательные задачи на ЭВМ, находим оптимальные для них законы формирования управляющих воздействий. Они реализуются при помощи наборов линий переключения [3, 4, 7, 8]. Каждый набор соответствует определенному управляющему воздействию и задан на сетке моментов  $\tau_i$  обратного времени, отсчитываемого от момента  $T$ . Наборы линий переключения для  $\Delta \delta_{вз}, \Delta \delta_{аз}$  и определяют нужный нам способ управления по компонентам  $\delta_{вз}, \delta_{аз}$  в исходной системе (1.7).



При работе с ним делается текущий прогноз времени, оставшегося до момента пролета торца ВПП. Соответственно прогнозу используются вполне определенные линии переключения для выбора  $\delta_{вз}$  и  $\delta_{рз}$ . Тем самым при помощи воздействий  $\delta_{вз}$  и  $\delta_{рз}$  мы стремимся управлять системой (1.7) так, чтобы в момент пролета торца ВПП получить «возможно меньшие» отклонения координат  $y_g, \dot{y}_g = V_{gy_g}, z_g, \dot{z}_g = V_{gz_g}$  от номинала.

Поскольку воздействия  $\delta_{рз}$  и  $\delta_{вз}$  на этапе посадки имеют специфическое назначение (стабилизация воздушной скорости и поддержание вблизи нуля величины угла скольжения), то было бы неестественно задавать правило их выбора в системе (1.7) по аналогии с  $\delta_{вз}, \delta_{рз}$  из решения описанных вспомогательных задач. Условимся воздействия  $\delta_{рз}$  и  $\delta_{вз}$  вырабатывать на основе принятых в настоящее время законов.

Таким образом, говоря о минимаксном способе управления нелинейной системой (1.7), мы имеем в виду способ формирования управляющих воздействий  $\delta_{вз}$  и  $\delta_{рз}$ , найденный из решения вспомогательных линейных дифференциальных игр. Воздействия  $\delta_{рз}, \delta_{вз}$  при этом формируются традиционными методами. Априори трудно что-либо сказать в пользу минимаксного способа, как и любого другого, полученного из решения той или иной модельной оптимизационной математической задачи. Ответ может быть получен лишь в результате тщательного моделирования.

### § 3. Вспомогательные линейные дифференциальные игры

Система линейных дифференциальных уравнений продольного канала в векторной записи имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_*x + B_*u + C_*v, \quad x \in R^{12}; \\ u &= (\Delta\delta_{рз}, \Delta\delta_{вз})', \quad v = (\omega_{x_g}, \omega_{y_g})'. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Воздействия  $\Delta\delta_{рз}, \Delta\delta_{вз}$  принадлежат первому игроку,  $\omega_{x_g}$  и  $\omega_{y_g}$  — второму. Считаем их ограниченными по модулю:

$$\begin{aligned} |\Delta\delta_{рз}| &\leq \mu_p, \quad |\Delta\delta_{вз}| \leq \mu_v; \\ |\omega_{x_g}| &\leq v_{x_g}, \quad |\omega_{y_g}| \leq v_{y_g}. \end{aligned}$$

Введем функцию  $\varphi_*$ , зависящую от координат  $x_3 = \Delta y_g$  и  $x_4 = \Delta \dot{y}_g$ . Для этого рассмотрим на плоскости  $x_3, x_4$  выпуклый многоугольник  $M_*$ , симметричный относительно нуля. Положим

$$\varphi_*(x_3, x_4) = \min \{c \geq 0: (x_3, x_4)' \in cM_*\}.$$

Рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру с динамикой (3.1), фиксированным моментом окончания  $T$  и платой  $\varphi_*$ . Первый игрок минимизирует значения платы  $\varphi_*$  в мо-

мент  $T$ , второй максимизирует. Правило выбора  $\Delta\delta_{вз}$ , являющееся составным элементом оптимальной стратегии первого игрока в игре (3.1), будет использовано для задания  $\delta_{вз}$  в системе (1.7).

Систему линейных дифференциальных уравнений бокового канала запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^*x + B^*u + C^*v, \quad x \in R^{10}; \\ u &= (\Delta\delta_{нз}, \Delta\delta_{эз})', \quad v = \omega_{z_g}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Воздействия  $\Delta\delta_{нз}$ ,  $\Delta\delta_{эз}$  принадлежат первому игроку, параметр  $\omega_{z_g}$  — второму. Ограничения:

$$|\Delta\delta_{нз}| \leq \mu_n, \quad |\Delta\delta_{эз}| \leq \mu_\varepsilon, \quad |\omega_{z_g}| \leq v_{z_g}.$$

При помощи выпуклого многоугольника  $M^*$  на плоскости  $x_1 = \Delta z_g$ ,  $x_2 = \Delta \dot{z}_g$  введем функцию

$$\varphi^*(x_1, x_2) = \min \{c \geq 0: (x_1, x_2)' \in cM^*\}.$$

Рассмотрим дифференциальную игру с динамикой (3.2), фиксированным моментом окончания  $T$  и платой  $\varphi^*$ , значения которой минимизирует первый игрок и максимизирует второй. Правило выбора  $\Delta\delta_{эз}$ , являющееся составным элементом оптимальной стратегии первого игрока в игре (3.2), будет использовано для задания  $\delta_{эз}$  в системе (1.7). Множество  $M_*$  (соответственно  $M^*$ ) можно рассматривать как допуск на отклонения  $\Delta y_g$ ,  $\Delta \dot{y}_g$  ( $\Delta z_g$ ,  $\Delta \dot{z}_g$ ) в момент  $T$ . Функция  $\varphi_*(\varphi^*)$  показывает отклонение от допуска.

Для численного задания линейных систем (3.1), (3.2) были взяты следующие исходные данные: угол наклона глissады  $\Theta_0 = -2,66^\circ$ ; номинал модуля воздушной скорости  $V_0 = 72,2$  м/с; средние значения составляющих скорости ветра  $W_{x_{g0}} = -5$  м/с,  $W_{y_{g0}} = W_{z_{g0}} = 0$ . При таких данных углы атаки и тангажа на номинальном движении равны соответственно  $5,42^\circ$  и  $2,94^\circ$ , отношение силы тяги к массе самолета  $P_0/m = 1,66$  Н/кг. Нулевыми являются величины  $\gamma_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\omega_{x0}$ ,  $\omega_{y0}$ ,  $\omega_{z0}$ ,  $\delta_{в0}$ ,  $\delta_{н0}$ ,  $\delta_{э0}$  (и, следовательно,  $\delta_{вз0}$ ,  $\delta_{нз0}$ ,  $\delta_{эз0}$ ).

Численные значения матриц  $A_*$ ,  $B_*$ ,  $C_*$  для системы (3.1) и матриц  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  для системы (3.2) приведены в [3]. Значения  $\mu_p$ ,  $\mu_v$ ,  $\mu_n$ ,  $\mu_\varepsilon$ , определяющие ограничения на управляющие воздействия первого игрока, должны быть согласованы с ограничениями на управляющие воздействия в системе (1.7). Примем  $\mu_v = 10^\circ$ ,  $\mu_n = 10^\circ$ ,  $\mu_\varepsilon = 10^\circ$ . Величина  $\delta_{рз0} = 74,43^\circ$  не является серединой промежутка  $[47^\circ, 112^\circ]$ . В качестве  $\mu_p$  возьмем величину  $\delta_{рз0} - 47^\circ \approx 28^\circ$ .

Значения  $v_{x_g}$ ,  $v_{y_g}$ ,  $v_{z_g}$  определяют ограничения на ветровую помеху. Их выбор диктуется разумными соображениями о пределах возможных отклонений составляющих  $W_{x_g}$ ,  $W_{y_g}$ ,  $W_{z_g}$  от средних

значений. Положим  $v_{x_g} = 10$  м/с,  $v_{y_g} = 5$  м/с,  $v_{z_g} = 10$  м/с. Константы  $k_1, k_2$  в дополнительных уравнениях инерционности для  $\Delta W_{x_g}, \Delta W_{y_g}, \Delta W_{z_g}$  возьмем равными 0,5 и 3. В качестве  $M_*$  выберем выпуклый шестиугольник с вершинами  $(-3; 0), (-3; 1), (0; 1), (3; 0), (3; -1), (0; -1)$ . Вершины  $M^*$ :  $(-6; 0), (-6; 1,5), (0; 1,5), (0; 6), (6; -1,5), (0; -1,5)$ . Пусть  $T = 15$  с. Линии переключения, определяющие оптимальный выбор управляющих воздействий в системе (3.1) ((3.2)), строятся на плоскости фазовых переменных  $y_1, y_2$  эквивалентной [3, 8, 10, 13] дифференциальной игры второго порядка. Связь между векторами  $y = (y_1, y_2)'$  и  $x$  описывается формулой  $y(t) = X_*(T, t)x(t)$  ( $y(t) = X^*(T, t)x(t)$ ), где  $X_*(T, t)$  ( $X^*(T, t)$ ) — матрица из 3 и 4 (1 и 2) строк фундаментальной матрицы Коши однородной части системы (3.1) ((3.2)). Линии переключения зависят от  $t$ , но их структура проста и каждую можно достаточно хорошо аппроксимировать при помощи небольшого числа точек. На рис. 2 показаны линии переключения управляющего воздействия  $\Delta \delta_{\text{вз}}$ , просчитанные для моментов  $\tau = 11; 13; 15$  с обратного времени.

#### § 4. Модель микровзрыва

При моделировании движений системы (1.7) будем считать, что ветровое возмущение вызвано попаданием самолета в зону микровзрыва. В настоящее время имеется обширная литература, посвященная микровзрыву (см., например, [6, 16]). Используемая нами модель взята из [16]. Кратко опишем ее.

Стационарная стадия микровзрыва идеализируется в виде трехмерного осесимметричного вихревого поля, в котором выделяется тороидальная область («ядро»), где скорость ветра, начиная от нулевой в центре, линейно увеличивается по радиусу до границы ядра. Вне ядра вихревое поле задается функцией потока. Численное дифференцирование ее дает радиальную и вертикальную составляющие скорости ветра. Первая из них раскладывается затем на две компоненты параллельно и перпендикулярно оси ВПП. Микровзрыв задается тремя параметрами (рис. 3):  $VO$  — скорость ветра в центральной части;  $HO$  — высота центральной части;  $RO$  — радиус вихря. Радиус  $RC$  ядра вихря полагается равным  $0,8 HO$ . Для конкретизации расположения микровзрыва относительно глиссады снижения следует выбрать координаты его центра в горизонтальной плоскости.

#### § 5. Результаты моделирования

Пусть в момент  $t_*$  начальное положение системы (1.7) по оси  $x_g$  находится на расстоянии 8000 м от торца ВПП и значения всех фазовых координат соответствуют номинальному дви-

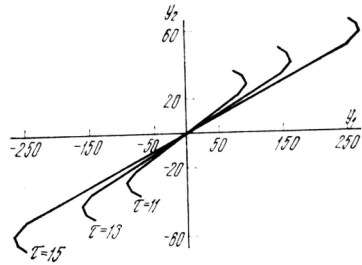


Рис. 2.

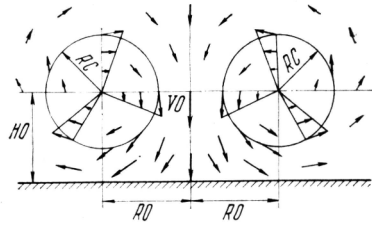


Рис. 3.

жению по глиссаде. Рассмотрим два способа управления. Способ  $I_d$  (действующий) использует алгоритмы формирования  $\delta_{рз}$ ,  $\delta_{вз}$ ,  $\delta_{нз}$ ,  $\delta_{эз}$ , принятые в настоящее время (см. указ. ст. Н. Д. Боткина, С. П. Жукова, А. И. Красова в наст. сб.). Вторым способом минимаксный (игровой). Обозначим его  $I_{и}$ . В способе  $I_{и}$  воздействия  $\delta_{вз}$ ,  $\delta_{эз}$  формируются при помощи линий переключения, взятых из решения задач (3.1) и (3.2), воздействия  $\delta_{рз}$ ,  $\delta_{нз}$  — при помощи принятых в настоящее время алгоритмов. Линии переключения для  $\delta_{вз}$ ,  $\delta_{эз}$  построены на сетке  $E$  моментов  $\tau_i$  промежутка  $[0, T] = [0, 15]$ . Применяем их в способе  $I_{и}$  следующим образом. Пусть  $d(t)$  — расстояние в момент  $t \geq t_*$  по оси  $x_g$  до торца ВПП,  $V_{gxg0}$  — скорость номинального движения по оси  $x_g$ . Тогда  $s(t) = d(t)/V_{gxg0}$  — прогноз времени до пролета торца ВПП. Пока  $s(t) \geq T = 15$  с для выбора  $\delta_{вз}$  ( $\delta_{эз}$ ) используем одну и ту же линию переключения, соответствующую  $\tau = T$ . Если  $s(t) < T$ , то берем линию, соответствующую моменту  $\tau_i$  из  $E$ , ближайшему к  $s(t)$ .

Компоненты  $W_{xg}$ ,  $W_{yg}$ ,  $W_{zg}$  скорости ветра подаем в систему (1.7) в виде  $W_{xg} = \Delta W_{xg} + W_{xg0}$ ,  $W_{yg} = \Delta W_{yg} + W_{yg0}$ ,  $W_{zg} = \Delta W_{zg} + W_{zg0}$ . Отклонения  $\Delta W_{xg}$ ,  $\Delta W_{yg}$ ,  $\Delta W_{zg}$  берем с модели микровзрыва;  $W_{xg0} = -5$  м/с,  $W_{yg0} = W_{zg0} = 0$ . Параметры микровзрыва:  $VO = 7$  м/с,  $HO = 600$  м,  $RO = 1200$  м. Просчитанное на ЭВМ распределение скорости ветра в вертикальной плоскости, проходящей через центр микровзрыва, показано на рис. 4. Рассмотрим два варианта расположения центра микровзрыва в горизонтальной плоскости: А) смещение  $Dx$  по оси  $x_g$  от начального положения самолета равно 5000 м (3000 м от торца ВПП), смещение  $Dz$  по оси  $z_g$  перпендикулярно оси ВПП составляет 500 м; Б)  $Dx = 5000$  м,  $Dz = 1500$  м. На рис. 5 приведены графики изменения вертикального  $\Delta y_g$  и бокового  $\Delta z_g$  отклонений системы (1.7) от номинала вдоль движения для способов управления  $I_{и}$ ,  $I_d$ , а также реализации компонент скорости ветра. Последние отвечают способу  $I_{и}$ , для способа  $I_d$  они практически те же самые. По горизонтали откладывается расстояние, пройденное по оси  $x_g$ . Рис. 5 соответствует

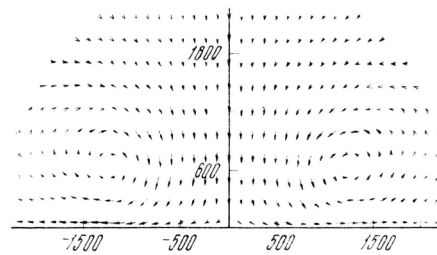


Рис. 4.

первому (А) и второму (Б) варианту расположения центра микровзрыва. Шаг выбора управления и помехи при моделировании равен 0,1 с. Видно, что в целом результаты для минимаксного способа  $I_{\text{н}}$  лучше, чем для традиционного способа  $I_{\text{д}}$ . Относительно  $\Delta z_g$  это проявляется как в величине максимального отклонения, так

и в характере переходного колебательного процесса. Максимальные отклонения по  $\Delta y_g$  для способов  $I_{\text{н}}$ ,  $I_{\text{д}}$  отличаются незначительно, однако характер переходного процесса для способа  $I_{\text{н}}$  лучше.

В заключение еще раз подчеркнем, что для расчета минимаксного способа управления не требуется каких-либо точных сведений о пространственном расположении зоны экстремальных ветровых возмущений и тем более сведений о распределении скорости ветра в такой зоне. Достаточно задать примерный размах колебаний скорости ветра. В этом состоит принципиальное отличие подхода, основанного на теории дифференциальных игр, от методов, где указанная информация существенна [17, 18].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр: Мат-лы по математ. обеспечению ЭВМ. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984.
2. Боткин Н. Д., Кейн В. М., Пацко В. С. Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке // ПММ. 1984. Т. 48, вып. 4. С. 560—567.
3. Боткин Н. Д., Кейн В. М., Пацко В. С. Применение методов теории дифференциальных игр к задаче управления самолетом на посадке // Позиционное управление с гарантированным результатом. Свердловск, 1988. С. 33—44.
4. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 4. С. 78—85.
5. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983.
6. Дитенбергер М. А., Хейнс П. А., Луэрс Дж. К. Реконструкция условий авиакатастрофы в Новом Орлеане // Аэрокосмическая техника. 1986. № 5. С. 3—15.
7. Зарх М. А., Пацко В. С. Построение управления второго игрока в линейной дифференциальной игре на основе свойства отталкивания // Управление с гарантированным результатом. Свердловск, 1987. С. 37—70.
8. Кейн В. М., Париков А. Н., Смуров М. Ю. Об одном способе оптимального управления по методу экстремального прицеливания // ПММ. 1980. Т. 44, вып. 3. С. 434—440.

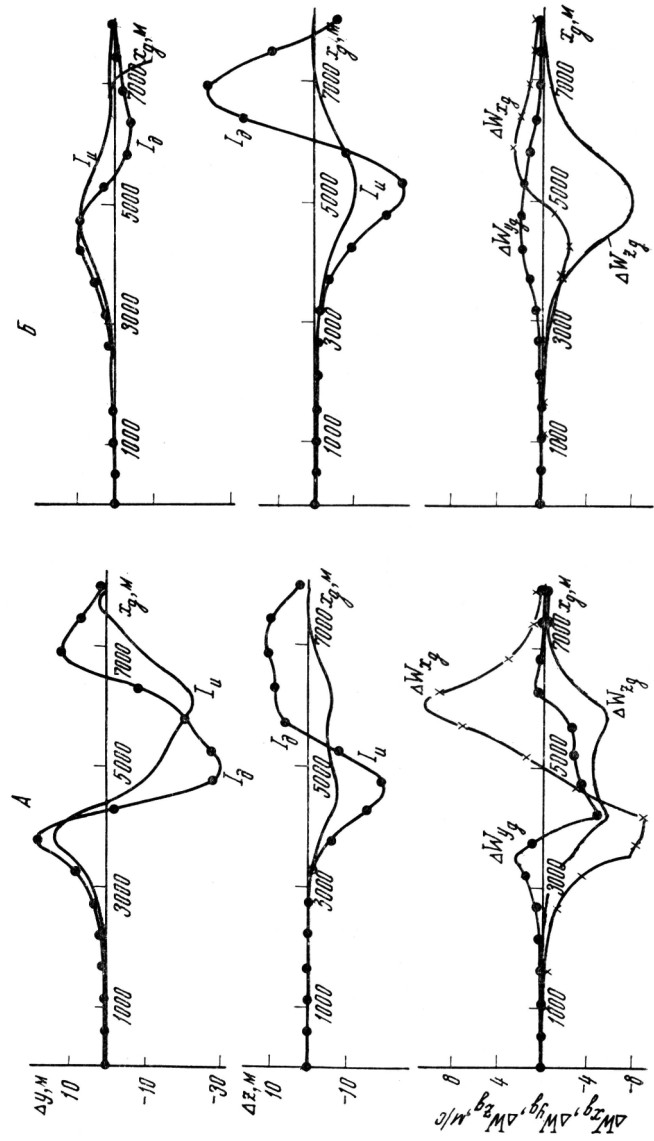


Рис. 5.

9. Корнеев В. А., Меликян А. А., Титовский И. Н. Стабилизация глиссады самолета при ветровых возмущениях в минимаксной постановке // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 3. С. 132—139.
10. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
11. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969.
12. Системы цифрового управления самолетом / Под ред. А. Д. Александрова, С. М. Федорова. М.: Машиностроение, 1983.
13. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
14. Титовский И. Н. Игровой подход к задаче синтеза управления самолетом при заходе на посадку // Уч. зап. ЦАГИ. 1981. Т. 12, № 1. С. 85—92.
15. Dole C. E. Flight theory and aerodynamics. N. Y.: Wiley, 1981.
16. Ivan M. A ring-vortex downburst model for real time flight simulation of severe wind shears // AIAA Flight Simulation technolog. Conf. St. Louis, 1985. P. 57—61.
17. Miele A., Wang T., Melvin W. Optimal take-off trajectories in the presence of windshear // J. Opt. Theory and Appl. 1986. V. 49, № 1. P. 1—45.
18. Miele A., Wang T., Tzeng C. Y., Melvin W. W. Optimal abort landing trajectories in the presence of windshear // Ibid. 1987. V. 55, № 2. P. 165—202.