

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР
ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА

4

МОСКВА · 1983

УДК 62-50

ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

БОТКИН Н. Д., ПАЦКО В. С.

Введение. В задачах управления динамическими системами широко используется синтез оптимального закона управления, осуществляемый при помощи некоторых поверхностей. Так, если управление u — скалярное и стеснено ограничением $|u| \leq \mu$, то в ряде случаев удается построить оптимальный закон управления U^0 в виде: $U^0(t, x) = \mu$, если точка (t, x) (x — фазовая переменная) находится по одну сторону от некоторой поверхности H , и $U^0(t, x) = -\mu$, если по другую. Такой закон управления удобен тем, что, во-первых, он дает для любой начальной позиции (t_0, x_0) оптимальный результат, во-вторых, его часто удается реализовать в контуре управления, работающем в реальном масштабе времени. В антагонистических дифференциальных играх (а их можно трактовать как задачи управления с неопределенной помехой) также представляет интерес выделение случаев, когда оптимальные законы управления (стратегии) могут быть построены при помощи разделяющих поверхностей. В настоящей работе выделяется один класс дифференциальных игр, где такое построение возможно для оптимальной стратегии первого (распоряжающегося полезным управлением) игрока. Рекомендуемый в статье способ управления первого игрока является устойчивым по отношению к погрешностям счета, возникающим при численной реализации.

Рассматривается линейная антагонистическая дифференциальная игра двух лиц с фиксированным моментом окончания, выпуклой функцией платы и геометрическими ограничениями на управления игроков. Управление первого игрока, минимизирующего значения платы, предполагается скалярным. Игра формализуется согласно [1]. Указывается способ построения некоторой универсальной [1–3] позиционной стратегии первого игрока, которая при отсутствии погрешностей аппроксимации является оптимальной универсальной стратегией. Приводится оценка гарантии первого игрока, когда он использует описываемую стратегию с шагом Δ . Возможности численных построений демонстрируются на двух примерах, где стратегия первого игрока реализована при помощи ЭВМ. Статья замыкает к исследованиям [1–5].

1. Пусть динамика дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания θ описывается уравнением

$$\dot{y}(t) = B^{(1)}(t)u(t) + C^{(1)}(t)v(t), \quad |u(t)| \leq \mu, \quad v(t) \in Q^{(1)}. \quad (1.1)$$

Здесь $y(t) \in R^n$, $u(t)$ — управляющее воздействие первого игрока, $v(t)$ — второго, матричные функции $B^{(1)}$, $C^{(1)}$ кусочно-непрерывны. Управляющее воздействие первого игрока предполагается скалярным. Таким образом, $B^{(1)}(t)$ при любом t есть матрица-столбец. Управляющее воздействие второго игрока может иметь произвольную размерность, множество $Q^{(1)}$ есть компакт в соответствующем конечномерном пространстве. Пусть $\gamma^{(1)}: R^n \rightarrow R$ — выпуклая функция платы. Первый игрок минимизирует значения $\gamma^{(1)}(y(\theta))$, интересы второго противоположны. Фазовая переменная не входит в правую часть системы (1.1). В случае линейной диффе-

рещиальной игры с фиксированным моментом окончания этого всегда можно добиться известным преобразованием [4, 6]. Будем считать, что начальные моменты t_0 для игры (1.1) принадлежат некоторому промежутку $T = [\theta_1, \theta]$, где $\theta_1 < \theta$.

Наряду с игрой (1.1) рассмотрим еще одну дифференциальную игру

$$\dot{y}(t) = B^{(2)}(t)u(t) + C^{(2)}(t)v(t), \quad |u(t)| \leq \mu, \quad v(t) \in Q^{(2)} \quad (1.2)$$

с фиксированным моментом окончания θ . Игру (1.2) будем интерпретировать как удобную для вычислений на ЭВМ аппроксимацию игры (1.1). Здесь $y(t) \in R^n$, функции $B^{(2)}, C^{(2)}$ кусочно-непрерывны. Управляющее воздействие $u(t)$ первого игрока является скалярным, множество $Q^{(2)}$ — компакт в конечномерном пространстве. Функцию платы $\gamma^{(2)}: R^n \rightarrow R$ будем считать выпуклой, удовлетворяющей условию Липшица с константой λ и условию $\gamma^{(2)}(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$. Первый игрок минимизирует значения $\gamma^{(2)}(y(\theta))$, второй максимизирует. Условимся, что игры (1.1), (1.2) формализованы согласно [4].

Пусть липшицевы функции $B^{(3)}$ и Ω из T в R^n таковы, что $|\Omega(t)| = 1$ при всех $t \in T$ и $\Omega(t) = B^{(3)}(t) / |B^{(3)}(t)|$

при любом $t \in T$, для которого $B^{(3)}(t) \neq 0$. Символом β обозначим константу Липшица функции $B^{(3)}$, символом ω — константу Липшица функции Ω . Содержательно функцию $B^{(3)}$ можно трактовать как липшицево приближение к функции $B^{(1)}$, функция Ω характеризует «вращаемость» вектора $B^{(3)}(t)$.

Цель работы — показать возможность построения близкой к оптимальной универсальной позиционной стратегии $(t, x) \rightarrow U(t, x)$ первого игрока в игре (1.1) при помощи игры (1.2) и функции $B^{(3)}$. В оценке, характеризующей гарантию первого игрока при использовании рассматриваемой стратегии, присутствует среди других величин константа Липшица функции Ω .

2. Пусть $E = T \times R^n$ и $V^{(2)}(t, x)$ — значение функции цены в игре (1.2) для позиции $(t, x) \in E$. При любом $t \in T$ функция $V^{(2)}(t, \cdot)$ выпукла, удовлетворяет условию Липшица с константой λ и условию $V^{(2)}(t, x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ [1, 6, 7]. Пусть $F = \{t \in T : B^{(3)}(t) = 0\}$. Положим для всех $t \in T, x \in R^n, r \geq 0$:

$$A^*(t, x) = \{z \in R^n : z = x + \alpha \Omega(t), \alpha \in R\}, \quad V^*(t, x) = \min_{z \in A^*(t, x)} V^{(2)}(t, z),$$

$$\Pi^*(t) = \{x \in R^n : V^{(2)}(t, x) = V^*(t, x)\},$$

$$\Pi^r(t) = \{x \in R^n : x + \alpha \Omega(t) \in \Pi^*(t), |\alpha| \leq r\}.$$

Отметим, что $\Pi^0(t) = \Pi^*(t)$ при любом $t \in T$. Если $t \in T \setminus F$, то в определении прямой $A^*(t, x)$ и множества $\Pi^r(t)$ вектор $\Omega(t)$ можно заменить на вектор $B^{(3)}(t) / |B^{(3)}(t)|$. Для $r \geq 0$ и $t \in T$ примем

$$\Pi_{-}^r(t) = \{x \in R^n : x + \alpha \Omega(t) \notin \Pi^r(t), \forall \alpha \geq 0\},$$

$$\Pi_{+}^r(t) = \{x \in R^n : x + \alpha \Omega(t) \notin \Pi^r(t), \forall \alpha \leq 0\}.$$

Пусть $K(D^{(1)}, D^{(2)})$ соответственно — совокупность всех измеримых функций $u(\cdot)$ (соответственно $v(\cdot)$) на T , удовлетворяющих при любом t ограничению $|u(t)| \leq \mu$ (соответственно $v(t) \in Q^{(1)}, v(t) \in Q^{(2)}$). Для любой стратегии U , любых $(t_0, x_0) \in E, \Delta > 0, v(\cdot) \in D^{(1)}$ символом $y^{(1)}(\cdot, t_0,$

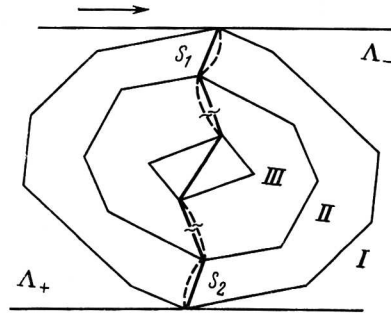


Рис. 1

$x_0, U, \Delta, v(\cdot)$ обозначим движение (ломаную Эйлера [1]) системы (1.1) из позиции (t_0, x_0) в силу выбранных $U, \Delta, v(\cdot)$. Пусть

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0, x_0, U, \Delta) &= \sup_{v(\cdot) \in D^{(1)}} \gamma^{(1)}(y^{(1)}(\vartheta, t_0, x_0, U, \Delta, v(\cdot))), \\ \|B^{(i)}\| &= \sup_{t \in T} |B^{(i)}(t)|, \quad i=1, 2, 3; \quad \sigma = \min_{i=1,2,3} \|B^{(i)}\|, \\ \|\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\| &= \sup_{x \in R^n} |\gamma^{(2)}(x) - \gamma^{(1)}(x)|. \end{aligned}$$

Для любых t_*, t^* из T , где $t_* \leq t^*$ примем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_*, t^*) &= \int_{t_*}^{t^*} [\mu(|B^{(1)}(t) - B^{(2)}(t)| + |B^{(2)}(t) - B^{(3)}(t)|) + \\ &+ \max_{|l| \leq 1, l \in R^n} (\max_{q \in Q^{(1)}} l' C^{(1)}(t) q - \max_{q \in Q^{(2)}} l' C^{(2)}(t) q)] dt. \end{aligned}$$

Здесь и далее штрих означает транспонирование. При всех $r \geq 0, t \in T, x \in R^n$ положим:

$$U^r(t, x) = \begin{cases} \{\mu\}, & x \in \Pi_+^r(t), \\ \{-\mu\}, & x \in \Pi_-^r(t), \\ [-\mu, \mu], & x \in \Pi^r(t). \end{cases}$$

Теорема. Зафиксируем число $r \geq 0$. Пусть стратегия U^r в игре (1.1) такова, что $U^r(t, x) \in U^r(t, x)$ при всех $(t, x) \in E$. Тогда для любых $(t_0, x_0) \in E, \Delta > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \Gamma(t_0, x_0, U^r, \Delta) &\leq V^{(2)}(t_0, x_0) + 1/2(\vartheta - t_0)\lambda[-\omega r + (\omega^2 r^2 + 16\mu^2 \beta \sigma \Delta + \\ &+ 8\mu \beta r)^{1/2}] + (\vartheta - t_0)\lambda\omega r + \lambda r + \lambda \varepsilon(t_0, \vartheta) + 2\lambda \mu \Delta \sigma + \|\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\|. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Замечание 1. Пусть при каждом $t \in T$ некоторая поверхность $H^r(t)$ лежит в множестве $\Pi^r(t)$ и имеет с любой из прямых $A^*(t, x), x \in R^n$, лишь одну общую точку. Тогда $H^r(t)$ разбивает R^n на две части. Обозначим через $H_+^r(t)$ ту из них, что содержит в себе множество $\Pi_+^r(t)$, а через $H_-^r(t)$ ту, что содержит $\Pi_-^r(t)$. Стратегия первого игрока, принимающая значение μ в позициях $(t, x) \in H_+^r(t)$ и значение $-\mu$ в позициях $(t, x) \in H_-^r(t), t \in T$, удовлетворяет условию теоремы, и значит для нее справедлива оценка (2.1). При фиксированных t_0, x_0, Δ наилучшая оценка получается при $r=0$. Однако в реальных вычислениях мы не можем рассчитывать на точное построение поверхностей $H^0(t)$. Именно, мы вынуждены каким-либо образом их аппроксимировать. Так появляются поверхности $H^r(t)$. Оценка (2.1) показывает, что если игра (1.2) достаточно хорошо аппроксимирует игру (1.1), функция $B^{(3)}$ близка к функции $B^{(1)}$, величины r и Δ малы, то величина $\Gamma(t_0, x_0, U^r, \Delta)$ близка к оптимальной гарантии первого игрока в игре (1.1). Стратегия U^r не зависит от начальной позиции, т. е. является универсальной [1-3].

Константа Липшица ω функции Ω присутствует в правой части оценки (2.1). При $r=0$ оценка (2.1) переходит в оценку из работы [5].

Доказательство теоремы опирается на формулируемые ниже леммы 1-3. Введем следующие обозначения. Для любых $(t_*, x_*) \in E, u(\cdot) \in K, v(\cdot) \in D^{(i)}, i=1, 2$, символом $y^{(i)}(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ обозначим решение

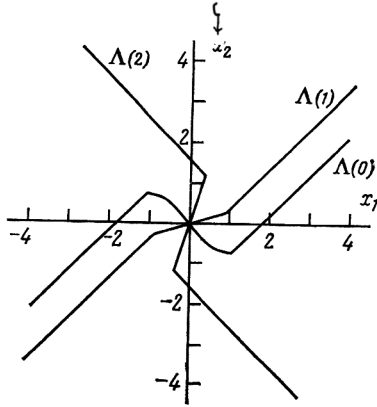


Рис. 2

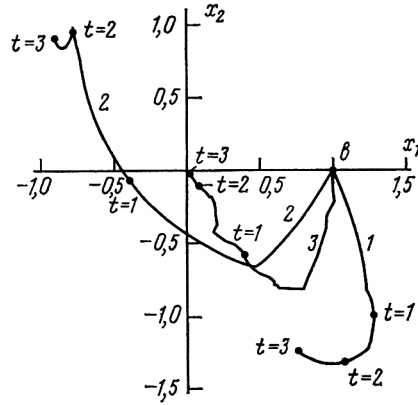


Рис. 3

уравнения (1, i) из позиции (t_*, x_*) в силу функций $u(\cdot)$, $v(\cdot)$. Когда это не приведет к недоразумению, будем писать сокращенно $y^{(i)}(\cdot)$. При $t \in T$, $l \in R^n$ положим

$$c_k(t) = \min_{x \in R^n} V^{(2)}(t, x), \quad W_c^{(2)}(t) = \{x \in R^n : V^{(2)}(t, x) \leq c\},$$

$$\rho_c(l, t) = \max_{x \in W_c^{(2)}(t)} l'x.$$

Лемма 1. Пусть $r \geq 0$, $t_* \in T$, $x_* \in \Pi^r(t_*)$, $0 < \delta \leq \theta - t_*$, $u(\cdot) \in K$, $v(\cdot) \in D^{(1)}$. Тогда

$$V^*(t_* + \delta, y^{(1)}(t_* + \delta, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \leq V^*(t_*, x_*) + 2\lambda\beta\mu\delta^2 + \lambda\omega r\delta + \lambda\varepsilon(t_*, t_* + \delta).$$

Лемма 2. Пусть $(t_*, x_*) \in E$, $0 < \delta \leq \theta - t_*$, $u(\cdot) \in K$, $v(\cdot) \in D^{(1)}$ таковы, что $y^{(1)}(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \notin \Pi^0(t)$ при всех $t \in (t_*, t_* + \delta)$. Пусть далее $u(t) = -\mu$, если $t \in (t_*, t_* + \delta)$, $y^{(1)}(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \in \Pi_-^0(t)$, и $u(t) = \mu$, если $t \in (t_*, t_* + \delta)$, $y^{(1)}(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \in \Pi_+^0(t)$. Тогда

$$V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(1)}(t_* + \delta, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda\varepsilon(t_*, t_* + \delta). \quad (2.2)$$

Лемма 3. Пусть $(t_*, x_*) \in E$, $0 < \delta \leq \theta - t_*$, $u(\cdot) \in K$, $v(\cdot) \in D^{(1)}$. Тогда

$$V^{(2)}(t_* + \delta, y^{(1)}(t_* + \delta, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \leq V^{(2)}(t_*, x_*) + \lambda\varepsilon(t_*, t_* + \delta) + 2\lambda\mu\delta\sigma.$$

Доказательство теоремы. Зафиксируем стратегию U^r , начальную позицию (t_0, x_0) , шаг Δ и функцию $v(\cdot) \in D^{(1)}$. Рассмотрим движение $y^{(1)}(\cdot, t_0, x_0, U^r, \Delta, v(\cdot))$ (кратко $y^{(1)}(\cdot)$). Обозначим через S множество всех $t \in [t_0, \theta]$, для которых $y^{(1)}(t) \in \Pi^r(t)$.

Будем считать вначале, что $S \neq \emptyset$, $\sigma > 0$. Символом t_1 обозначим минимальный момент из S , символом \bar{t} — максимальный. Если $t_1 \neq t_0$, то $y^{(1)}(t) \notin \Pi^r(t)$ при $t \in [t_0, t_1)$. Так как $\Pi^r(t) \supset \Pi^0(t)$, то $y^{(1)}(t) \notin \Pi^0(t)$, $t \in [t_0, t_1)$. В силу леммы 2 имеем

$$V^{(2)}(t_1, y^{(1)}(t_1)) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + \lambda\varepsilon(t_0, t_1). \quad (2.3)$$

Если $\bar{t} \neq \theta$, то $y^{(1)}(t) \notin \Pi^r(t)$ при $t \in (\bar{t}, \theta]$. Используя леммы 2 и 3, получаем

$$V^{(2)}(\theta, y^{(1)}(\theta)) \leq V^{(2)}(\bar{t}, y^{(1)}(\bar{t})) + \lambda\varepsilon(\bar{t}, \theta) + 2\lambda\mu\Delta\sigma. \quad (2.4)$$

Оценим разность $V^{(2)}(\bar{t}, y^{(1)}(\bar{t})) - V^{(2)}(t_i, y^{(1)}(t_i))$. Предположим, что $\beta > 0$. Обозначим

$$e = 1/4\mu\beta[-\omega r + (\omega^2 r^2 + 16\mu^2\beta\Delta\sigma + 8\mu\beta r)^{1/2}]. \quad (2.5)$$

Определим по индукции конечную последовательность моментов t_1, t_2, \dots, t_N . Допустим, что введен момент $t_i, i \geq 1$. Если $S \cap (t_i, \vartheta] = \emptyset$, примем $N = i$. Если $S \cap (t_i, \vartheta] \neq \emptyset$, рассмотрим множество $G_i = S \cap (t_i, t_i + e]$. Пусть $t_{i+1} = \max\{t: t \in G_i\}$ при $G_i \neq \emptyset$ и $t_{i+1} = \min\{t: t \in S \setminus [t_0, t_i + e]\}$ при $G_i = \emptyset$. Нетрудно видеть, что $t_N = \bar{t}$.

Возьмем произвольное $i, 1 \leq i < N$. Если $t_{i+1} - t_i \leq e$, то применяя лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} V^*(t_{i+1}, y^{(1)}(t_{i+1})) - V^*(t_i, y^{(1)}(t_i)) &\leq 2\lambda\beta\mu(t_{i+1} - t_i)^2 + \lambda\omega r(t_{i+1} - t_i) + \\ &+ \lambda\varepsilon(t_i, t_{i+1}) \leq 2\lambda\beta\mu(t_{i+1} - t_i)e + \lambda\omega r(t_{i+1} - t_i) + \lambda\varepsilon(t_i, t_{i+1}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если $t_{i+1} - t_i > e$, то $y^{(1)}(t) \notin \Pi^r(t)$ при $t \in (t_i, t_{i+1})$. Используя леммы 2 и 3, получаем

$$V^{(2)}(t_{i+1}, y^{(1)}(t_{i+1})) \leq V^{(2)}(t_i, y^{(1)}(t_i)) + \lambda\varepsilon(t_i, t_{i+1}) + 2\lambda\mu\Delta\sigma.$$

Поскольку $V^*(t_{i+1}, y^{(1)}(t_{i+1})) \leq V^{(2)}(t_{i+1}, y^{(1)}(t_{i+1}))$ и $V^{(2)}(t_i, y^{(1)}(t_i)) \leq V^*(t_i, y^{(1)}(t_i)) + \lambda r$, то

$$V^*(t_{i+1}, y^{(1)}(t_{i+1})) - V^*(t_i, y^{(1)}(t_i)) \leq \lambda\varepsilon(t_i, t_{i+1}) + 2\lambda\mu\Delta\sigma + \lambda r.$$

Учитывая равенство $2\mu\Delta\sigma + r = 2\mu\beta e^2 + \omega r e$, вытекающее из определения числа e , имеем при $t_{i+1} - t_i > e$:

$$\begin{aligned} V^*(t_{i+1}, y^{(1)}(t_{i+1})) - V^*(t_i, y^{(1)}(t_i)) &\leq \lambda\varepsilon(t_i, t_{i+1}) + 2\lambda\mu\beta e^2 + \lambda\omega r e < \\ < \lambda\varepsilon(t_i, t_{i+1}) + 2\lambda\mu\beta(t_{i+1} - t_i)e + \lambda\omega r(t_{i+1} - t_i). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из (2.6), (2.7) получаем

$$\begin{aligned} V^*(t_N, y^{(1)}(t_N)) - V^*(t_1, y^{(1)}(t_1)) &\leq 2(t_N - t_1)\lambda\mu\beta e + \\ &+ \lambda\omega r(t_N - t_1) + \lambda\varepsilon(t_1, t_N). \end{aligned}$$

Поскольку $V^{(2)}(t_N, y^{(1)}(t_N)) \leq V^*(t_N, y^{(1)}(t_N)) + \lambda r$, $V^*(t_1, y^{(1)}(t_1)) \leq V^{(2)}(t_1, y^{(1)}(t_1))$ и $\bar{t} = t_N$, то

$$V^{(2)}(\bar{t}, y^{(1)}(\bar{t})) - V^{(2)}(t_1, y^{(1)}(t_1)) \leq 2(\bar{t} - t_1)\lambda\mu\beta e + \lambda\omega r(\bar{t} - t_1) + \lambda\varepsilon(t_1, \bar{t}) + \lambda r. \quad (2.8)$$

Пусть $\beta = 0$. В силу леммы 1

$$V^*(\bar{t}, y^{(1)}(\bar{t})) \leq V^*(t_1, y^{(1)}(t_1)) + \lambda\omega r(\bar{t} - t_1) + \lambda\varepsilon(t_1, \bar{t}).$$

Отсюда

$$V^{(2)}(\bar{t}, y^{(1)}(\bar{t})) - V^{(2)}(t_1, y^{(1)}(t_1)) \leq \lambda\omega r(\bar{t} - t_1) + \lambda r + \lambda\varepsilon(t_1, \bar{t}). \quad (2.9)$$

Учитывая формулы (2.3) – (2.5), (2.8) и (2.9), получим в случае $S \neq \emptyset, \sigma > 0$:

$$\begin{aligned} V^{(2)}(\vartheta, y^{(1)}(\vartheta)) &\leq V^{(2)}(t_0, x_0) + 1/2(\vartheta - t_0)\lambda[-\omega r + (\omega^2 r^2 + 16\mu^2\beta\Delta\sigma + \\ &+ 8\mu\beta r)^{1/2}] + \lambda\omega r(\vartheta - t_0) + \lambda r + 2\lambda\mu\Delta\sigma + \lambda\varepsilon(t_0, \vartheta). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если $S = \emptyset$, то

$$V^{(2)}(\vartheta, y^{(1)}(\vartheta)) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + \lambda\varepsilon(t_0, \vartheta) \quad (2.11)$$

Если $\sigma = 0$, то

$$V^{(2)}(\vartheta, y^{(1)}(\vartheta)) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + \lambda\varepsilon(t_0, \vartheta). \quad (2.12)$$

В силу (2.10) – (2.12)

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)}(y^{(1)}(\vartheta)) \leq & V^{(2)}(t_0, x_0) + \frac{1}{2}(\vartheta - t_0)\lambda[-\omega r + (\omega^2 r^2 + 16\mu^2\beta\Delta\sigma + \\ & + 8\mu\beta r)^{1/2}] + \lambda\omega r(\vartheta - t_0) + \lambda r + \lambda\varepsilon(t_0, \vartheta) + 2\lambda\mu\Delta\sigma + \|\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\|. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Т. к. правая часть (2.13) не зависит от $v(\cdot)$, то оценка (2.1) доказана.

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно видеть, что момент ϑ в формулах (2.10) – (2.12) можно заменить на любой момент $t \in [t_0, \vartheta]$. Таким образом, для любых $(t_0, x_0) \in E$, $\Delta > 0$, $v(\cdot) \in D^{(1)}$, $t \in [t_0, \vartheta]$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} V^{(2)}(t, y^{(1)}(t, t_0, x_0, U^r, \Delta, v(\cdot))) \leq & V^{(2)}(t_0, x_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)\lambda[-\omega r + \\ & + (\omega^2 r^2 + 16\mu^2\beta\Delta\sigma + 8\mu\beta r)^{1/2}] + \lambda\omega r(t - t_0) + \lambda r + \lambda\varepsilon(t_0, t) + 2\lambda\mu\Delta\sigma. \end{aligned}$$

3. В качестве первого примера рассмотрим дифференциальную игру второго порядка

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t) + v_1(t), \quad (3.1)$$

$$\dot{z}_2(t) = -z_1(t) + u(t) + v_2(t)$$

с фиксированным моментом окончания $\vartheta = 3$. Управляющие параметры игроков стеснены ограничениями

$$|u(t)| \leq 1, \quad v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \in Q,$$

где Q – четырехугольник с вершинами $(-1, 0)$, $(0, 0.5)$, $(1, 0)$, $(0, -0.5)$. Функцию платы γ выберем в виде $\gamma(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Первый игрок минимизирует значения $\gamma(z(\vartheta))$, интересы второго противоположны. С помощью замены $y(t) = X(\vartheta, t)z(t)$, где $X(\vartheta, t)$ – фундаментальная матрица Коши системы

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t),$$

$$\dot{z}_2(t) = -z_1(t),$$

исходная дифференциальная игра (3.1) приводится к виду

$$\dot{y}(t) = B^{(1)}(t)u(t) + C^{(1)}(t)v(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad v(t) \in Q^{(1)}. \quad (3.2)$$

Здесь

$$B^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta - t) \\ \cos(\vartheta - t) \end{pmatrix}, \quad C^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta - t) & \sin(\vartheta - t) \\ -\sin(\vartheta - t) & \cos(\vartheta - t) \end{pmatrix}, \quad Q^{(1)} = Q.$$

Функция платы для игры (3.2) остается такой же, как и в игре (3.1), т. е. $\gamma^{(1)} = \gamma$.

Положим $T = [0, 3]$. Введем аппроксимацию игры (3.2) следующим образом. Разобьем промежуток T точками $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{300} = 3$ на 300 равных частей. Примем $B^{(2)}(t) = B^{(1)}(\tau_i)$, $C^{(2)}(t) = C^{(1)}(\tau_i)$, $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, 300$. Пусть $Q^{(2)} = Q^{(1)}$, $\gamma^{(2)} = \gamma^{(1)}$, $B^{(3)} = B^{(1)}$. Так как $|B^{(3)}(t)| = 1$ для всех $t \in T$, то положим $\Omega = B^{(3)}$. Имеем

$$\lambda = 1, \beta = 1, \mu = 1, \omega = 1, \sigma = 1,$$

$$\varepsilon(t_0, \vartheta) \leq \int_{t_0}^{\vartheta} [|B^{(2)}(t) - B^{(3)}(t)| + h(C^{(1)}(t)Q^{(1)}, C^{(2)}(t)Q^{(2)})] dt.$$

Здесь $h(C^{(1)}(t)Q^{(1)}, C^{(2)}(t)Q^{(2)})$ – хаусдорфово расстояние между множествами $C^{(1)}(t)Q^{(1)}$ и $C^{(2)}(t)Q^{(2)}$. Число $\varepsilon(t_0, \vartheta)$ оценивается неравенством $\varepsilon(t_0, \vartheta) \leq \varepsilon(0, 3) \leq 0.06$.

Будем считать, что $t_0 = 0$. Опишем построение стратегии первого игрока в игре (3.2). Стратегию будем использовать с шагом $\Delta = 0.01$. Для $c \geq c_h(t)$ положим

$$Z_c(t) = \{x \in R^2 : x = \bar{x} + \alpha B^{(3)}(t), \alpha \in R, \bar{x} \in W_c^{(2)}(t)\}.$$

Таким образом $Z_c(t)$ – цилиндр с образующими параллельными вектору $B^{(3)}(t)$, натянутый на $W_c^{(2)}(t)$. Очевидно, что $c_h(0) = \max\{c_h(t) : t \in T\}$. Для аппроксимирующей игры вычисления на ЭВМ дают $c_h(0) = 0.89$. Зададимся двумя числами $c_* = 0.89$ и $c^* = 4$. Поскольку $c_* = c_h(0)$, то $W_c^{(2)}(t) \neq \emptyset$ для любых $c \in [c_*, c^*]$ и $t \in T$. Выберем 16 чисел между c_* и c^* . Занумеруем их в порядке убывания: $c^* = c_1 > c_2 > \dots > c_{16} = c_*$.

Для каждого момента τ_i , $i=\overline{0,299}$, построим следующим образом ломаную $S(\tau_i)$, состоящую из двух кусков $S_1(\tau_i)$ и $S_2(\tau_i)$. Прежде всего построим набор множеств $W_{c_j}^{(2)}(\tau_i)$, $j=\overline{1,16}$. Любое из этих множеств есть выпуклый многоугольник на плоско-

сти. На границе каждого множества выделим точку $x(i, j)$, в которой скалярное произведение вектора нормали к границе множества на вектор $B^{(3)}(\tau_i)$ меняет знак с минуса на плюс при обходе границы по часовой стрелке. Затем выделим точку $\kappa(i, j)$, в которой указанное скалярное произведение меняет знак с плюса на минус. Соединяя последовательно точки $x(i, 1), x(i, 2), \dots, x(i, 16)$ отрезками прямых линий, получим ломаную $S_1(\tau_i)$. Соединяя точки $\kappa(i, 1), \kappa(i, 2), \dots, \kappa(i, 16)$, получим ломаную $S_2(\tau_i)$. Построение качественно поясняется на рис. 1. Цифрами I, II, III

обозначены множества $W_{c_1}^{(2)}(\tau_i), W_{c_2}^{(2)}(\tau_i), W_{c_{16}}^{(2)}(\tau_i)$. Линия $S_1(\tau_i)$ обозначена чер-
рез S_1 , линия $S_2(\tau_i)$ — через S_2 . Стрелкой показано направление вектора $B^{(3)}\tau_i$.

Оценим расстояние от ломаной $S(\tau_i)$ до множества $\Pi^*(\tau_i)=\Pi^0(\tau_i)$ по направлению вектора $B^{(3)}(\tau_i)$. Для этого на промежутке $[c_*, c^*]$ выберем достаточно большое количество чисел $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_N$ и построим ломаную $\bar{S}(\tau_i)$, аналогичную ломаной $S(\tau_i)$. Линия $\bar{S}(\tau_i)$ показана на рис. 1 пунктиром. Оценим далее расстояние между ломаными $S(\tau_i)$ и $\bar{S}(\tau_i)$ по направлению вектора $B^{(3)}(\tau_i)$. При $N=46$ вычисления на ЭВМ показали, что расстояние между $S(\tau_i)$ и $\bar{S}(\tau_i)$ при любом $i=\overline{0,299}$ не превышает величины $a=0.016$. Пренебрегая малой погрешностью, считаем, что $S(\tau_i) \subset \Pi^*(\tau_i)$ при любом i . Стало быть $S(\tau_i) \subset \Pi^a(\tau_i)$, $i=\overline{0,299}$.

Соединяя точки $x(i, 16)$ и $\kappa(i, 16)$ отрезком прямой, обозначим символом $\Lambda(\tau_i)$ склейку $S(\tau_i)$ с отрезком $[x(i, 16), \kappa(i, 16)]$. Ломаная $\Lambda(\tau_i)$ делит цилиндр $Z_{c^*}(\tau_i)$ на две части $\Lambda_+(\tau_i)$ и $\Lambda_-(\tau_i)$ (см. рис. 1, где эти части обозначены соответственно через Λ_+ и Λ_-). Просчитанные на ЭВМ для моментов $\tau_0=0, \tau_{100}=1, \tau_{200}=2$ линии $\Lambda(0), \Lambda(1), \Lambda(2)$ показаны на рис. 2. При любом $i=\overline{0,299}$ положим $\bar{U}(\tau_i, x)=1$, если $x \in \Lambda_+(\tau_i)$ и $\bar{U}(\tau_i, x)=-1$, если $x \in \Lambda_-(\tau_i)$. Для $x \in \Lambda(\tau_i)$ примем $\bar{U}(\tau_i, x)=0$. Пусть также $\bar{U}(\tau_i, x)=0$, если $x \notin Z_{c^*}(\tau_i)$.

Используем функцию \bar{U} в качестве управляющей функции (стратегии) первого игрока в игре (3.2) при $t_0=0$ и шаге $\Delta=0.01$. Оценим гарантию первого игрока. Пусть

$$\xi = 1/2(\vartheta - t_0)\lambda[-\omega r + (\omega^2 r^2 + 16\mu^2\beta\sigma\Delta + 8\mu\beta r)^{1/2}] + (\vartheta - t_0)\lambda\omega r + \lambda r + \lambda\varepsilon(t_0, \vartheta) + 2\lambda\mu\Delta\sigma + \|\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\|.$$

Положив $r=a=0.016, \lambda=\beta=\mu=\omega=\sigma=1, \|\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\|=0, \varepsilon(t_0, \vartheta) \leq 0.06$, имеем $\xi \leq 0.91$. Из теоремы и замечания 2 с учетом того, что $V^{(2)}(t_0, x_0) \geq c_*$, получаем

$$\Gamma(t_0, x_0, \bar{U}, \Delta) \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + \xi \leq V^{(2)}(t_0, x_0) + 0.91$$

для любой начальной позиции (t_0, x_0) , удовлетворяющей условиям $t_0=0, V^{(2)}(t_0, x_0) \leq 4-0.91=3.09$.

Определим стратегию \bar{U} первого игрока в исходной игре (3.1) соотношением $\bar{U}(t, x) = \bar{U}(t, X(\vartheta, t)x)$. Тогда гарантия $\bar{\Gamma}(t_0, z(t_0), \bar{U}, \Delta)$ первого игрока в игре (3.1) оценивается неравенством

$$\bar{\Gamma}(t_0, z(t_0), \bar{U}, \Delta) \leq V^{(2)}(t_0, X(\vartheta, t_0)z(t_0)) + 0.91$$

для любой начальной позиции $(t_0, z(t_0))$ удовлетворяющей условием $t_0=0, V^{(2)}(t_0, X(\vartheta, t_0)z(t_0)) \leq 3.09$.

На рис. 3 показаны просчитанные на ЭВМ фазовые траектории в игре (3.1) для начальной позиции $t_0=0, z(t_0)=b=(1, 0)$. За первого игрока использовалась стратегия \bar{U} с шагом 0.01. Кривая 1 соответствует помехе $v_1(t) \equiv 1, v_2(t) \equiv 0$, кривая 2 — помехе $v_1(t) \equiv -1, v_2(t) \equiv 0$. Для кривой 3 значения помехи $v(\cdot)$ выбирались с шагом 0.1 при помощи датчика случайных чисел, реализующего равномерное распределение случайной величины на четырехугольнике Q . На кривых отмечены положения, соответствующие моментам $t=1, 2, 3$. Значение платы $\gamma^{(1)}(z(\vartheta))$ в момент окончания $\vartheta=3$ равно 1.24 для первой кривой, 0.91 для второй и 0.02 для третьей. Значение $V^{(2)}(t_0, X(\vartheta, t_0)b)$ равно 1.3. Практически оно совпадает с ценой игры (3.1) в позиции (t_0, b) .

Рассмотрим второй пример. Пусть движение управляемого объекта описывается системой четвертого порядка

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) &= 0.02(-z_3(t) - 0.5z_4(t)) + u(t) + v_1(t), \\ \dot{z}_3(t) &= z_4(t), \\ \dot{z}_4(t) &= -z_3(t) - 0.5z_4(t) + 0.02u(t) + v_2(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Управляющий параметр $u(t)$ первого игрока стеснен ограничением $|u(t)| \leq 5$, параметры $v_1(t), v_2(t)$ второго игрока удовлетворяют условиям $|v_1(t)| \leq 0.2, |v_2(t)| \leq 0.2$. Положим $t_0=0, \vartheta=6$. Первый игрок минимизирует значения платы $\gamma(z(\vartheta)) = \max\{|z_1(\vartheta)|, |z_2(\vartheta)|\}$, интересы второго игрока противоположны.

Пусть $X(\vartheta, t)$ – фундаментальная матрица Коши для системы

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) &= 0.02(-z_3(t) - 0.5z_4(t)), \\ \dot{z}_3(t) &= z_4(t), \\ \dot{z}_4(t) &= -z_3(t) - 0.5z_4(t), \end{aligned}$$

и $[X(\vartheta, t)]_{1,2}$ – матрица, составленная из первых двух строк матрицы $X(\vartheta, t)$. Игра (3.3) допускает сведение к эквивалентной дифференциальной игре второго порядка

$$\dot{y}(t) = B^{(1)}(t)u(t) + C^{(1)}(t)v(t), \quad |u(t)| \leq 5, \quad v(t) \in Q^{(1)} \quad (3.4)$$

с моментом окончания $\vartheta=6$ и функцией платы $\gamma^{(1)}(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Здесь

$$B^{(1)}(t) = [X(\vartheta, t)]_{1,2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0.02 \end{pmatrix}, \quad C^{(1)}(t) = [X(\vartheta, t)]_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^{(1)} = \{q \in R^2 : |q_1| \leq 0.2, |q_2| \leq 0.2\}.$$

Разбивая промежуток $T = [t_0, \vartheta] = [0, 6]$ на 120 равных частей моментами τ_i , введем функции $B^{(2)}, C^{(2)}$ аналогично тому, как это делалось в первом примере. Положим $Q^{(2)} = Q^{(1)}, \gamma^{(2)} = \gamma^{(1)}$. Таким образом, будет определена аппроксимирующая игра (1.2). Поскольку функция $B^{(1)}$ удовлетворяет условию Липшица и не обращается в нуль, примем

$$B^{(3)}(t) = B^{(1)}(t), \quad \Omega(t) = B^{(3)}(t) / |B^{(3)}(t)|, \quad t \in T.$$

Стратегию первого игрока в игре (3.4) и соответствующую ей стратегию в игре (3.3) зададим при помощи линий на плоскости по рецепту, описанному в первом примере.

При $\Delta=0.05$ для начальной позиции $t_0=0, z(t_0) = (45, 0.5, 1, 0.5)$ в игре (3.3) были просчитаны на ЭВМ три движения, отвечающие различным способам задания помехи $v(\cdot)$. Для первого движения было взято $v_1(t) \equiv 1, v_2(t) \equiv 1$. Второе соответствует $v_1(t) \equiv -1, v_2(t) \equiv -1$. При формировании третьего движения использовался с шагом 0.25 датчик случайных чисел, реализующий равномерный закон распределения. Координаты фазового вектора $z(\vartheta)$ в момент окончания $\vartheta=6$ получились равными $(0.28, -0.79, 0.48, 0.24), (0.09, -0.72, 0.15, 0.28), (0.20, -0.53, 0.24, 0.22)$. Значение платы $\gamma(z(\vartheta))$ равно соответственно 0.79, 0.72, 0.53. Значение цены в игре (3.3) для выбранной начальной позиции равно 0.86.

Авторы благодарят А. И. Субботина за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Красовский Н. Н. Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели. – Мат. сборник, 1978, 107 (149), 4 (12).
3. Субботина Н. Н. Универсальные позиционные стратегии в дифференциальных играх. В кн.: IV Всес. конференц. по оптимальному управлению в механических системах. М.: ИИМ АН СССР, 1982.
4. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
5. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Универсальная стратегия в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. – Проблемы управления и теории информации, 1982, 11, № 6.
6. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
7. Полищук Е. Г. Оценка отклонения цены линейной дифференциальной игры от последовательного программного максимина. – Изв. АН СССР. Техн. кибернет., 1980, № 6.

Свердловск

Поступила в редакцию
14.VI.1982
После доработки
18.II.1983