

**АКАДЕМИЯ НАУК СССР
УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ
РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР**

(Материалы по математическому обеспечению ЭВМ)

Свердловск 1984

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР
(материалы по математическому обеспечению ЭВМ)

Свердловск, 1984

В.Л.Турова

ЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА КАЧЕСТВА

I. П о с т а н о в к а з а д а ч и

Рассматривается линейная дифференциальная игра второго порядка

$$\dot{x} = Ax + u + v, \quad (I)$$

где x - фазовый вектор, A - матрица 2×2 с комплексными собственными значениями, u - управляющее воздействие первого игрока, v - второго. Предполагается, что в каждый момент времени t выполняются включения $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$. Множества P и Q - выпуклые замкнутые многоугольники, невырождающиеся в точку. Задана точка m на плоскости. Первый игрок стремится завести систему в точку m , второй препятствует этому. Требуется построить множество \mathcal{B} всех начальных состояний x_0 на плоскости, из которых первый игрок, действуя по принципу обратной связи, может привести систему в точку m за конечное время при любых действиях второго игрока.

Дадим строгое определение множества \mathcal{B} . Пусть \mathcal{U} - множество всех стратегий первого игрока, а именно, множество всех функций, заданных на $R_+ \times R^2$ со значениями в P . Здесь R_+ - множество неотрицательных чисел. Пусть Δ -

произвольное разбиение полуоси R_+ точками $0 < t_1 < t_2 < \dots$ ($t_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$), $d(\Delta)$ - диаметр разбиения, $v(\cdot)$ - измеримая функция времени со значениями в Q . При фиксированных $\Delta, x, U, v(\cdot)$ через $y(\cdot, \Delta, x, U, v(\cdot))$ обозначим ломаную Эйлера [2] для системы (I). Определим \mathcal{B} как совокупность всех $x_0 \in R^2$, для каждого из которых существует стратегия $U \in \mathcal{U}$, момент $\vartheta > 0$ и отображение $\varepsilon \rightarrow \delta(\varepsilon)$ из R_+ в R_+ , такие, что каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, разбиение Δ с диаметром $d(\Delta) \leq \delta(\varepsilon)$ и функция $v(\cdot)$ со значениями в Q , найдется момент $t \in [0, \vartheta]$, при котором $y(t, \Delta, x_0, U, v(\cdot))$ будет принадлежать ε -окрестности точки m .

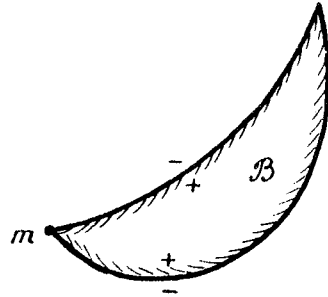
В силу утверждения об альтернативе [2] второй игрок может уклонить систему (I) от попадания в m из любой точки $x_0 \in R^2 \setminus \mathcal{B}$ на любом заранее заданном конечном промежутке времени.

Задача нахождения множества \mathcal{B} является по терминологии Р. Айзекса [1] задачей качества: при исследовании возможности перевода в точку m нас интересует лишь принципиальная возможность перевода за конечное время, но не сама величина времени перевода. Оценка времени перевода может зависеть от начальной точки x_0 и при изменении x_0 в пределах \mathcal{B} может стремиться к бесконечности. Таким образом, исследуемая задача есть дифференциальная игра с неограниченным временем окончания.

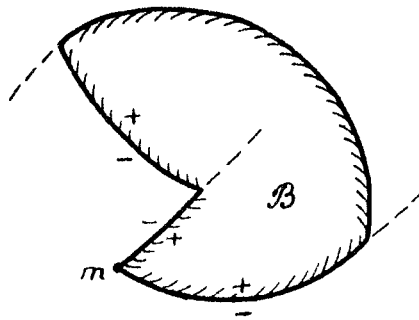
Решение задачи о нахождении множества \mathcal{B} основано на построении в фазовой плоскости специальных линий - полупрозрачных кривых [1, 3]. Процедура построения этих линий носит попятный характер. Начальные кривые выпускаются из

точки m . В простейшем случае (рис. 1) начальные кривые пересекаются, и тогда \mathcal{B} есть множество, заключенное между ними. Линии играют роль барьеров [1]. Первый игрок не допускает переход с положительной стороны на отрицательную, а второй, наоборот, с отрицательной на положительную. В более сложных случаях приходится, построив начальные кривые, переходить к следующим и т.д. При этом последующие кривые выпускаются не из точек обрыва предыдущих, а из некоторых специальных точек (они называются ниже точками отростка) на предыдущих кривых. На рис. 2 показан возможный вид множества \mathcal{B} , более сложный, чем на рис. 1. Пунктиром отмечены участки полупроницаемых кривых, которые были построены, но отброшены, поскольку они не определяют вид границы множества \mathcal{B} .

Возможны случаи, когда множество \mathcal{B} состоит из одной точки m , т.е. на плоскости нет ни одной отличной от m начальной точки x_0 , откуда первый игрок мог бы обеспечить перевод системы (I) в m за конечное время. Наоборот, второй игрок в этом случае обеспечивает уклонение системы (I) от попадания в m при любой начальной точке $x_0 \neq m$. В частности, $\mathcal{B} = \{m\}$, если $Q = -P + D$, где D — невырождающийся в точку многоугольник. Необходимые и достаточные условия соотношения $\mathcal{B} = \{m\}$ приведены в работах [4, 5]. В описываемой ниже программе заложена проверка некоторого условия, гарантирующего $\mathcal{B} \neq \{m\}$. Вообще говоря, это условие более грубое, чем необходимые и достаточные условия из [4, 5]. Но грубость его может проявиться лишь в весьма тонких и практически редко встречаемых случаях. В целях упрощения алгоритма исключен случай "однотипности", т.е. когда существует такой многоугольник D ,



Puc. 1



Puc. 2

что $P = -Q + D$. В этом случае игра (I) сводится к решению задачи управления

$$\dot{x} = Ax + w, \quad w \in D.$$

2. Описание алгоритма

Алгоритм построения множества \mathcal{B} основан на свойствах кривых, изученных в [3]. Описываемые ниже построения относятся к случаю $\mathcal{B} \neq \{m\}$. В силу принятых предположений относительно множеств P, Q всю плоскость можно разбить на такое четное число подряд идущих конусов K_1, \dots, K_{2s} с вершиной в нуле, непустой внутренностью и углом $< \pi$, что при любом нечетном $j = \overline{1, 2s}$ функция

$$l \rightarrow \max_{p \in P} \min_{q \in Q} l'(p+q), \quad K_j \rightarrow R$$

вогнута, а при любом четном — выпукла, при любом $j = \overline{1, 2s}$ эта функция не является линейной на K_j .

Введем некоторые обозначения. Символом E обозначим некоторую состоящую из $2s$ звеньев замкнутую ломаную линию на плоскости, такую, что если E_j — ее звено с номером j , то замыкание конуса K_j представляется в виде объединения по всем $\lambda \geq 0$ множеств λE_j . Условимся, что переход от конуса K_j к конусу K_{j+1} , $j = 1, \dots, 2s-1$ происходит против часовой стрелки. Качественный вид ломаной E и конусов K_j поясняется рис. 3.

Для всех векторов l_1, l_2 из E не равных между

собой и не противоположных по направлению, запись $\ell_1 < \ell_2$ будет означать, то вектор $\ell_2 / |\ell_2|$ поворотом против часовой стрелки на угол $< \pi$ совмещается с вектором $\ell_1 / |\ell_1|$.

Введем функции

$$\varphi(\ell) = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} \ell'(p+q), \quad \ell \in E,$$

$$H^{(n)}(\ell, x) = (-1)^n (\ell'Ax + \varphi(\ell)), \quad n=1,2, \ell \in E, x \in R^2.$$

Функция $\varphi(\cdot)$ и функции $H^{(n)}(\cdot, x)$ при $n=1,2$, $x \in R^2$ являются "кусочно выпукло-вогнутыми".

Для удобства нумерации вводимых ниже множеств применим обозначение $(e)_c = e - \left[\frac{e-0,5}{c} \right] c$ (квадратные скобки означают целую часть числа). Положим

$$E_k^{(n)}(i) = E_{(2i+n+k-3)_{2,3}}^{(n)},$$

$$\Gamma^{(n)}(i) = E_1^{(n)}(i) \cup E_2^{(n)}(i),$$

$$P_k^{(n)}(i) = \{x \in R^2 : (-1)^k H^{(n)}(\ell, x) \leq 0, \ell \in E_k^{(n)}(i)\}.$$

Здесь $n=1,2$, $k=1,2$, $i = \overline{1,3}$.

Полупроницаемые кривые, о которых говорилось в первом разделе, будут строиться на основе нулей функций $H^{(n)}(\cdot, x)$. Скажем, что функция $H^{(n)}(\cdot, x)$ имеет при $\ell_* \in E$ нуль

- на + , если $H^{(n)}(\ell_*, x) = 0$ и при любом ℓ , достаточно близком к ℓ_* и удовлетворяющем условию $\ell < \ell_*$ ($\ell > \ell_*$) , выполнено неравенство

$$H^{(n)}(\ell, x) < 0 \quad (H^{(n)}(\ell, x) > 0).$$

Символом $S^{(n)}(i)$, $n=1,2$, $i=\overline{1,3}$, обозначим совокупность всех $x \in R^2$, для каждого из которых существует нуль - на + функции $H^{(n)}(\cdot, x)$, принадлежащий $\text{int } \Gamma^{(n)}(i)$. Множества $S^{(n)}(i)$ поясняются на рис. 4. Так как функция $H^{(n)}(\cdot, x)$ выпукла на $E_1^{(n)}(i)$ и вогнута на $E_2^{(n)}(i)$, то вектор из $\text{int } \Gamma^{(n)}(i)$, на котором реализуется нуль - на + , единствен . Обозначим его $L^{(n)}(i, x)$. Справедливо равенство

$$S^{(n)}(i) = R^2 \setminus (P_1^{(n)}(i) \cup P_2^{(n)}(i)) ,$$

$$n = 1, 2, \quad i = \overline{1, 3} .$$

Функция $x \rightarrow L^{(n)}(i, x)$ удовлетворяет в $S^{(n)}(i)$ локальному условию Липшица.

При $n=1,2$, $\ell \in E$ пусть $\gamma^{(n)}(\ell)$ - единичный вектор, полученный поворотом вектора ℓ на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, если $n=1$, и по часовой стрелке, если $n=2$.

Введем обозначение $\gamma^{(n)}(i, x) = \gamma^{(n)}(L^{(n)}(i, x))$, $n=1,2$, $i=\overline{1,3}$. Пусть $n=1,2$, $i=\overline{1,3}$, $x \in S^{(n)}(i)$. Символом $w^{(n)}(\cdot, i, x)$ обозначим не - продолжаемое решение [6] дифференциального уравнения

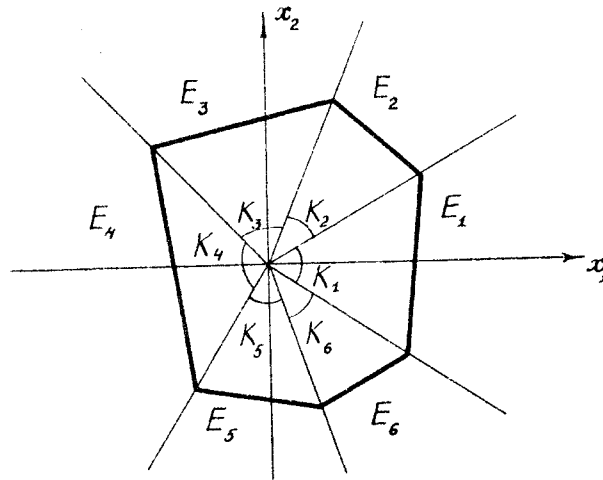


Рис. 3

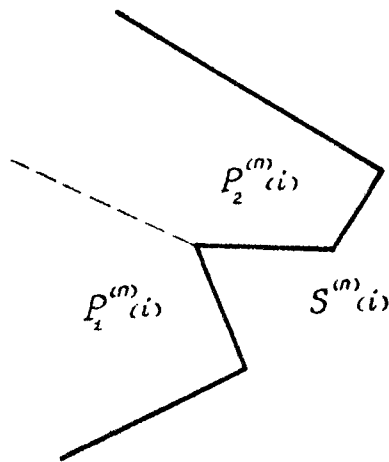


Рис. 4

$$\dot{w}(\tau) = J^{(n)}(i, w(\tau))$$

с начальным условием x при $\tau = 0$.

Фазовые траектории непродолжаемых решений $w^{(n)}(\cdot, i, x)$, $x \in S^{(n)}(i)$ образуют семейство $\Phi^{(n)}(i)$ гладких кривых, заполняющее $S^{(n)}(i)$.

Искомое множество \mathcal{B} определяется при помощи двух кривых: $g^{(1)}(m)$ и $g^{(2)}(m)$. При этом кривая $g^{(n)}(m)$ составляется из дуг кривых, принадлежащих семействам $\Phi^{(n)}(i)$, $i = \bar{1, 3}$. Кривые $g^{(1)}(m)$ и $g^{(2)}(m)$ получаются кусочно-гладкими.

При численном построении кривые $g^{(1)}(m)$, $g^{(2)}(m)$ подменяются ломаными $g_{\Delta}^{(1)}(m)$, $g_{\Delta}^{(2)}(m)$ (Δ — шаг построений), которые строятся при помощи корней уравнений

$$H^{(n)}(\ell, x) = 0, \quad n = 1, 2, \ell \in E, x \in R^2.$$

Получаемое в результате приближение к множеству \mathcal{B} обозначим через \mathcal{B}_{Δ} .

Для построения кривой $g_{\Delta}^{(1)}(m)$ используются корни $L^{(1)}(i, x)$, $i = \bar{1, 3}$, уравнения $H^{(1)}(\ell, x) = 0$, а для построения кривой $g_{\Delta}^{(2)}(m)$ — корни $L^{(2)}(i, x)$, $i = \bar{1, 3}$ уравнения $H^{(2)}(\ell, x) = 0$. Ломаные $g_{\Delta}^{(1)}(m)$, $g_{\Delta}^{(2)}(m)$ строятся ветвями (ветви будем обозначать символом $g_{k\Delta}^{(n)}$, k — номер ветви, $n = 1, 2$).

Поясним построение ветвей на примере ветви $g_{j\Delta}^{(n)}$, выходящей из некоторой точки x (построение ветвей $g_{i\Delta}^{(n)}$, $n = 1, 2$, начинается из точки m). Пусть заданы целое

положительное число $i_* \leq 3$ и точка $z^{(n)}(j)$ на кривой $g_{\Delta}^{(n)}(m)$ (при построении кривых $g_{\Delta}^{(n)}$ точка $z^{(n)}(1) = m$). Предположим, что $x \in S^{(n)}(\hat{i})$. Вычислим корень $L^{(n)}(\hat{i}, x)$ уравнения $H^{(n)}(\ell, x) = 0$ на множестве $\Gamma^{(n)}(\hat{i})$. Используя вектор $L^{(n)}(\hat{i}, x)$, найдем точку $x_{\Delta}^{(n)}(2) = x_{\Delta}^{(n)}(1) + \gamma^{(n)}(L^{(n)}(\hat{i}, x)) \cdot \Delta$. Здесь Δ — шаг построений, а $x_{\Delta}^{(n)}(1) = x$. В точке $x_{\Delta}^{(n)}(2)$ вычисляем корень $L^{(n)}(\hat{i}, x_{\Delta}^{(n)}(2))$ уравнения $H^{(n)}(\ell, x_{\Delta}^{(n)}(2)) = 0$ на множестве $\Gamma^{(n)}(\hat{i})$. Предположим, что найдена точка $x_{\Delta}^{(n)}(k)$. Тогда

$$x_{\Delta}^{(n)}(k+1) = x_{\Delta}^{(n)}(k) + \gamma^{(n)}(L^{(n)}(\hat{i}, x_{\Delta}^{(n)}(k))) \cdot \Delta.$$

Процессу продолжаем до тех пор, пока существует корень $L^{(n)}(\hat{i}, x_{\Delta}^{(n)}(k)) \in \Gamma^{(n)}(\hat{i})$.

Пусть $x_{\Delta}^{(n)}(\bar{k})$ — последняя полученная таким образом точка, т.е. $x_{\Delta}^{(n)}(\bar{k}-1) \in S^{(n)}(\hat{i})$, а $x_{\Delta}^{(n)}(\bar{k}) \notin S^{(n)}(\hat{i})$. Если $\hat{i} = i_*$, то построение ветви заканчиваем; если $\hat{i} < i_*$, то ищем на кривой $g_{\Delta}^{(n)}(z^{(n)}(j))$ точку (назовем ее промежуточной точкой отрезка), из которой будем продолжать построения.

Промежуточная точка отрезка отскакивается следующим образом. На построенной части кривой $g_{\Delta}^{(n)}(z^{(n)}(j))$ перебираем по порядку точки, начиная с последней, и находим первую точку $x_{\Delta}^{(n)}(\hat{k})$, принадлежащую множеству $P_1^{(n)}(\hat{i}+1)$. Если отрезок $[x_{\Delta}^{(n)}(\hat{k}), x_{\Delta}^{(n)}(\hat{k}+1)]$ не пересекается с той частью границы множества $P_1^{(n)}(\hat{i}+1)$, которая соответствует вектору ℓ^* , то в качестве промежуточ-

чной точки отрезка берем точку $y^{(n)}$ (рис. 5). В противном случае переходим к множеству $P_1^{(n)}(\hat{i}+2)$ и повторяем процедуру поиска, начиная с точки y_* (рис. 6).

Перебор множеств $P_1^{(n)}(i)$ осуществляется в следующем порядке:

$$P_1^{(n)}(\hat{i}+1), P_1^{(n)}(\hat{i}+2), \dots, P_1^{(n)}(s), P_1^{(n)}(1), \dots, P_1^{(n)}(\hat{i}).$$

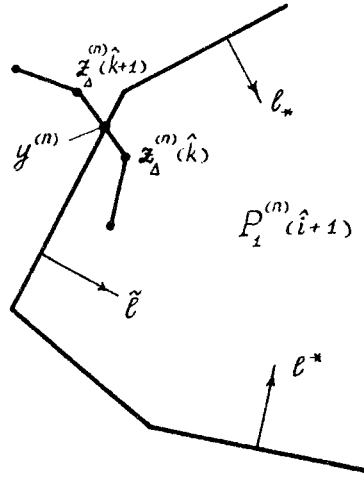
Будем говорить, что точки отрезка нет, если для некоторого множества $P_1^{(n)}(\hat{i})$, $1 \leq \hat{i} \leq s$, на построенной части кривой $g_{\Delta}^{(n)}(z^{(n)}(j))$ нет точки, принадлежащей множеству $P_1^{(n)}(\hat{i})$. Если точки отрезка нет, то построение ветви обрываем. В том случае, когда промежуточная точка отрезка найдена, ей сопоставляется вектор $\tilde{\ell}$ (рис. 5) и номер i соответствующего множества $P_1^{(n)}(i)$.

После определения точки $y^{(n)}$ продолжаем построение ветви $g_{j\Delta}^{(n)}$. Из точки $y^{(n)}$ переходим в точку $z_{\Delta}^{(n)}(\hat{k}+1) = y^{(n)} + \Delta \cdot \gamma^{(n)}(\tilde{\ell})$. Вычисляем $L^{(n)}(i, z_{\Delta}^{(n)}(\hat{k}+1))$ на множестве $\Gamma^{(n)}(i)$ и переходим в точку

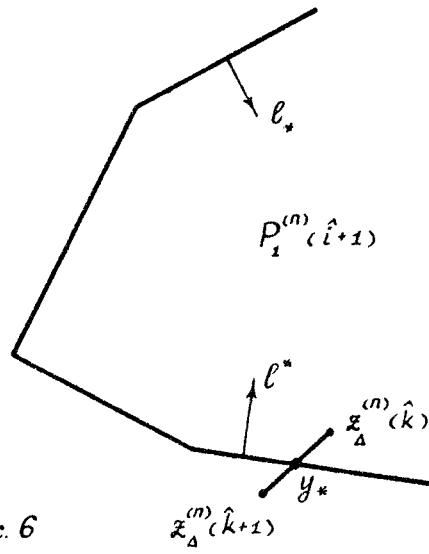
$$z_{\Delta}^{(n)}(\hat{k}+2) = z_{\Delta}^{(n)}(\hat{k}+1) + \Delta \cdot \gamma^{(n)}(L^{(n)}(i, z_{\Delta}^{(n)}(\hat{k}+1)))$$

и т.д. до тех пор, пока существует $L^{(n)}(i, z_{\Delta}^{(n)}(k)) \in \Gamma^{(n)}(i)$. При этом точки с номерами от $\hat{k}+1$ до \bar{k} , полученные при построениях на основании корней из множества $\Gamma^{(n)}(\hat{i})$, отбрасываем, заменяя их новыми.

Пусть наконец найдена такая точка $z_{\Delta}^{(n)}(\tilde{k})$, что $z_{\Delta}^{(n)}(\tilde{k}) \in S^{(n)}(i)$, а $z_{\Delta}^{(n)}(\tilde{k}-1) \in S^{(n)}(i)$. Тогда



Puc. 5



Puc. 6

при $i = i_*$ построение ветви заканчиваем, а при $i < i_*$ переходим к отысканию очередной промежуточной точки отрезка, из которой можно продолжать построения.

Процесс построения ветви продолжается до тех пор, пока либо не сможем найти промежуточную точку отрезка, либо дойдем до множества $\Gamma^{(n)}(i)$ с номером $i = i_*$.

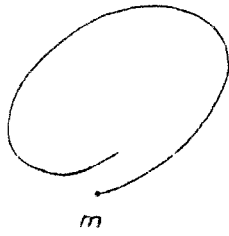
Заметим, что если построения начинались с корней в множестве $\Gamma^{(n)}(\hat{i})$, где \hat{i} больше заданного числа i_* , то от множества $\Gamma^{(n)}(\hat{i})$ переходим к множеству $\Gamma^{(n)}(\hat{i} + 1)$ и т.д. до $\Gamma^{(n)}(3)$, затем к множеству $\Gamma^{(n)}(1)$ и т.д. до $\Gamma^{(n)}(i_*)$.

Ветви ломаных $g_{\Delta}^{(1)}(m)$, $g_{\Delta}^{(2)}(m)$ строятся поочередно. Перед построением очередной ветви $g_{k\Delta}^{(n)}$ определяется ее начальная точка $q^{(n)}(k)$ (точка отрезка), находящаяся на кривой $g_{\Delta}^{(n)}(z^{(n)}(k-1))$. Поиск точки отрезка происходит также, как и поиск промежуточной точки отрезка. Если точки отрезка для очередной ветви $g_{k\Delta}^{(n)}$ нет, то построение кривой $g_{\Delta}^{(n)}(m)$ обрываем.

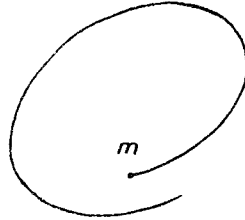
Точка $z^{(n)}(j)$ есть первая с конца точка на кривой $g_{j\Delta}^{(n)}$, принадлежащая множеству $P_2^{(n)}(i)$, где номер i определяется тем множеством $\Gamma^{(n)}(i)$, с которого начиналось построение ветви (напомним, что $z^{(n)}(1) = m$).

Кривые $g_{\Delta}^{(1)}(m)$, $g_{\Delta}^{(2)}(m)$ могут получаться закручивающимися (рис. 7) и раскручивающимися (рис. 8). Редко встречаемая на практике ситуация замыкания кривой на себя отнесена в программе к закрутке кривой.

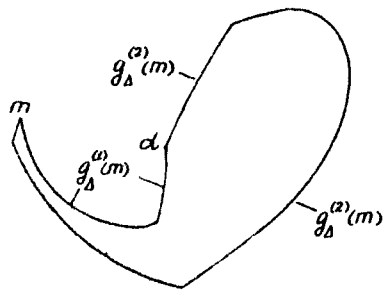
В процессе построений производится анализ взаимного расположения кривых. При построении кривой $g_{j\Delta}^{(1)}$ проверяется пересечение с кривой $g_{\Delta}^{(2)}(z^{(2)}(j))$ - частью



Puc. 7.



Puc. 8



Puc. 9.

построенной на данный момент кривой $g_{\Delta}^{(2)}(m)$ от точки $v^{(2)}(j)$. Этот тип пересечения будем называть α -пересечением. Множество B_{Δ} в случае α -пересечения заключено между построенными кривыми (рис. 9). При построении кривой $g_{j\Delta}^{(2)}$ проверяется пересечение с кривой $g_{\Delta}^{(1)}(v^{(1)}(j-1))$ - ξ -пересечение. На рис. 10 показан возможный вид множества B_{Δ} в случае ξ -пересечения. В том случае, когда кривая $g_{\Delta}^{(1)}(m)$ является раскручивающейся и пересекает $g_{\Delta}^{(2)}(m)$, пересечение назовем $\hat{\xi}$ -пересечением. Логика работы алгоритма в случае $\hat{\xi}$ -пересечения напоминает логику при ξ -пересечении. Множество Ω , ограниченное кривыми $g_{\Delta}^{(1)}(m)$, $g_{\Delta}^{(2)}(m)$, построенными до точки $\hat{\xi}$ -пересечения, не входит в множество B_{Δ} . Вид множества B_{Δ} в случае $\hat{\xi}$ -пересечения определяется поведением ломаной $g_{\Delta}^{(2)}(m)$ после точки $\hat{\xi}$ -пересечения. А именно: если $g_{\Delta}^{(2)}(m)$ имеет предельный цикл, то $B_{\Delta} = \Omega_1 \setminus \text{int } \Omega$, где Ω_1 - множество, ограниченное предельным циклом (рис. 11), если же $g_{\Delta}^{(2)}(m)$, раскручиваясь, не имеет предельного цикла, то $B_{\Delta} = R^2 \setminus \text{int } \Omega$.

На самом деле пересечения проверяются не с указанными кривыми целиком, а лишь с некоторыми их участками. Эти участки определяются при помощи точек $q^{(n)}(j)$, $v^{(n)}(j)$. В процессе построений либо происходит пересечение ломаных $g_{\Delta}^{(1)}(m)$, $g_{\Delta}^{(2)}(m)$, либо нет. Если пересечение произошло, то его можно отнести к одному из трех типов: α -пересечение, ξ -пересечение, $\hat{\xi}$ -пересечение.

Пусть $i_1, i_2 \in \overline{1,3}$ таковы, что $m \in S^{(1)}(i_1) \cap S^{(2)}(i_2)$. Если ломаная $g_{\Delta}^{(n)}(m)$, $n=1,2$, не обрывается прежде, чем будет получена точка $x_{\Delta}^{(n)}(k) \in$

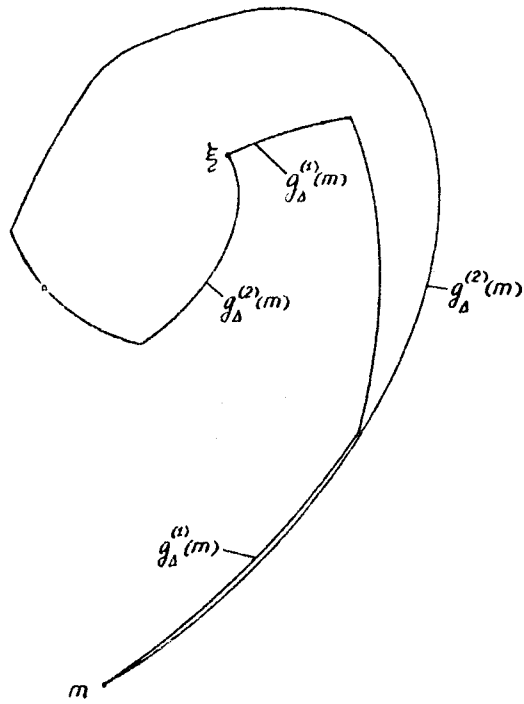


Рис. 10.

$g_{\Delta}^{(n)}(m)$, $k > 1$, такая, что при некоторых $j_1, j_2 \in \overline{1, 3}$ выполнены неравенства

$$L_1^{(n)}(j_1, x_{\Delta}^{(n)}(k-1))L_2^{(n)}(i_n, m) - L_2^{(n)}(j_1, x_{\Delta}^{(n)}(k-1))L_1^{(n)}(i_n, m) \geq 0,$$

$$L_1^{(n)}(j_2, x_{\Delta}^{(n)}(k))L_2^{(n)}(i_n, m) - L_2^{(n)}(j_2, x_{\Delta}^{(n)}(k))L_1^{(n)}(i_n, m) \leq 0,$$

означающие, что кривая $g_{\Delta}^{(n)}(m)$ совершила "оборот" (рис. 7,8), то производится анализ закрутки-раскрутки кривой $g_{\Delta}^{(n)}(m)$. Логика работы алгоритма зависит от результатов анализа. Например, в том случае, когда $g_{\Delta}^{(1)}(m)$ закручивается, а $g_{\Delta}^{(2)}(m)$ раскручивается, кривые $g_{\Delta}^{(1)}(m)$ и $g_{\Delta}^{(2)}(m)$ не пересекаются. Тем не менее, в такой ситуации построение ломаной $g_{\Delta}^{(1)}(m)$ прекращается. Если при этом собственные значения матрицы A имеют неположительные вещественные части, то множество B_{Δ} - вся плоскость. В противном случае множество B_{Δ} ограничено предельным циклом кривой $g_{\Delta}^{(2)}(m)$ и в программе производится поиск некоторой кривой, охватывающей множество B .

Поясним, как ищется эта кривая. Из некоторой точки x на ломаной $g_{\Delta}^{(2)}(m)$ по направлению вектора $-L^{(2)}(i, x)$ переходим в точку $p = x - \lambda \cdot L^{(2)}(i, x)$. Здесь i - номер множества $S^{(n)}(i) \ni x$, λ - заданное нами положительное число. Из точки p строим кривую $g_{\Delta}^{(2)}(p)$ до тех пор, пока не сработает анализ закрутки-раскрутки. Если $g_{\Delta}^{(2)}(p)$ раскручивается, то увеличиваем число λ и повторяем построения из точки x . Если $g_{\Delta}^{(2)}(p)$ закручивается, то множество, ограниченное кривой $g_{\Delta}^{(2)}(p, b)$ и отрезком $[b, p]$, включает в себя множество B (рис.12).

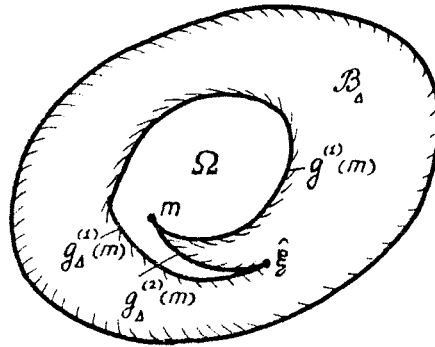


Рис. 11

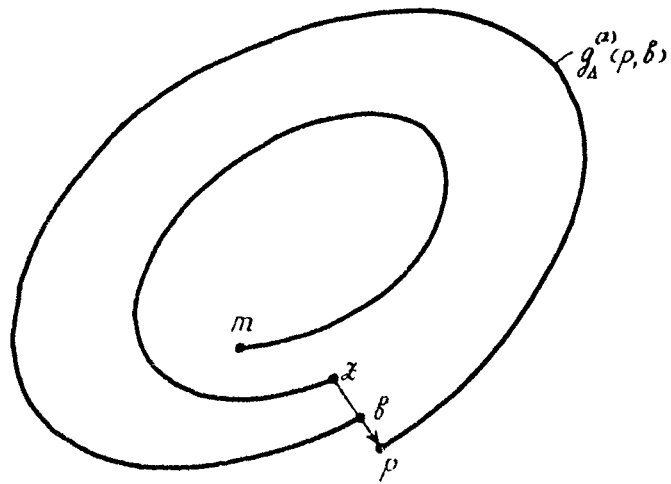


Рис. 12

3. Описание программы

Программа написана на языке ФОРТРАН-ДУБНА для БЭСМ-6.
Имя головной программы G , подпрограммы: $NORMAL$,
 $ORDER$, $ADDVEC$, $CHECK$, $KOPX$, $GRAF$, $TURN$,
 $F1$, CLX , F , $CONES$, BB , $BSIGN$, $TOG1$,
 $TOG2$, $P1BG2$, $BTT2$, $BTT1$, $PBG1$, $PBG2$,
 BDE . Программа предназначена для построения множества
 \mathcal{B}_Δ . Исходными данными для работы программы являются: вер-
шины многоугольников P , Q , матрица A системы (I),
координаты точки m на плоскости, шаг построений Δ .

4. Используемые переменные

$AA(2,2)$ - двумерный массив, содержащий матрицу A сис-
темы (I),
 $A1(20)$ - одномерный массив, содержащий первые коорди-
наты вершин многоугольника P ,
 $B1(20)$ - одномерный массив, содержащий вторые коорди-
наты вершин многоугольника P ,
 $A(20)$ - одномерный массив, содержащий первые коорди-
наты вершин многоугольника Q ,
 $B(20)$ - одномерный массив, содержащий вторые координаты
вершин многоугольника Q ,
 $ZX1, ZX2$ - координаты точки m на плоскости,
 ΔT - шаг построений Δ ,
 LV - количество вершин многоугольника P ,
 L - количество вершин многоугольника Q ,
 $Z11(1000)$ - одномерный массив первых координат точек ло-
маной $g_\Delta^{(1)}(m)$,

- $Z12(1000)$ - одномерный массив вторых координат точек
 ломаной $g_{\Delta}^{(1)}(m)$,
- $Z21(2000)$ - одномерный массив первых координат точек
 ломаной $g_{\Delta}^{(2)}(m)$,
- $Z22(2000)$ - одномерный массив вторых координат точек
 ломаной $g_{\Delta}^{(2)}(m)$,
- $PT0 = \begin{cases} TRUE & , \text{ если найдена точка отрезка на кривой } g_{j\Delta}^{(2)} , \\ FALSE & - \text{ в противном случае,} \end{cases}$
- $PT01 = \begin{cases} TRUE & , \text{ если найдена точка отрезка на кривой } g_{j\Delta}^{(1)} , \\ FALSE & - \text{ в противном случае,} \end{cases}$
- $PP = \begin{cases} TRUE & , \text{ если обнаружено } \alpha \text{-пересечение кривой } g_{\Delta}^{(1)}(m) \text{ с кривой } g_{\Delta}^{(2)}(m) , \\ FALSE & - \text{ в противном случае,} \end{cases}$
- $PKP = \begin{cases} TRUE & , \text{ если зафиксировано } \xi \text{-пересечение кривой } g_{\Delta}^{(2)}(m) \text{ с кривой } g_{\Delta}^{(1)}(m) , \\ FALSE & - \text{ в противном случае,} \end{cases}$
- $PKP1 = \begin{cases} TRUE & , \text{ если зафиксировано } \hat{\xi} \text{-пересечение кривой } g_{\Delta}^{(2)}(m) \text{ с кривой } g_{\Delta}^{(1)}(m) , \\ FALSE & - \text{ в противном случае,} \end{cases}$
- $PR = \begin{cases} TRUE & , \text{ если обнаружена раскрутка кривой } g_{\Delta}^{(2)}(m) , \\ FALSE & - \text{ в противном случае,} \end{cases}$
- $PP1 = \begin{cases} TRUE & , \text{ если обнаружена раскрутка кривой } g_{\Delta}^{(1)}(m) , \\ FALSE & - \text{ в противном случае.} \end{cases}$

В в о д д а н н ы х и в ы в о д р е з у л ь -
т а т о в

Все исходные данные для работы программы вводятся с перфокарт. Порядок ввода указан в таблице. Перед началом счета на печать выводятся все исходные данные задачи.

Результатом работы программы является графическое изображение границы множества B_{Δ} на АЦПУ. Кроме того, на магнитную ленту записывается информация для рисования границы множества B_{Δ} при помощи графопостроителя.

В процессе счета на печать могут быть выданы следующие сообщения:

1. " *B IS EQUAL TO M* " - это означает, что множество B_{Δ} состоит из одной точки m ; в этом случае никаких построений из точки m не делается и счет по программе на этом заканчивается.

2. " *B IS NOT EQUAL TO M* " - это означает, что $B_{\Delta} \neq \{m\}$; в этом случае из точки m проводятся построения в соответствии с приведенным во втором разделе алгоритмом.

3. " *THERE ARE FEW POINTS FOR G1* " ("...*FOR G2*") это означает, что число точек на ломаной $g_{\Delta}^{(1)}(m)$ ($g_{\Delta}^{(2)}(m)$) превысило размерности массивов $Z11$, $Z12$ ($Z21$, $Z22$), отведенных для хранения кривой $g_{\Delta}^{(1)}(m)$ ($g_{\Delta}^{(2)}(m)$). В этом случае на АЦПУ выдаются изображения кривых $g_{\Delta}^{(1)}(m)$, $g_{\Delta}^{(2)}(m)$, построенных к данному моменту. Рекомендуется повторить счет по программе, увеличив либо размерности указанных массивов, либо шаг Δ .

4. " *THE SET B IS THE WHOLE PLANE* " - это означает, что множество B_{Δ} есть вся плоскость. Ника -

Таблица

Номер перфокарты	Вводимая информация	Формат
1	LV, L	2I2
2	$A1(1), B1(1)$	2F6.3
	\vdots	\vdots
$LV+1$	$A1(LV), B1(LV)$	2F6.3
$LV+2$	$A(1), B(1)$	2F6.3
\vdots	\vdots	\vdots
$LV+L+1$	$A(L), B(L)$	2F6.3
$LV+L+2$	AA (по столбцам)	4F6.3
$LV+L+3$	ZX1, ZX2, DT	F7.3, 2F6.3

кой графической информации в этом случае на АЦПУ не выдается.

5. " *IT IS NECESSARY TO ENLARGE THE LENGTH OF ARRAYS Z21, Z22 FOR THE CONSTRUCTION OF LIMIT CYCLE OF CURVE G2* ". Эта надпись печатается

в том случае, когда кривая $g_A^{(2)}(m)$ имеет предельный цикл, и при поиске линии, охватывающей множество B , оказалось, что заданной размерности массивов $Z21$, $Z22$ недостаточно. Рекомендуется увеличить эти размерности и повторить счет.

6. " *THE SET B IS THE WHOLE PLANE WITHOUT MARKED SET* " - это означает, что множество B_A совпадает со всей плоскостью за вычетом множества, ограниченного выданной на АЦПУ замкнутой кривой.

7. " *THE MARKED SET IS NOT A SUBSET OF B* ". Эта надпись выдается в том случае, когда зафиксировано $\hat{\xi}$ -

пересечение кривой $g_A^{(2)}(m)$ с кривой $g_A^{(1)}(m)$ и у кривой $g_A^{(2)}(m)$ имеется предельный цикл. При этом, если линия P , охватывающая множество B , найдена, то на АЦПУ будут выданы две замкнутые кривые: кривая P_1 , составленная из построенных до точки $\hat{\xi}$ -пересечения линий $g_A^{(2)}(m)$, $g_A^{(1)}(m)$, и охватывающая ее линия P .

Множество B_A получится, если из множества, ограниченного кривой P , исключить множество, ограниченное кривой P_1 .

На рис. II штриховкой показано множество B_A для этого случая. В том случае, когда линия P не найдена, кроме сообщения 7), печатается сообщение 5). На АЦПУ выдается замкнутая кривая P_1 . Внутренность ограниченного этой кривой множества не принадлежит B_A . Для окончательного построения множества B_A (т.е. получения линии P) рекоменду-

ется повторить счет, увеличив размерности массивов $Z21$,
 $Z22$.

Если в процессе счета по программе выдано лишь сообщение 2), то на АЦПУ печатается замкнутая кривая, ограничивающая множество B_4 .

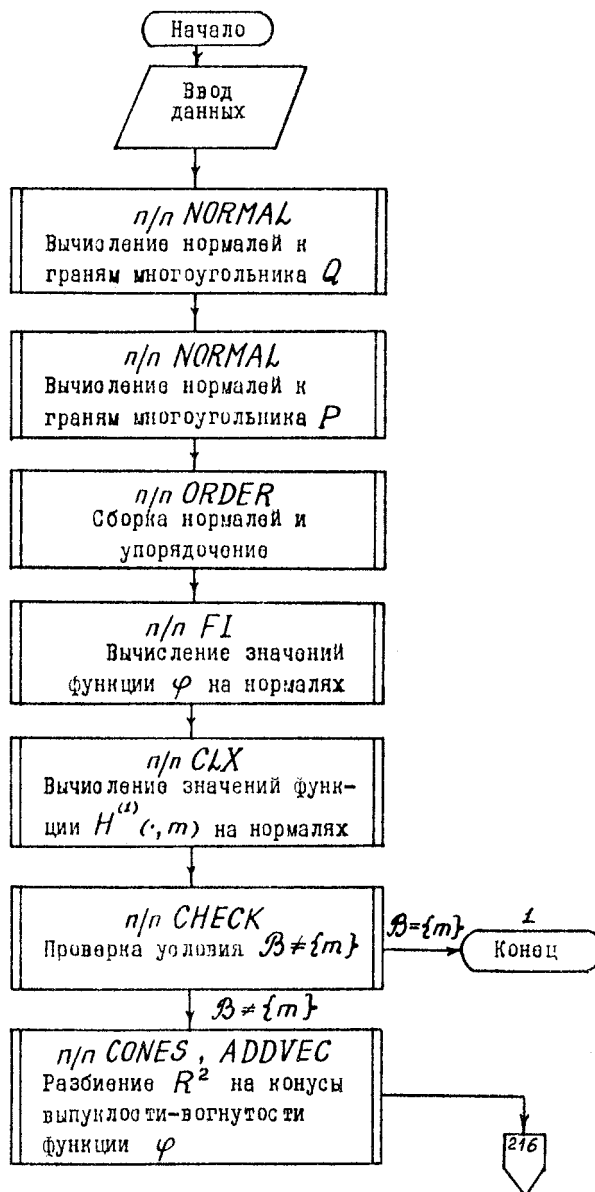
Б л о к - с х е м а

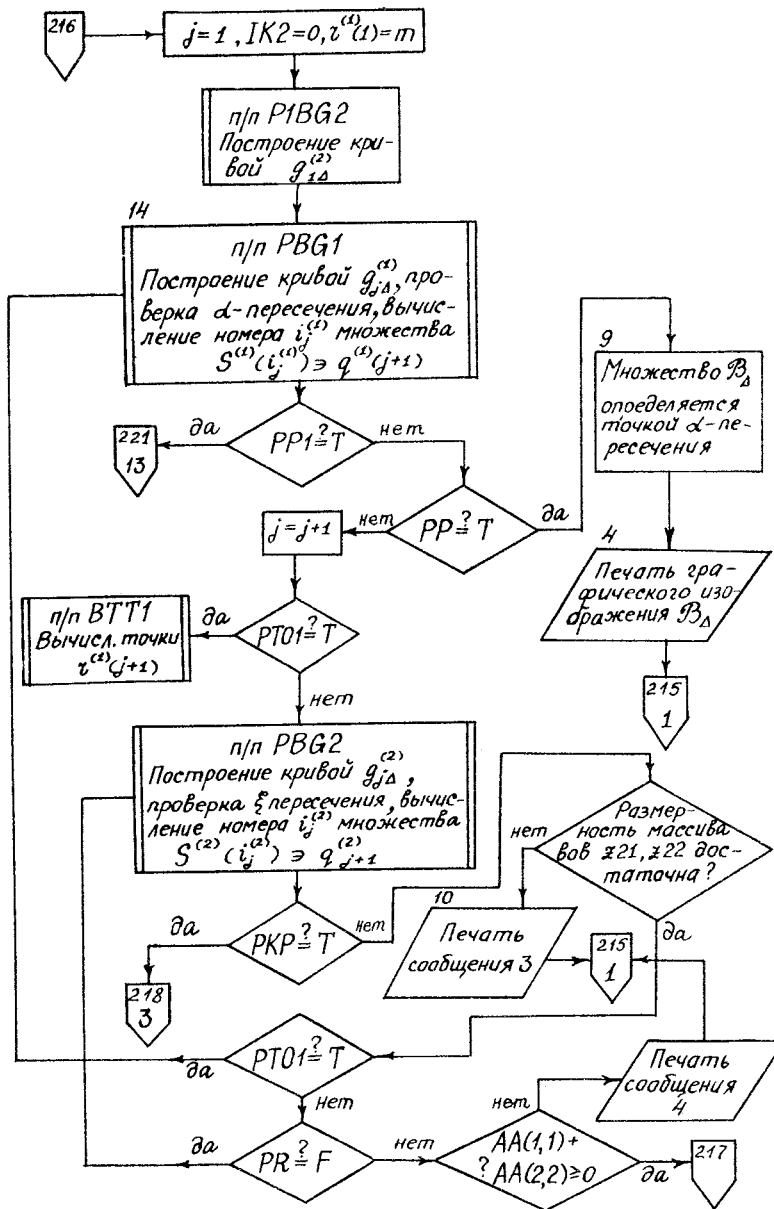
В блок-схеме (рис. 13), кроме уже введенных обозначений, использовано обозначение $g^{(n)}(z_1, z_2)$, означающее часть построенной на данный момент кривой от точки z_1 до точки z_2 . Ради краткости и упрощения опущены блоки, связанные с определением тех участков кривых, с которыми надо проверять пересечение. Не указываются также пределы, в которых строится каждая ветвь $g_{j\Delta}^{(n)}$. На самом деле перед построением $g_{j\Delta}^{(n)}$ задаются начальный (i_H) и конечный (i_k) номера множеств $\Gamma^{(n)}(i)$, используемых при построении $g_{j\Delta}^{(n)}$.

О с о б е н н о с т и п р о г р а м м ы

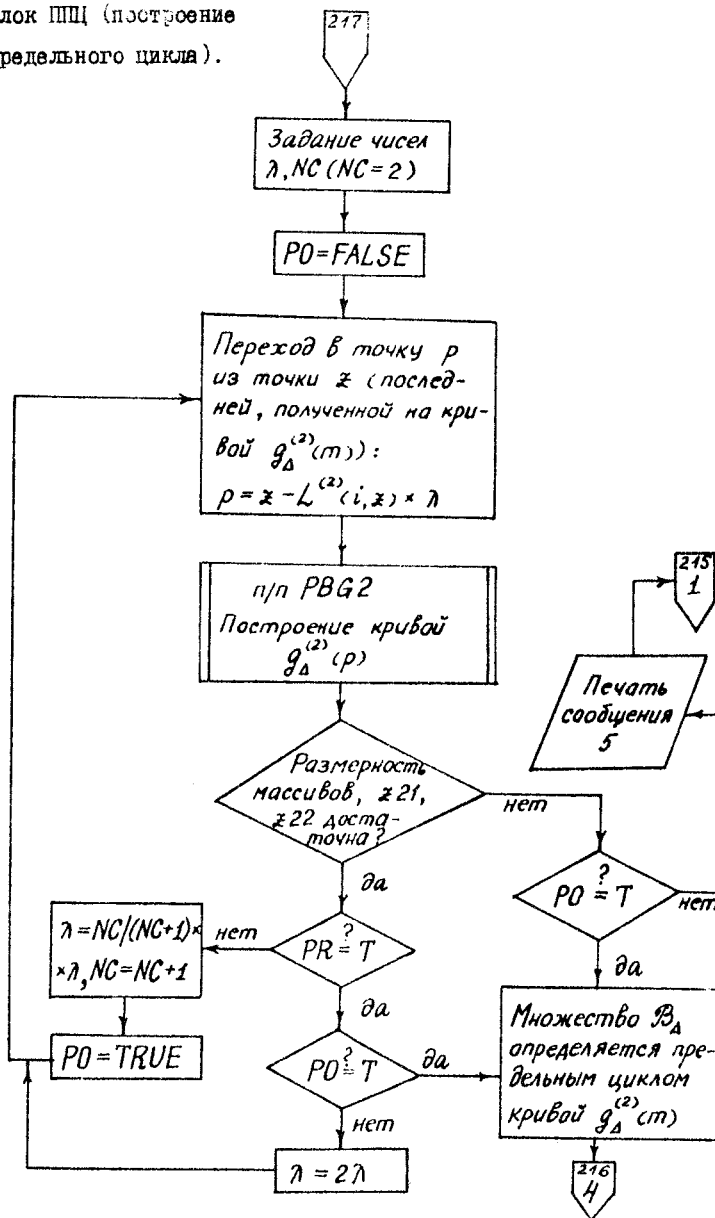
Программа рассчитана на случай, когда выпуклые многоугольники P , Q имеют не более 20 вершин каждый. При необходимости можно увеличивать допустимое число вершин многоугольников P , Q , увеличивая размерности массивов A , B , C , D , $A1$, $B1$, E , F , $P1$, $P2$, RV , REC , $HM1$, $HM2$, ZFM , $ADD1$, $ADD2$, NOV , NOM , NDB . При этом нужно соблюдать правило: если число вершин многоугольника P равно k , а число вершин многоугольника Q равно s , то перечисленные мас -

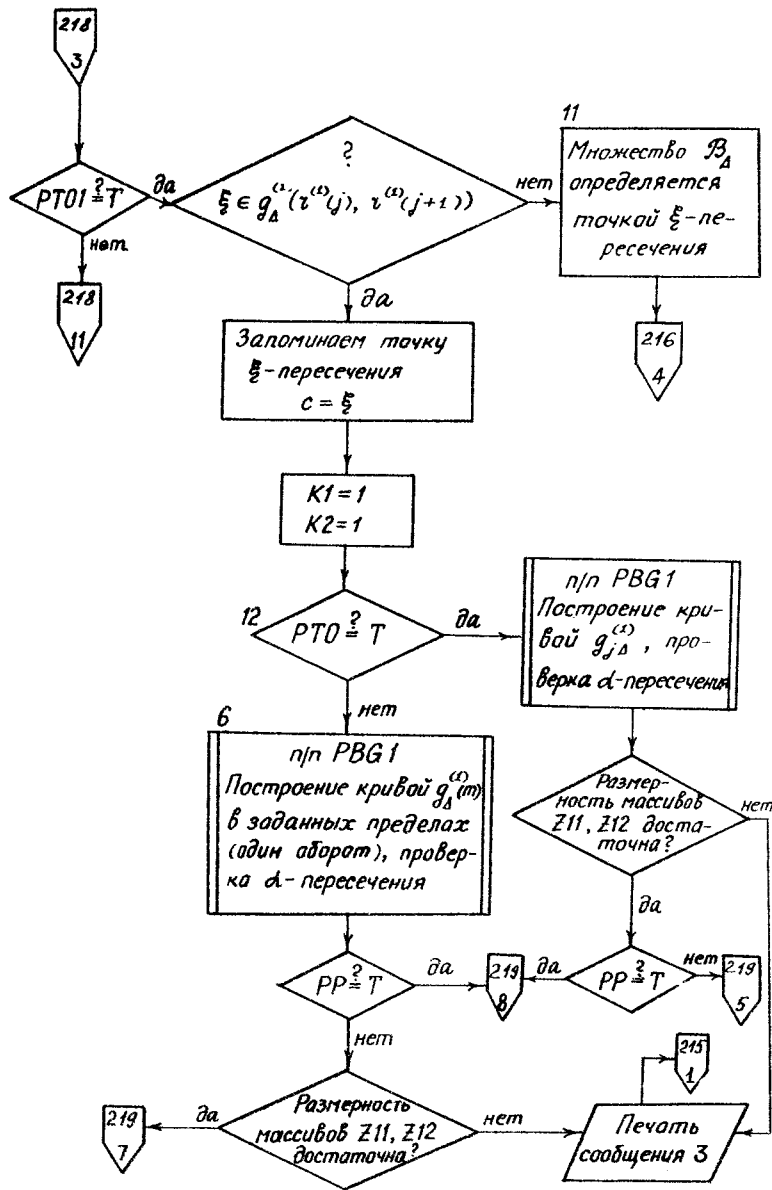
Б л о к - с х е м а

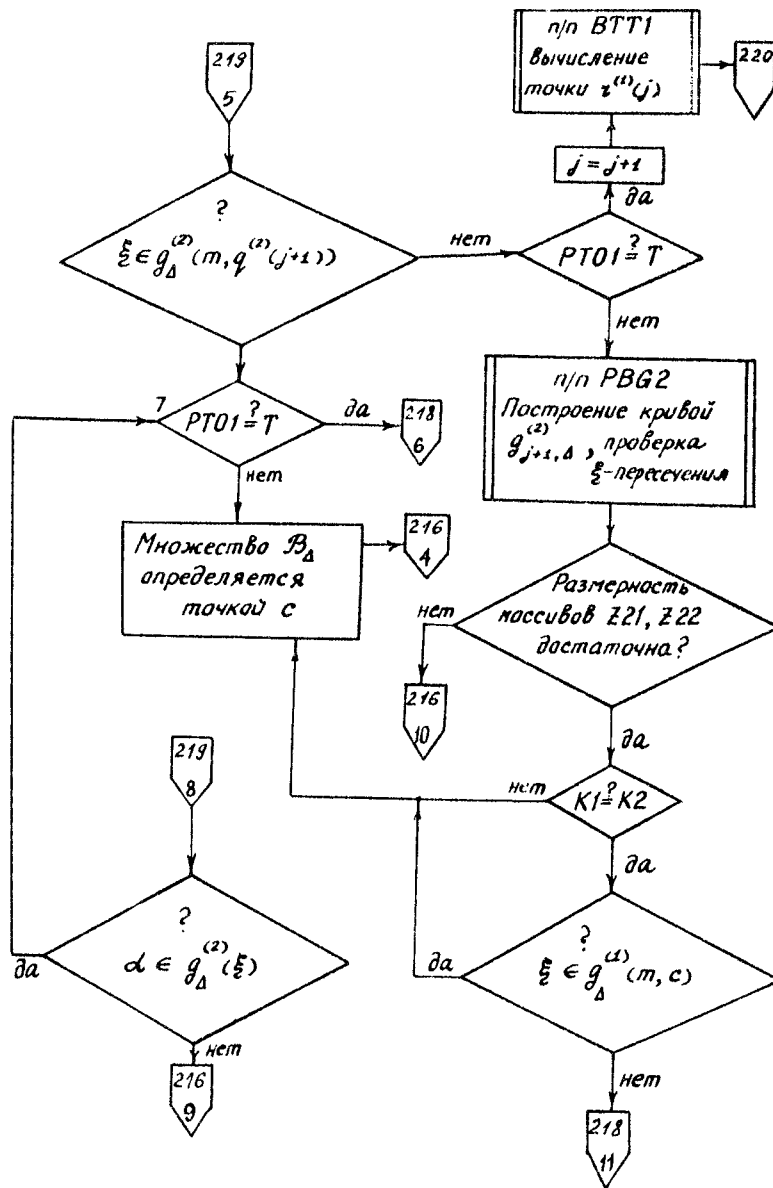


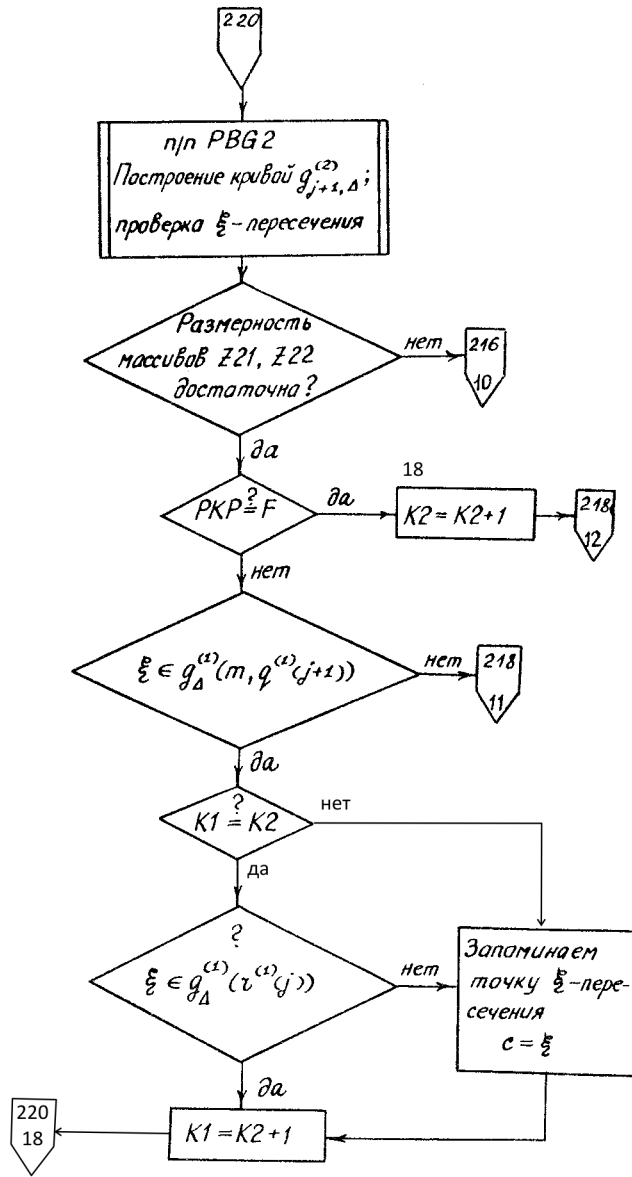


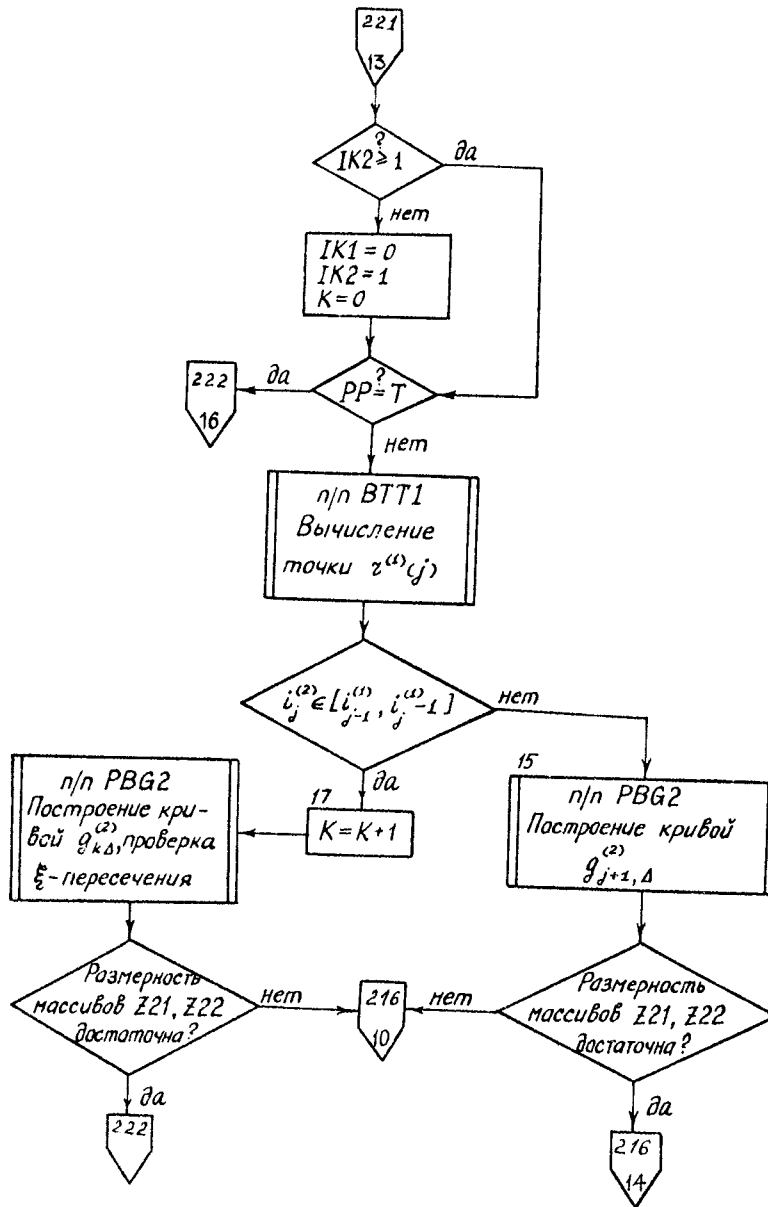
Блок ПЩ (построение предельного цикла).











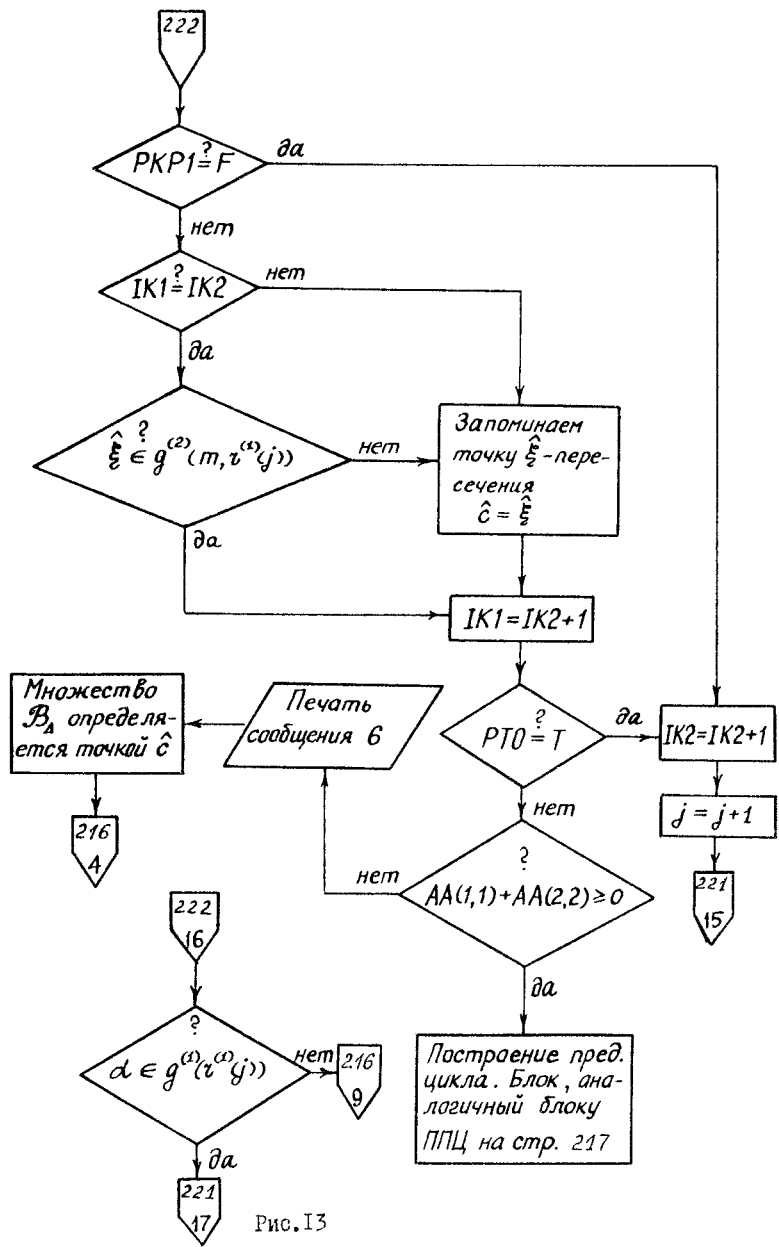


Рис. 13

сивы должны иметь следующие размерности:

$A, B, C, D (s+1),$
 $A1, B1, E, F (k+1),$
 $P1, P2, (k+s+2),$
 $RV, REC (k+s+1),$
 $HM1, HM2, ZFM (3k+2s+4)$
 $ADD1, ADD2, NDB (2k+4),$
 $HOV(k), NOM (k+3)$

Как уже отмечалось, в программе предусмотрена запись графической информации для последующего вывода на графопостроитель. В связи с этим в пакете должны присутствовать специальные карты, обеспечивающие эту запись в соответствии с используемой операционной системой. Например, в ОС ДИАПАК паспорт задачи должен содержать карты:

- 1) ОТР _ ГРАФИК, 1 ^
- 2) ОПФ _ 1, <ИМЯ ФАЙЛА>, 52, ПРВ=(10, 1024, 2, 2), РЕ=(С, 3), ФЗП=П, УСА=ОРФ, ^

а среди управляющих карт нужно поместить карту

* LIBRARY:3.

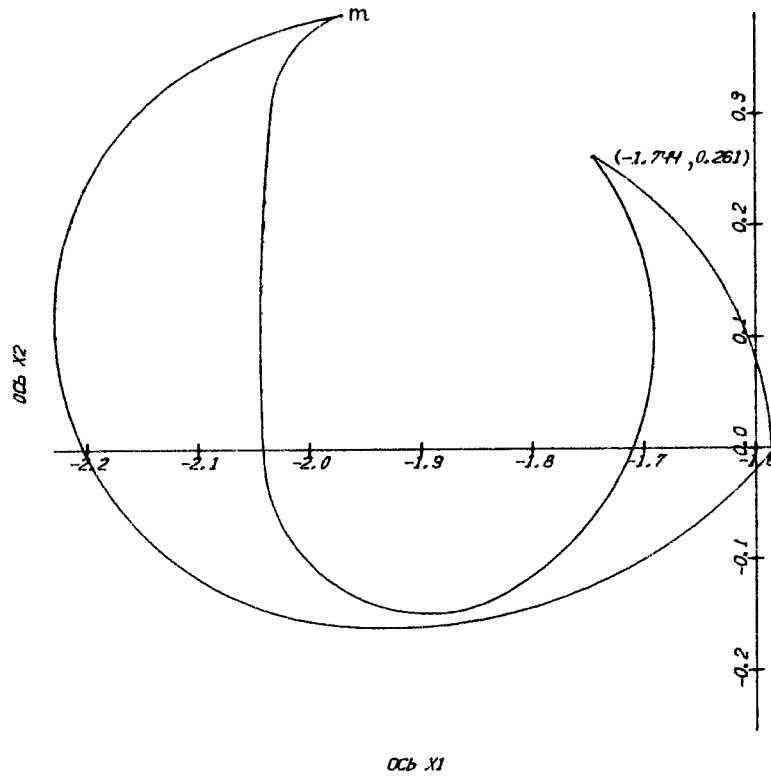
К о н т р о л ь н ы й п р и м е р

На рис. I4 показано множество \mathcal{B}_Δ , построенное для следующих исходных данных: вершины многоугольника P :

$(0,0)$, $(0.1, -1.9)$, $(2.52, -0.47)$;

вершины многоугольника Q : $(0,0)$, $(-2.53, -1.49)$,
 $(-0.2, -1.93)$; шаг Δ равен 0.01 .
Символами $M1$, $M2$ обозначены координаты точки m . Матрица A была выбрана в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0.05 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$



$M1 = -1.970 \quad M2 = .390$

Рис. 14

ТЕКСТ ПРОГРАММЫ

```

PROGRAM G
DIMENSION C(21),D(21),
E(21),F(21),P1(42),
P2(42),AA(2,2),RV(41),
REC(41),HM1(104),HM2(104)
,ADD1(44),ADD2(44),
ZEM(104)
INTEGER NOV(20),NOM(23)
,NDB(44)
INTEGERD1,E1,OG1,OG2,EH
,DE,PG1,PG1C,PG2,E2,D2
LOGICAL PTO,PE,PTO1,PKP
,PR,PZ,PKP1,PZ1,PP1,PO,
PK
COMMON/P1/KJ1,KJ2,
Z11(1000),Z12(1000),
Z21(2000),Z22(2000)
COMMON/P2/LV,L,A1(20),
B1(20),A(20),B(20)
COMMON/P4/DT,ZX1,ZX2,N,
XMIN,XMAX,YMIN,YMAX
COMMON/LXTP/DD
DIMENSION T(6000)
150 FORMAT(1X,F6.3,5X,F6.3)
151 FORMAT(1X,'MATRIX A :',
4F8.3)
152 FORMAT(1X,3HM1=F8.3/1X,
3HM2=F8.3/1X,3HDT=F8.3)
153 FORMAT(1X,'TOPS OF Q')
154 FORMAT(1X,'TOPS OF P')
502 FORMAT(1X,'THE SET B IS
THE WHOLE PLANE WITHOUT
MARKED SET')
511 FORMAT(1X,'THE MARKED
SET IS NOT A SUBSET OF
B')
518 FORMAT(1X,'IT IS NECES-
SARY TO ENLARGE THE
LENGTH OF ARRAYS Z2 ,
Z22 FOR THE CONSTRUCTI-
ON OF LIMIT CYCLE
OF CURVE G2')
C ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ.
READ1,L,LV
READ30,(A(I),B(I),I=1,
L)
5 FORMAT(1X,3HM1=F8.3/1X,
3HM2=F8.3/1X,3HDT=F8.3)

```

На страницах 227 - 247 идёт текст программы на Фортране

Л и т е р а т у р а

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
3. Пацко В.С. Задача качества в линейных дифференциальных играх второго порядка. — В сб.: Дифференциальные игры и задачи управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. с. 167-227.
4. Пацко В.С. Условия уклонения от точки в дифференциальной игре второго порядка. — Прикл. матем. и мех., 1972, т. 36, вып. 6, с. 1007-1014.
5. Пацко В.С. Уклонение от точки в дифференциальной игре второго порядка. — В сб.: Дифференциальные системы управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979, с. 57-79.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1970. — 331 с.