ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1991

ТОМ 316 № 5

УДК 62–50 МАТЕМАТИКА

© М.А. ЗАРХ

КРИТЕРИЙ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

(Представлено академиком Н.Н. Красовским 24 V 1990)

Известно [1, 2], что если функция цены игры дифференцируема, то она удовлетворяет основному уравнению теории дифференциальных игр (уравнению Беллмана–Айзекса). Однако дифференциальные игры с гладкой функцией цены – весьма узкий класс игр. В общем случае функция цены удовлетворяет основному уравнению лишь в точках дифференцируемости. Но таким свойством обладает не только функция цены, а целое семейство функций. В связи с этим переходят к модификации критерия функции цены, заменяя уравнение Беллмана–Айзекса на соотношения, которые должны выполняться и в точках гладкости, и в точках недифференцируемости. Так, в работе [3] для нелинейных дифференциальных игр с терминальной функцией платы и геометрическими ограничениями на управления игроков получен критерий в форме двух неравенств. В этих соотношениях, в отличие от классического уравнения Беллмана–Айзекса, фигурируют не частные производные функции цены, а производные по направлению.

В настоящей работе рассматриваются линейные дифференциальные игры с выпуклым терминальным функционалом платы. Получен критерий функции цены, записываемый в виде одного равенства, которое можно интерпретировать как уравнение Беллмана–Айзекса в терминах производных по направлению. В основе полученного результата лежат два свойства: u-стабильность [1] множества уровня функции цены и установленное в [4] свойство "отталкивания", более сильное, чем v-стабильность [1] дополнения к множеству уровня. Указанные свойства позволили также получить соотношение, характеризующее динамику развития сечений множества уровня функции цены (максимального стабильного моста). А именно, выписано выражение для правой производной по времени опорной функции сечений моста.

1. Пусть динамика объекта описывается соотношениями

$$\dot{x} = B(t)u + C(t)v, \quad x \in R^n, \quad u \in P, \quad v \in Q. \tag{1}$$

Здесь u, v – векторные управляющие параметры первого и второго игроков, P, Q – выпуклые компакты, матрицы-функции $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица. Процесс управления заканчивается в заданный момент ϑ, показатель качества определяется значением выпуклой терминальной функции $\gamma(x(\vartheta))$ на положении $x(\vartheta)$. Первый игрок минимизирует, а второй максимизирует величину $\gamma(x(\vartheta))$. Отметим, что линейные дифференциальные игры с фазовой переменной в правой части приводятся к виду (1) при помощи известной [1] замены фазовой переменной.

Введем необходимые обозначения. Пусть $\Gamma(t, x)$ – функция цены игры (1), $W_c = \{(t, x) \in (-\infty, \vartheta] \times R^n\colon \Gamma(t, x) \leqslant c\}$ – ее множество уровня (максимальный стабильный мост), $W_c(t) = \{x \in R^n\colon (t, x) \in W_c\}$ – сечение W_c в момент $t \leqslant \vartheta$.

Пусть точка x принадлежит границе множества $W_c(t)$, причем $\operatorname{int} W_c(t) \neq \phi$. Обозначим через $K(t, x)$ конус линейности опорной функции $\rho(\cdot, W_c(t))$, т.е.

$$K(t, x) = \{l \in R^n\colon \rho(l, W_c(t)) = l'x\}.$$

Иначе $K(t, x)$ можно определить как коническую оболочку субдифференциала в точке x функции $\Gamma(t, x)$. Конус $K(t, x)$ выпуклый, замкнутый, он отличен от нуля и не содержит линейных подпространств. Пусть $L(t, x)$ – совокупность единичных крайних векторов конуса $K(t, x)$. Крайним называется [5] вектор конуса, который нельзя представить в виде суммы двух линейно-независимых векторов конуса. Положим

$$Q(l, t) = \{q \in Q\colon l'C(t)q = \max_{v \in Q} l'C(t)v\}.$$

Множество $Q(l, t)$ есть совокупность экстремальных элементов из Q на векторе l в момент t.

В работе [4] установлено соотношение

$$\rho(l, W_c(t)) + \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} l' \int_t^{t+\Delta} (B(\tau)u(\tau) + C(\tau)q)\,d\tau \geqslant \rho(l, W_c(t+\Delta)) - \sigma\Delta^2, \tag{2}$$

где $l \in L(t, x)$, $q \in Q(l, t)$, $c = \Gamma(t, x)$, $\mathcal{U}$ – совокупность измеримых функций со значениями в P, σ – положительная константа. Неравенство (2) выражает свойство отталкивания системы (1) от границы множества W_c при действии постоянного, экстремального на векторе $l \in L(t, x)$ управления q второго игрока (рис. 1).

2. Зафиксируем параметр c и момент времени t. Предположим, что $\operatorname{int} W_c(t) \neq \phi$. Пусть $L_c(t)$ – объединение векторов из $L(t, x)$, когда x пробегает границу множества $W_c(t)$. Содержательно, $L_c(t)$ есть минимальное множество векторов l, при помощи которого $W_c(t)$ описывается как пересечение полупространств $l'x \leqslant \rho(l, W_c(t))$.

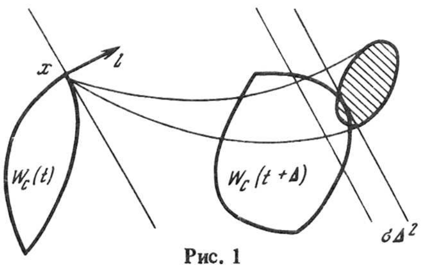

Рис. 1

Т е о р е м а 1. *Для любого вектора $l \in L_c(t)$ существует правая производная по t функции $t \to \rho(l, W_c(t))$. Справедливо равенство*

$$\frac{d\rho(l, W_c(t))}{dt} = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} l'(B(t)u + C(t)v). \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем неравенство (2) в виде

$$\rho(l, W_c(t)) + \min_{u \in P} l' \int_t^{t+\Delta} (B(t)u + C(t)q)\, d\tau \geqslant \rho(l, W_c(t+\Delta)) - \sigma\Delta^2 + \tag{4}$$

$$+ \int_t^{t+\Delta} (\min_{u \in P} l'B(t)u - \min_{u \in P} l'B(\tau)u)\, d\tau + \int_t^{t+\Delta} l'(C(t) - C(\tau))q\, d\tau.$$

Оценив интегралы в правой части, получим

$$\rho(l, W_c(t)) + \min_{u \in P} l'(B(t)u + C(t)q)\Delta \geqslant \rho(l, W_c(t+\Delta)) - \sigma^*\Delta^2, \tag{5}$$

где $\sigma^* = \sigma + \lambda_B \max_{u \in P} |u| + \lambda_C \max_{v \in Q} |v|$, λ_B, λ_C — константы Липшица функций $B(\cdot)$, $C(\cdot)$. Так как $q \in Q(l, t) \subset Q$, то

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} l'(B(t)u + C(t)v) \geqslant \rho(l, W_c(t+\Delta)) - \rho(l, W_c(t)) - \sigma^*\Delta^2.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{\Delta \to +0}} (\rho(l, W_c(t+\Delta)) - \rho(l, W_c(t)))\Delta^{-1} \leqslant \max_{v \in Q} \min_{u \in P} l'(B(t)u + C(t)v).$$

С другой стороны, в работе [6] установлено, что необходимым условием u-стабильности множества W_c является выполнение неравенства

$$\underline{\lim_{\Delta \to +0}} (\rho(l, W_c(t+\Delta)) - \rho(l, W_c(t)))\Delta^{-1} \geqslant \max_{v \in Q} \min_{u \in P} l'(B(t)u + C(t)v)$$

для любого единичного вектора l.

Таким образом, правая производная $\dfrac{d\rho(l, W_c(t))}{dt}$ существует и описывается равенством (3).

З а м е ч а н и е 1. Из соотношения (3) видно, что скорость изменения опорной функции на векторе $l \in L_c(t)$ совпадает с проекцией на l скорости соответствующего экстремального движения.

3. В работе [3] установлены необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяет функция цены дифференциальной игры с нелинейной динамикой $\dot{x} = f(t, x, u, v)$. Для дифференцируемых по направлению функций цены они вклю-

чают краевое условие $\Gamma(\vartheta, x) = \gamma(x)$ и два неравенства

$$(6) \qquad \sup_{v\in Q} \inf_{f\in F(t,x,v)} \frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial(1,f)} \leqslant 0,$$

$$(7) \qquad \inf_{u\in P} \sup_{f\in F(t,x,u)} \frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial(1,f)} \geqslant 0;$$

здесь

$$F(t,x,u) = \mathrm{co}\{f(t,x,u,v), \quad v\in Q\},$$
$$F(t,x,v) = \mathrm{co}\{f(t,x,u,v), \quad u\in P\}.$$

В следующей теореме устанавливается, что для линейных дифференциальных игр неравенства (6), (7) можно заменить одним равенством. При этом мы предполагаем, что функция цены игры дифференцируема по любому направлению.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $\Gamma(t, x)$ была функцией цены игры* (1), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось краевое условие $\Gamma(\vartheta, x) = \gamma(x)$ и равенство*

$$(8) \qquad \sup_{v\in Q} \inf_{u\in P} \frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial(1, B(t)u + C(t)v)} = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть Γ – функция цены. Сначала установим справедливость равенства (8) для позиций (t, x), где $\Gamma(t,x) > \min_y \Gamma(t, y)$. Из свойства отталкивания в форме (5) и липшицевости функции $\Gamma(t, \cdot)$ следует, что для $q \in Q(l, t)$, $l \in L(t, x)$ и любого $u\in P$

$$[\Gamma(t+\Delta, x + (B(t)u + C(t)q)\Delta) - \Gamma(t,x)]\,\Delta^{-1} \geqslant \lambda\sigma^*\Delta;$$

здесь λ – константа Липшица функции $\gamma(x)$. После перехода к пределу при $\Delta \to +0$ получим

$$\frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial(1, B(t)u + C(t)q)} \geqslant 0.$$

Отсюда

$$(9) \qquad \sup_{v\in Q} \inf_{u\in P} \frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial(1, B(t)u + C(t)v)} \geqslant 0.$$

Соотношение (6) применительно к линейной системе (1) можно переписать в виде

$$(10) \qquad \sup_{v\in Q} \inf_{u\in P} \frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial(1, B(t)u + C(t)v)} \leqslant 0.$$

Сопоставляя (9) и (10), получим требуемое равенство (8).

Изложим идею доказательства неравенства (9), а значит, и равенства (8) для позиций (t, x), где $\Gamma(t,x) = \min_y \Gamma(t, y)$. Вводя дополнительную переменную x_{n+1}, рассмотрим дифференциальную игру сближения–уклонения

$$(11) \qquad \begin{gathered} \dot{x} = B(t)u + C(t)v, \quad \dot{x}_{n+1} = 0, \\ x\in R^n, \quad t\leqslant\vartheta, \quad u\in P, \quad v\in Q, \end{gathered}$$

с целевым множеством

$$M = \{z = (x, x_{n+1}):\ \gamma(x) \leqslant x_{n+1} \leqslant \bar{c}\}.$$

Множество M есть срезка надграфика функции γ, лежащая ниже уровня $\bar{c}$. Максимальный стабильный мост W в игре (11) обладает тем свойством, что его сечение $W(t)$ есть срезка надграфика функции цены $\Gamma(t,\cdot)$ игры (1) [7]. Для W, как для моста, выполнено свойство отталкивания.

Если в множестве $L(t, z)$, где $z = (x, \Gamma(t, x))$, содержится вектор $(\mathbf{0}, -1)$, то неравенство (9) следует непосредственно из свойства отталкивания. Для $l = (l_*, l_{n+1}) \in L(t, z)$, $|l_*| > 0$, $l_{n+1} < 0$ из свойства отталкивания в игре (11) получаем свойство отталкивания в игре (1) на векторе $l_*/|l_*|$ с константой $\sigma/|l_*|$. Далее рассуждаем так же, как в случае $\Gamma(t,x) > \min\limits_{y} \Gamma(t,y)$.

Достаточность. Пусть в каждой позиции выполнено (8). Неравенство (6) является прямым следствием равенства (8). Неравенство (7) следует из (8) с учетом общего соотношения inf sup $\geqslant$ sup inf. Таким образом, выполнены дотаточные условия теоремы 3 из [3] и, следовательно, Γ есть функция цены игры. Доказательство закончено.

Замечание 2. В выражении (8) sup inf можно заменить на max min.

Замечание 3. При отсутствии предположения о дифференцируемости Γ по любому направлению можно получить критерий функции цены в виде соотношения

$$\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\frac{\partial_*\Gamma(t,x)}{\partial(1,B(t)u+C(t)v)}=\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\frac{\partial^*\Gamma(t,x)}{\partial(1,B(t)u+C(t)v)}=0,$$

где ∂_*, ∂^* — нижняя и верхняя производные по направлению. Кроме того, нетрудно показать, что найдется пара элементов $u^0 \in P$, $v^0 \in Q$, для которых

$$\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\frac{\partial_*\Gamma(t,x)}{\partial(1,B(t)u+C(t)v)}=\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\frac{\partial^*\Gamma(t,x)}{\partial(1,B(t)u+C(t)v)}=$$

$$=\frac{\partial\Gamma(t,x)}{\partial(1,B(t)u^0+C(t)v^0)}=0,$$

т.е. пара экстремальных элементов, на которых производная по направлению существует.

Институт математики и механики
Уральского отделения Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
30 VI 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974. 2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М., 1985. 516 с. 3. *Субботин А.И.* — ДАН, 1980, т. 254, № 2, с. 293–297. 4. *Зарх М.А., Пацко В.С.* — ПММ, 1987, т. 51, № 2, с. 193–200. 5. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., 1973. 469 с. 6. *Гусейнов Х.Г.* Исследования задач минимаксного управления. Свердловск, 1985, с. 15–20. 7. *Субботин А.И., Тарасьев А.М.* — ДАН, 1985, т. 283, № 3, с. 559–564.