ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2006, том 408, № 3, с. 301–304

## МАТЕМАТИКА

УДК 62–50

# О СВОЙСТВАХ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

© 2006 г. Л. В. Камнева

Представлено академиком Н.Н. Красовским 11.11.2005 г.

Поступило 24.11.2005 г.

Рассматривается дифференциальная игра, в которой функционалом платы является время до попадания точки на целевое множество. Получены достаточные условия совпадения заданной разрывной функции с функцией цены игры. Условия формулируются в терминах классических понятий *u*- и *v*-стабильных функций, но дополнительно требуется выполнение так называемого условия корректной сжимаемости замкнутых множеств уровня тестируемой функции. Приведен пример, который показывает, что условие корректной сжимаемости не является избыточным.

Работа посвящена проблеме поиска условий на заданную разрывную функцию, выполнения которых достаточно для ее совпадения с функцией цены рассматриваемой дифференциальной игры быстродействия. Исследования проводятся в рамках позиционной формализации дифференциальных игр, введенной в работе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [1].

В теории дифференциальных игр изучаются задачи управления по принципу обратной связи в условиях неопределенности и помех. Полезное управление рассматривается как действие первого игрока, минимизирующего некоторый функционал на множестве траекторий системы, а помеха считается результатом управляющего воздействия второго игрока, цель которого состоит в максимизации того же функционала. Классическим подходом [1–4] к решению дифференциальной игры является поиск функции цены, которая каждой точке пространства состояний системы ставит в соответствие оптимальный гарантированный результат в игре, начинающейся из этой точки. На базе функции цены строятся стратегии оптимального управления по принципу обратной связи.

В случае дифференцируемой функции цены задача ее поиска сводится [2] к решению краевой задачи для уравнения в частных производных (УЧП) первого порядка (уравнения Айзекса–Беллмана).

Если функция цены является негладкой, но непрерывной, то основными при ее характеризации становятся понятия непрерывных *u*-стабильных и *v*-стабильных функций [3, с. 145], введенные в теории позиционных дифференциальных игр. В этом случае *u*-стабильные (*v*-стабильные) функции при соответствующем краевом условии мажорируют (минорируют) функцию цены дифференциальной игры, которая единственная обладает свойствами *u*- и *v*-стабильности.

Необходимость рассмотрения разрывной функции цены возникает, например, в задачах быстродействия, что приводит к понятиям полунепрерывных *u*- и *v*-стабильных функций. При этом характеризация функции цены значительно усложняется. А именно, в задачах быстродействия функция цены является единственной полунепрерывной снизу *u*-стабильной функцией, удовлетворяющей нулевому краевому условию на границе терминального множества, к которой поточечно сходится последовательность полунепрерывных сверху *v*-стабильных функций, удовлетворяющих тому же краевому условию. Проверка существования такой последовательности и тем более ее построение затруднительны при решении даже задач на плоскости.

В данном сообщении предлагаются достаточные условия совпадения разрывной тестируемой функции с функцией цены исследуемой дифференциальной игры быстродействия. Условия предполагают полунепрерывность снизу и *u*-стабильность тестируемой функции, *v*-стабильность верхнего замыкания тестируемой функции, а также выполнение введенного в работе условия корректной сжимаемости замкнутых множеств Лебега (множеств уровня) тестируемой функции.

Свойства *u*- и *v*-стабильности хорошо изучены в теории дифференциальных игр. Получены различные инфинитезимальные критерии *u*- и *v*-стабильности полунепрерывных функций [4, с. 38]. Заметим также, что понятие *u*-стабильной (*v*-стабильной) функции соответствует понятию верх-

*Институт математики и механики Уральского отделения Российской Академии наук, Екатеринбург*

него (нижнего) обобщенного вязкостного решения УЧП первого порядка (см., например, [5]).

Проверка условия корректной сжимаемости замкнутого множества представляет собой самостоятельную задачу, решение которой в общем случае неочевидно. Однако, ограничившись задачами на плоскости, можно сформулировать сравнительно просто проверяемые достаточные условия корректной сжимаемости в терминах внешних нормалей множества и динамики системы. В данном сообщении проблема проверки корректной сжимаемости множеств не исследуется.

В теории оптимального управления аналогом подхода к решению задачи на базе функции цены является метод динамического программирования. Если функция оптимального результата (функция Беллмана) дифференцируема, то ее поиск сводится к решению соответствующей краевой задачи для УЧП первого порядка. В этом случае с помощью функции Беллмана определяется оптимальное управление по принципу обратной связи. Если функция Беллмана является негладкой, но непрерывной, то для решения задачи в классе управлений по принципу обратной связи может быть использован регулярный синтез Болтянского [6, с. 263]. В случае разрывной функции Беллмана построение оптимального управления по принципу обратной связи и его обоснование, как правило, опираются на особенности динамики каждой конкретной задачи.

Предлагаемые в данном сообщении достаточные условия оптимальности справедливы и для задач управления, поскольку задачи теории управления можно рассматривать как частный случай задач теории дифференциальных игр (при нулевом ограничении на управление второго игрока). Однако каких-либо упрощений в формулировке условий не появляется, т.е. требуется проверка $v$-стабильности верхнего замыкания тестируемой функции несмотря на отсутствие второго игрока.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)), \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbf{R}^n$ – фазовое состояние в момент времени $t$; $u(t) \in P$ и $v(t) \in Q$ – управления первого (минимизирующего) и второго (максимизирующего) игроков; $P$ и $Q$ – компактные множества. Предполагается, что функция $f(x, u, v)$ непрерывна по совокупности переменных, удовлетворяет неравенству

$$\|f(x, u, v)\| \leq \kappa(1 + \|x\|), \quad \kappa = \text{const} \geqslant 0,$$

и в каждой ограниченной области $\mathscr{X} \subset \mathbf{R}^n$ справедливо условие Липшица по переменной $x$, т.е.

$$\|f(x^{(1)}, u, v) - f(x^{(2)}, u, v)\| \leq \lambda(\mathscr{X})\|x^{(1)} - x^{(2)}\|$$

для всех $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathscr{X}$, $u \in P$, $v \in Q$. Кроме того, пусть для любых $x, p \in \mathbf{R}^n$ выполнено условие седловой точки [1]

$$H(x, p) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle p, f(x, u, v)\rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle p, f(x, u, v)\rangle.$$

Цель первого игрока – быстрейшее сближение фазовой точки $x(t)$ с заданным замкнутым множеством $M \subset \mathbf{R}^n$. Второй игрок стремится либо исключить встречу с $M$, либо максимизировать время до встречи.

В работе используется позиционная формализация [1] игры быстродействия.

При указанных условиях на функцию $f(x, u, v)$ для любого $x_0 \in \mathbf{R}^n$ существует [1] цена игры $T(x_0; M)$. Функция $T(\cdot; M)$: $\mathbf{R}^n \to [0, \infty]$ называется функцией цены игры.

Задача состоит в нахождении таких условий на функцию $\varphi(\cdot)$: $\Omega \to [0, \infty]$, при которых выполнено равенство $\varphi(x) = T(x; M)$, $x \in \Omega$. Здесь $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ – замкнутое множество, $M \subset \Omega$. Искомые условия должны использовать только свойства функции $\varphi(\cdot)$ и не требовать никаких дополнительных построений.

## 2. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ЦЕНЫ

Введем обозначение

$$W(t; M) = \{x \in \mathbf{R}^n \colon T(x; M) \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Для любого $\tau > 0$ и любого $x \notin W(\tau; M)$ выполнено равенство

$$T(x; M) = T(x; W(\tau; M)) + \tau.$$

Из результатов [1, 4] следует, что $T(\cdot; M)$ – полунепрерывная снизу функция, $M = W(0; M)$ и выполнено свойство $u$-стабильности:

($T_u$) для любых $y_0 \in \mathbf{R}^n \backslash M$, $v_* \in Q$ и $\tau > 0$ существует такое решение $y(\cdot)$: $[0, \tau] \to \mathbf{R}^n$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \text{co}\{f(y(t), u, v_*), u \in P\}, \quad y(0) = y_0,$$

что либо выполнено неравенство $T(y(\tau); M) \leq T(y_0; M) - \tau$, либо $y(t) \in M$ для некоторого $t \in [0, \tau]$.

Символ "co" обозначает выпуклую оболочку множества.

Для верхнего замыкания $T^*(x; M) = \limsup_{y \to x} T(x; M)$ функции цены выполнено [4, с. 258] условие $v$-стабильности:

$u_* \in P$

($\mathrm{T}_v$) для любых $y_0 \in \mathbf{R}^n \backslash M$ и $\tau > 0$ существует такое решение $y(\cdot)$: $[0, \tau] \to \mathbf{R}^n$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(y(t), u_*, v), v \in Q\}, \quad y(0) = y_0,$$

что выполнено неравенство

$$T^*(y(\tau); M) \geq T^*(y_0; M) - \tau.$$

## 3. КОРРЕКТНО СЖИМАЕМЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^n$ – замкнутое множество, $\mathrm{int}\mathcal{M}$ – внутренность множества $\mathcal{M}$. При условии $\mathrm{int}\mathcal{M} \neq \varnothing$ положим

$$\mathcal{M}^{[\varepsilon]} = \{x \in \mathcal{M}: \mathbf{B}(x, \varepsilon) \subseteq \mathcal{M}\}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\varepsilon_{\mathcal{M}} = \max\{\varepsilon > 0: \mathcal{M}^{[\varepsilon]} \neq \varnothing\}.$$

Здесь $\mathbf{B}(x, \varepsilon)$ – шар радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $x$.

Определение. Множество $\mathcal{M} \subset \mathbf{R}^n$ называется **корректно сжимаемым по отношению к динамике** (1), если существует такое число $\vartheta > 0$, что:

(C1) $W(\vartheta; \mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$ и $W(t; \mathcal{M}) = \overline{\mathrm{int}W(t; \mathcal{M})}$, $t \in [0, \vartheta]$;

(C2) для любой точки $x \in \mathrm{int}W(\vartheta; \mathcal{M}) \backslash \mathcal{M}$ выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \to +0} T(x; \mathcal{M}^{[\varepsilon]}) = T(x; \mathcal{M}).$$

Заметим, что если $W(\vartheta; \mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$, то в силу свойства ($\mathrm{T}_u$) $u$-стабильности функция $T(\cdot; \mathcal{M})$ должна принимать все значения из интервала $(0, \vartheta)$. Отсюда получаем, что для корректно сжимаемого множества $\mathcal{M}$ величина $\vartheta > 0$, удовлетворяющая условиям (C1) и (C2), может быть выбрана сколь угодно малой.

Приведем простейшие условия корректной сжимаемости множества $\mathcal{M}$. Пусть множество $\mathcal{M}$ имеет гладкую границу $\partial\mathcal{M}$, $\mathcal{M} = \overline{\mathrm{int}\mathcal{M}}$ и для любой точки $x \in \partial\mathcal{M}$ выполнено неравенство

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle \nu(x), f(x, u, v) \rangle < 0,$$

где $\nu(x)$ – внешняя нормаль к множеству $\mathcal{M}$ в точке $x \in \partial\mathcal{M}$. Тогда множество $\mathcal{M}$ является корректно сжимаемым.

Более сложные достаточные условия корректной сжимаемости множеств связаны с разрывной функцией цены и в этом сообщении не рассматриваются.

## 4. ТЕОРЕМА О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Сформулируем основное утверждение данной работы.

Теорема. *Пусть $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ и $M \subset \Omega$ – замкнутые множества, функция $\varphi(\cdot)$: $\Omega \to [0, \infty]$ полунепрерывна снизу и выполнены следующие условия:*

(A1) $\varphi(x) = 0$, $x \in M$;

(A2) (*u-стабильность*) *для любых $y_0 \in \Omega\backslash M$, $v_* \in Q$ и $\tau > 0$ существует такое решение $y(\cdot)$: $[0, \tau] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения*

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(y(t), u, v_*), u \in P\}, \quad y(0) = y_0,$$

$y(\tau) \in \Omega$ и

*что либо выполнено неравенство $\varphi(y(\tau)) \leq \varphi(y_0) - \tau$, либо $y(t) \in M$ для некоторого $t \in [0, \tau]$;*

(A3) (*v-стабильность*) *для любых $y_0 \in \Omega\backslash M$, $u_* \in P$ и $\tau > 0$ существует такое решение $y(\cdot)$: $[0, \tau] \to \mathbf{R}^n$ дифференциального включения*

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(y(t), u_*, v), v \in Q\}, \quad y(0) = y_0,$$

*что выполнено неравенство $\varphi^*(y(\tau)) \geq \varphi^*(y_0) - \tau$, где*

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \limsup_{z \to x} \varphi(z), & \text{если} \quad x \in \mathrm{int}\Omega, \\ \sup_{z \to \Omega} \varphi(z), & \text{если} \quad x \notin \mathrm{int}\Omega; \end{cases} \tag{2}$$

(A4) *множества уровня*

$$D(t) = \{x \in \Omega: \varphi(x) \leq t\}, \quad 0 < t < \sup_{z \in \Omega} \varphi(z),$$

*являются корректно сжимаемыми.*

*Тогда*

$$\varphi(x) = T(x; M), \quad x \in \Omega.$$

Полунепрерывную сверху функцию $\varphi^*(\cdot)$: $\mathbf{R}^n \to [0, \infty]$, определяемую формулой (2), будем называть верхним замыканием функции $\varphi(\cdot)$: $\Omega \to [0, \infty]$.

Замечание 1. Пусть для функции $\varphi(\cdot)$ выполнены условия (A1)–(A3) и условие корректной сжимаемости множеств $D(t)$ нарушено лишь в некоторой одной точке $a \in (0, \sup_{z \in \Omega} \varphi(z))$. Тогда теорему о достаточных условиях можно применить сначала к функции $\varphi(\cdot)$: $D(a) \to [0, \infty)$. Это даст равенство $\varphi(x) = T(x; M)$, $x \in D(a)$. Далее, вводя обозначения

$$M_1 = D(a),$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) - a, & \text{если} \quad x \notin M_1, \\ 0, & \text{если} \quad x \in M_1, \end{cases}$$

теорему можно применить к функции $\varphi_1(\cdot)$: $\Omega \to [0, \infty]$ и дифференциальной игре с терминальным множеством $M_1$. Отсюда, используя соотно-

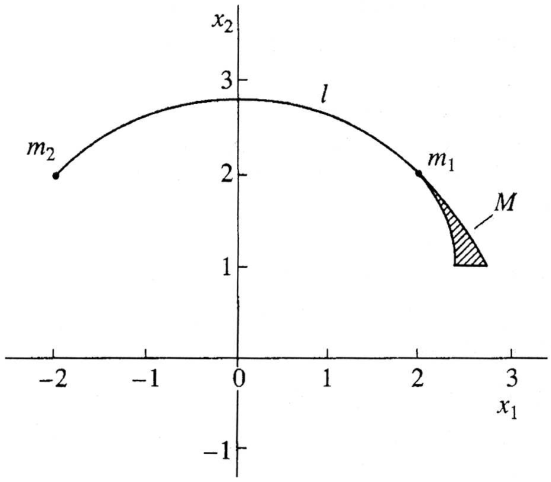


**Рис. 1.** Пример: терминальное множество $M$ и множество разрешимости $l$.

шение $T(x; M_1) = T(x; M) - a$, получаем равенство $\varphi(x) = T(x; M)$ для всех $x \in \Omega$.

Аналогичным образом теорема может быть применена в случае, когда корректная сжимаемость множеств уровня $D(t)$ функции $\varphi(\cdot)$ нарушена в конечном числе точек из интервала $(0, \sup\limits_{z \in \Omega} \varphi(z))$.

Замечание 2. Из свойств $(T_u)$ и $(T_v)$ функции цены следует, что условия (A1)–(A3) являются необходимыми для функции цены игры. Если функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна, то условия (A1)–(A3) будут необходимыми и достаточными [4] для выполнения равенства $\varphi(x) = T(x; M)$ для всех $x \in \Omega$.

## 5. ПРИМЕР

Приведем пример, показывающий, что в случае разрывной функции $\varphi(\cdot)$ нельзя отказаться от условия (A4).

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + v_1,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u + v_2,$$

$$x \in \mathbf{R}^2,\ |u| \le 1,\ v \in Q = \{v \in \mathbf{R}^2: |v_1| + |v_2| \le 1\}.$$

Множество $M$ определяется следующей системой неравенств (рис. 1):

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \ge (\sqrt{2})^2, \quad x_1 \ge 2,$$

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \le (3\sqrt{2})^2, \quad x_2 \ge 1.$$

Пусть $m_1 = (2, 2)^T$, $m_2 = (-2, 2)^T$, $l$ – меньшая дуга окружности радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в начале координат, соединяющая точки $m_1$ и $m_2$. Можно доказать, что функция цены $T(\cdot; M)$ конечна только на множестве $l \cup M$. Доказательство этого утверждения здесь опущено.

Пусть

$$\hat{T}(x) = 2T(x; M), \quad x \in \mathbf{R}^2.$$

Из свойства $u$-стабильности функции $T(\cdot; M)$ следует, что функция $\hat{T}(\cdot)$ также обладает свойством $u$-стабильности. Поскольку $\hat{T}^*(x) = T^*(x; M), x \in \mathbf{R}^2$, то функция $\hat{T}^*(\cdot)$ обладает свойством $v$-стабильности. Здесь $T^*(\cdot; M)$, $\hat{T}^*(\cdot)$ – верхние замыкания функций $T(\cdot; M)$, $\hat{T}(\cdot)$, определяемые формулой (2), где $\Omega = \mathbf{R}^2$.

Таким образом, для функции $\hat{T}(\cdot)$: $\mathbf{R}^2 \to [0, \infty]$ выполнены условия (A1)–(A3), но $\hat{T}(x) \ne T(x; M)$, $x \in l \backslash \{m_1\}$.

Функция $\hat{T}(\cdot)$ не удовлетворяет условию (A4), так как условие (C1) нарушено для всех $\vartheta > 0$. Кроме того, поскольку условие (A4) не выполнено и для функции цены $T(\cdot; M)$, то оно не является необходимым.

Автор благодарит В.С. Пацко за руководство работой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03–01–00414).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
3. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. N.Y.: Springer, 1988. 518 p.
4. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 336 с.
5. *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta, I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Boston: Birkhauser, 1997. 570 p.
6. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.