ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТОМ VIII, № 8

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА И ТЕХНИКА»

МИНСК 1972

АВГУСТ 1972 г., ТОМ VIII, № 8

УДК 518.733.431

МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ. II

В. С. ПАЦКО

Данная статья является продолжением работы [1]. Все определения и обозначения, введенные в [1], сохраняются.

В [1] исходная игровая задача преследования при неполной информации преследователя о координатах преследуемого движения была сведена к дифференциальной игре с полной информацией. Напомним основное содержание этой игры (подробно она описана в § 3 работы [1]).

Движение фазовой точки в трехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3), $x_3 \geqslant 0$, описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = v_1 - x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \dot{x}_3 = v_2 - v_1. \tag{3.1}$$

Окончанием игры считается попадание фазовой точки в точку $m=(0, c, 0)$. Игрок P стремится завершить игру как можно скорее, интересы игрока E противоположны. Управление u игрока P ограничено условием $|u(t)| \leqslant \mu$. Управления v_1, v_2 игрока E в множестве $L = R \setminus Q$ и в полуплоскости $Q_1 (Q_2)$ при $x_2 < -\dfrac{\nu}{2}(k-1)$ $\left(x_2 > \dfrac{\nu}{2}(k+1)\right)$ фиксированы: $v_1 = 0$, $v_2 = \nu \geqslant 0$. В полуплоскости $Q_1 (Q_2)$ при $x_2 \geqslant -\dfrac{\nu}{2}(k-1)$ $\left(x_2 \leqslant \dfrac{\nu}{2}(k+1)\right)$ управления v_1, v_2 связаны соотношением

$$v_1(t) = v_2(t) + \frac{2}{k+1}\left(x_2(t) - v_2(t)\right) \tag{3.2}$$

$$\left(v_1(t) = v_2(t) + \frac{2}{k-1}\left(v_2(t) - x_2(t)\right)\right). \tag{3.3}$$

Независимым считается управление v_1. Оно ограничено условием

$$0 \leqslant v_1(t) \leqslant \nu + \frac{2}{k+1}\left(x_2(t) - \nu\right)$$

$$\left(0 \leqslant v_1(t) \leqslant \nu + \frac{2}{k-1}\left(\nu - x_2(t)\right)\right).$$

Требуется найти способ поведения игрока $P(E)$ по принципу обратной связи: оптимальную тактику $\{u^0, \delta^0\}$ (оптимальное управление $v_1^0[x]$), гарантирующий ему наименьшее (наибольшее) время перевода системы (3.1) в точку m из любой начальной позиции $x_0 \in R$ при любом поведении игрока $E(P)$.

В [1, § 4] эта задача была решена при $c=\nu=0$. В настоящей статье приводится ее решение при $c>\nu>0$, $k>1+\frac{2c}{\nu}$.

§ 5. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ ПРИ $c>\nu>0$, $\kappa>1+\frac{2c}{\nu}$

1. Пусть M—произвольное подмножество множества R. Обозначим

$$\widetilde{M}_1=\left\{x: x\in M\cap Q_1,\ x_2\geqslant-\frac{\nu}{2}(k-1)\right\},$$
$$\widetilde{M}_2=\left\{x: x\in M\cap Q_2,\ x_2\leqslant\frac{\nu}{2}(k+1)\right\},\ \widetilde{M}=\widetilde{M}_1\cup\widetilde{M}_2. \tag{5.1}$$

Положим

$$w(x)=\begin{cases}\nu+\dfrac{2}{k+1}(x_2-\nu), & \text{если } x\in Q_1,\\[2mm] \nu+\dfrac{2}{k-1}(\nu-x_2), & \text{если } x\in Q_2.\end{cases}$$

Через $[ab)$ обозначим множество всех точек дуги ab, включая (исключая) крайнюю точку $a(b)$. Будем также использовать обозначения $[ab]$, $(ab]$, (ab); смысл их понятен из предыдущего определения.

Оптимальную тактику $\{u^0,\ \delta^0\}$ найдем как предел последовательности тактик $\{u^{(i)},\ \delta^{(i)}\}$, $i=1,\ 2,\ \ldots$ При любом i тактика $\{u^{(i)},\ \delta^{(i)}\}$ будет оптимальной для начальных позиций в некотором множестве $F^{(i)}\subset R$, содержащем точку m; последовательность $(F^{(i)})$ будет возрастающей, $\lim\limits_{i\to\infty}F^{(i)}=R$.

Положим

$$u^{(i)}[x]=\begin{cases}\mu, & \text{если } x\in A^{(i)},\\ -\mu, & \text{если } x\in B^{(i)},\end{cases}$$

где $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ — некоторые множества (точно они определяются в дальнейшем), удовлетворяющие условиям

$$A^{(i)}\cup B^{(i)}=R,\ A^{(i)}\cap B^{(i)}=\varnothing,\ A^{(l)}\subset A^{(k)} \text{ при } l<k.$$

Второй элемент тактики—последовательность $(\delta_n^{(i)}[x])$, условимся особо определять при любом i лишь на некоторых кривых в множестве Q. Без пояснений будем предполагать, что в остальных точках множества R $(\delta_n^{(i)}[x])=\delta^{(i)}[x]$, а функция $\delta^{(i)}[x]$ выбирается так, чтобы при любой реализации $v_1(t)$ фазовая точка из позиции $x(t^*)=x^*\in A^{(i)}$ $(B^{(i)})$ не могла на отрезке $[t^*,\ t^*+\delta^{(i)}[x^*]]$ выйти за пределы множества $\bar{A}^{(i)}$ $(\bar{B}^{(i)})$ при $u(t)\equiv\equiv u[x^*]$.

Введем множества $V_1^{(i)}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,$ управлений $v_1^{(i)}[x]$, $x\in\tilde{A}^{(i)}\cup\tilde{B}^{(i)}$, отличающихся друг от друга только на некоторых кривых $[b_ib_1)$, $(f_1f_i]$, лежащих на границе множеств $\tilde{A}^{(i)}$ и $\tilde{B}^{(i)}$; при $i=1$ $(i\leqslant 3)$ множество $[b_ib_1)$ $((f_1f_i])$ будем считать пустым. На кривых $[b_ib_1)$, $(f_1f_i]$ каждое управление $v_1^{(i)}[x]$ условимся считать кусочно непрерывным и равным на интервале непрерывности либо 0, либо $w(x)$; на кривой $[b_ib_1)$ $((f_1f_i])$ в интервал непрерывности будем включать крайнюю нижнюю (верхнюю) точку этого интервала. В остальных точках множества $\tilde{A}^{(i)} \cup \tilde{B}^{(i)}$ примем

$$v_1^{(i)}[x] = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathring{\tilde{B}}^{(i)}, \\ w(x), & \text{если } x \in \bar{\tilde{A}}^{(i)} \setminus ([b_i b_1) \cup (f_1 f_i]), \end{cases}$$

где $\mathring{\tilde{B}}^{(i)} = (\tilde{A}^{(i)} \cup \tilde{B}^{(i)}) \setminus \bar{\tilde{A}}^{(i)}$. Любое управление $v_1^{(i)}[x]$ из множества $V_1^{(i)}$ будет оптимальным для начальных позиций из множества $F^{(i)}$.

При любом i каждому управлению $v_1^{(i)}[x] \in V_1^{(i)}$ поставим в соответствие управление $\hat{v}_1^{(i)}[x]$, отличающееся от $v_1^{(i)}[x]$ только на некоторой кривой $c_i b_i$, лежащей в $R \setminus F^{(i)}$ на границе множеств $\tilde{A}^{(i)}$ и $\tilde{B}^{(i)}$: на кривой $c_i b_i$ $\hat{v}_1^{(i)}[x] = 0$. Полученное так множество управлений $\hat{v}_1^{(i)}[x]$ обозначим через $\hat{V}_1^{(i)}$.

Функции $v_1^{(i)}[x]$ $(\hat{v}_1^{(i)}[x])$ разрывны. Поэтому при некоторых реализациях $u(t)$ решение системы (3.1) в силу $v_1^{(i)}[x]$ $(\hat{v}_1^{(i)}[x])$, $u(t)$ может быть не единственным. Условимся в таких случаях ставить в соответствие реализации $u(t)$ и функции $v_1^{(i)}[x]$ $(\hat{v}_1^{(i)}[x])$ то из решений системы (3.1), которое отвечает непрерывной справа реализации $v_1(t)$, возбуждаемой функцией $v_1^{(i)}[x]$ $(\hat{v}_1^{(i)}[x])$; существование и единственность указанного решения будет следовать из вида функции $v_1^{(i)}[x]$ $(\hat{v}_1^{(i)}[x])$.

Назовем эталонным движением $x^{(i)}(t)$ $(\hat{x}^{(i)}(t))$ предел при $n \to \infty$ движений системы (3.1) в силу функций $u^{(i)}[x]$, $\delta_n^{(i)}[x]$, $v_1^{(i)}[x]$ $(\hat{v}_1^{(i)}[x])$. В рассматриваемых случаях при любой начальной позиции этот предел будет существовать и будет единственным. При одной и той же начальной позиции x_0, но разных управлениях $v_1^{(i)}[x]$ $(\hat{v}_1^{(i)}[x])$ из множества $V_1^{(i)}$ $(\hat{V}_1^{(i)})$ могут получиться различные движения $x^{(i)}(t)$ $(\hat{x}^{(i)}(t))$, однако все они придут в точку m через одинаковое время

$$T^{(i)}[x_0] = \lim_{n \to \infty} T_{u^{(i)},\, \delta_n^{(i)},\, v_1^{(i)}}[x_0], \quad v_1^{(i)}[x] \in V_1^{(i)}$$

$$(\hat{T}^{(i)}[x_0] = \lim_{n \to \infty} T_{u^{(i)},\, \delta_n^{(i)},\, \hat{v}_1^{(i)}}[x_0], \ \hat{v}_1^{(i)}[x] \in \hat{V}_1^{(i)}).$$

Условимся при описании движений системы (3.1) в множестве Q указывать только управления u и v_1, ибо v_2 можно вычислить по v_1 из формул (3.2), (3.3).

2. Зададим множества $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$:

$$A^{(1)} = \left\{x : x \in R,\ x_2 \geqslant c,\ x_1 > \frac{x_2^2 - c^2}{2\mu}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{x : x \in R,\ x_2 < c,\ x_1 \geqslant \frac{c^2 - x_2^2}{2\mu}\right\},$$

$$B^{(1)} = R \setminus A^{(1)}.$$

Поверхность, разделяющая эти множества (сама она при $x_2 \geqslant c$ входит в $B^{(1)}$, а при $x_2 < c$ в $A^{(1)}$), составляется следующим образом из траекторий системы (3.1). Из точки m в обратном времени выпустим в полуплоскости Q_1 движение системы (3.1) при $u=-\mu$, $v_1=0$ ($u=\mu$, $v_1=0$; при $x_2=-c$ оно попадает на ось x_2, продолжим его в полуплоскости Q_2 при $u=\mu$, $v_1=0$). Полученную кривую обозначим через ma_1 (c_1m) (рис. 1). Из каждой точки кривой ma_1 (c_1m) в обратном времени выпустим движение системы (3.1) при $u=-\mu$ ($u=\mu$), $v_1=0$, $v_2=\nu$. Траектории этих движений в целом и образуют разделяющую поверхность.

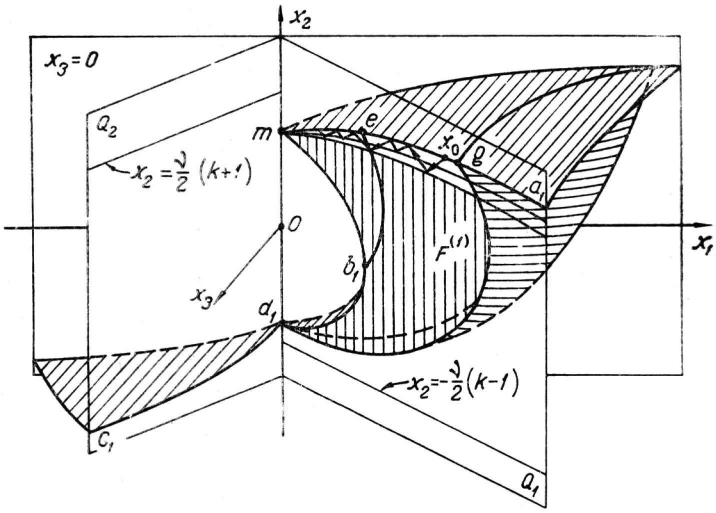

Рис. 1

Примечание. В дальнейшем множества $A^{(i)}$ и $B^{(i)}$ будем получать следующим способом на основе некоторой кривой $\varphi^{(i)}$, лежащей в множестве Q. Из каждой точки этой кривой с координатой $x_2 \geqslant c$ ($x_2<c$) выпустим в обратном времени движение системы (3.1) при $u=-\mu$ ($u=\mu$), $v_1=0$, $v_2=\nu$. Совокупность траекторий в целом всегда (в силу вида кривой $\varphi^{(i)}$) будет составлять поверхность, разделяющую множество R на два подмножества; одно из них будет содержать множество $A^{(1)}$, его обозначим через $A^{(i)}$, второе — через $B^{(i)}$. Часть разделяющей поверхности при $x_2 \geqslant c$ ($x_2<c$) условимся включать в $B^{(i)}$ ($A^{(i)}$). Ради краткости будем говорить, что кривая $\varphi^{(i)}$ порождает разбиение множества R на множества $A^{(i)}$ и $B^{(i)}$.

За первое приближение к тактике $\{u^0, \delta^0\}$ возьмем тактику $\{u^{(1)}, \delta^{(1)}\}$. Последовательность $(\delta_n^{(1)}[x])$ определим на кривой ma_1 с помощью последовательности вспомогательных кривых. Для этого выберем на плоскости x_1, x_2 убывающую последовательность $(x_1=\psi_n(x_2))$, $x_2\geqslant c$, $\psi_n(c)=0$, $n=1, 2, \ldots$, непрерывных возрастающих функций, сходящуюся к функции $\dfrac{x_2^2-c^2}{2\mu}$, $x_2\geqslant c$. Проектируя эту последовательность параллельно оси x_3 на полуплоскость Q_1, получим в Q_1 последовательность кривых $(x_1=\psi_n(x_2))$, сходящуюся при $n\to\infty$ к кривой ma_1. Положим $\delta_n^{(1)}[x]$ на ma_1 равным наименьшему (по $v_1(t)$) времени движения системы (3.1) из точки x до кривой $x_1=\psi_n(x_2)$ при $u=-\mu$.

Если игрок P применяет функции $u^{(1)}[x]$, $\delta_n^{(1)}[x]$, то при любой реализации $v_1(t)$ фазовая точка после попадания на кривую ma_1 движется в полуплоскости Q_1 между кривыми ma_1 и $x_1=\psi_n(x_2)$ в направлении точки m.

Одна из возможных траекторий показана на рис. 1. В пределе при $n \to \infty$ фазовая точка идет по кривой ma_1. Время движения по ma_1 от точки $x^{(1)}$ до точки $x^{(2)}$, $x_2^{(2)} < x_2^{(1)}$, зависит от реализации $v_1(t)$. Оно минимально при $v_1(t) \equiv 0$ и максимально при $v_1(t) = \nu + \dfrac{2}{k+1}\left(x_2(t) - \nu\right)$.

Обозначим через $\{M\}$ множество реализаций $u(t)$, $t \geqslant t_0$, каждая из которых в паре с управлением $v_1^{(1)}[x]$ не выводит систему (3.1) при $t \geqslant t_0$ из множества $M \ni m$ до момента попадания ее в точку m.

Утверждение 5.1. *Для начальных позиций* $x_0 \in \overline{A}^{(1)}$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{v_1(\cdot)\in\{v_1\}} T_{u^{(1)},\,\delta_n^{(1)},\,v_1(\cdot)}[x_0] = T^{(1)}[x_0] = \inf_{u(\cdot)\in\{\overline{A}^{(1)}\}} T_{v_1^{(1)},\,u(\cdot)}[x_0]. \quad (5.2)$$

Доказательство. 1) Пусть игрок P применяет тактику $\{u^{(1)}, \delta^{(1)}\}$. Можно показать, что при любом n и любом $x_0 \in \overline{A}^{(1)}$

$$\sup_{v_1(\cdot)\in\{v_1\}} T_{u^{(1)},\,\delta_n^{(1)},\,v_1(\cdot)}[x_0] = T_{u^{(1)},\,\delta_n^{(1)},\,v_1^{(1)}}[x_0].$$

Отсюда следует левое равенство в (5.2).

Допустим теперь, что игрок E использует управление $v_1^{(1)}[x]$. В этом случае завершающий этап игры происходит в множестве $\overline{\overline{A}}{}_1^{(1)}$.

2) Если при $t \geqslant t_0$ фазовая точка не заходит в множество $L \cap \overline{A}^{(1)}$ (т. е. передвигается в $\overline{\overline{A}}{}^{(1)}$), то нетрудно показать, что при $x_0 \in \overline{\overline{A}}{}^{(1)}$

$$T^{(1)}[x_0] = \inf_{u(\cdot)\in\{\overline{\overline{A}}{}^{(1)}\}} T_{v_1^{(1)},\,u(\cdot)}[x_0]. \quad (5.3)$$

3) Предположим, что фазовая точка заходит в множество $L_1 \cap \overline{A}^{(1)}$. Пусть $t_1 \geqslant t_0$ — такой момент, что $x(t_1+0) \in L_1 \cap \overline{A}^{(1)}$. В этот момент фазовая точка находится либо в Q_1 при $x_2 \leqslant -\dfrac{\nu}{2}(k-1)$, либо в $L_1 \cap \overline{A}^{(1)}$.

Определим наименьший момент $t_2 > t_1$, когда она входит в полуплоскость Q_1. Это возможно только при $x_2(t_2) > -\dfrac{\nu}{2}(k-1)$ и, значит, с учетом допущения (см. (5.2)) о невыходе системы (3.1) из $\overline{A}^{(1)}$, $x(t_2) \in \overline{\overline{A}}{}_1^{(1)}$.

Если в момент t_1 фазовая точка была в Q_1 на прямой $x_2 = -\dfrac{\nu}{2}(k-1)$ (т. е. в $\overline{\overline{A}}{}_1^{(1)}$), то последующий выход ее в $L_1 \cap \overline{A}_1$, а затем вход в $\overline{\overline{A}}{}_1^{(1)}$ означает смену позиции в множестве $\overline{\overline{A}}{}_1^{(1)}$. Выпустим из точки $x(t_1)$ в момент t_1 эталонное движение $x^{(1)}(t)$. Эталонная точка попадет в $\overline{\overline{A}}{}_1^{(1)}$ не позже фазовой, ибо в течение общего времени движения обеих точек в $L_1 \cap \overline{A}^{(1)}$ $x_3^{(1)}(t) = x_3(t)$, $x_1^{(1)}(t) \leqslant x_1(t)$. Поэтому в момент t_2 получим $x_3^{(1)}(t_2) \leqslant x_3(t_1) + \nu(t_2 - t_1) = x_3(t_2)$. Если в момент t_2 эталонная точка находится на кривой ma_1, то отсюда будет следовать неравенство

$$T^{(1)}[x^{(1)}(t_2)] \leqslant T^{(1)}[x(t_2)]. \quad (5.4)$$

Если же она не находится на ma_1, то это неравенство будет верно потому, что тогда $x_2^{(1)}(t_2) \geqslant x_2(t_2)$.

В множестве $L_2 \cap \overline{A}^{(1)}$ фазовая точка может быть только на начальном отрезке времени, начинающемся с момента t_0. Отсюда и из (5.3), (5.4) вытекает, что при $x_0 \in \overline{A}^{(1)} \setminus L_2$ с момента t_0 фазовое движение должно совпадать с эталонным движением $x^{(1)}(t)$, выпущенным из точки x_0 (тогда получится наихудший для игрока E результат; в подобном смысле аналогичные выражения употребляются и дальше).

4) Пусть $x_0 \in L_2 \cap \overline{A}^{(1)}$. Обозначим через t_3 момент попадания фазовой точки в полуплоскость Q_2. В этот момент $x(t_3) \in \bar{\overline{A}}_2^{(1)}$. При $t \geqslant t_3$ фазовое движение должно совпадать с эталонным. Выпустим в момент t_0 из точки x_0 эталонное движение $x^{(1)}(t)$. Оно попадет в множество $\bar{\overline{A}}_2^{(1)}$ не раньше фазового, ибо в течение общего времени движения обеих точек в $L_2 \cap \overline{A}^{(1)}$ $x_3^{(1)}(t) = x_3(t)$, $x_1^{(1)}(t) \leqslant x_1(t)$. Момент попадания эталонной точки в $\bar{\overline{A}}_2^{(1)}$ обозначим через t_4. Получим

$$x_3^{(1)}(t_4) = x_3(t_0) + \nu(t_4 - t_0) \geqslant x_3(t_0), \quad x_2^{(1)}(t_4) \geqslant x_2(t_4).$$

Поэтому

$$T^{(1)}[x^{(1)}(t_4)] \leqslant T^{(1)}[x(t_4)].$$

Из результатов пунктов 2), 3), 4) вытекает правое равенство в (5.2). Утверждение доказано.

Время $\hat{T}^{(1)}[x_0]$ непрерывно в $R \setminus \overline{A}^{(1)}$. Продолжим его по непрерывности на поверхность, разделяющую множества $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$. Обозначим это продолжение через $\hat{T}_*^{(1)}[x_0]$. Предельное движение, которому оно соответствует, обозначим через $\hat{x}_*^{(1)}(t)$.

Из точки b_1 — точки пересечения кривой mc_1 с плоскостью $x_2 = 0$ (рис. 1), выпустим эталонное движение $x^{(1)}(t)$. Точку попадания этого движения на кривую ma_1 обозначим через e. В множестве $\overline{A}^{(1)}$ выделим максимальное подмножество $C^{(1)}$, состоящее из траекторий эталонного движения $x^{(1)}(t)$, приходящих на кривую $[me]$. Множеством $\tilde{C}^{(1)}$ (см. (5.1)) будет криволинейный треугольник mb_1e (рис. 1).

Утверждение 5.2. *Для начальных позиций* $x_0 \in (R \setminus \overline{A}^{(1)}) \cup C^{(1)}$

$$\hat{T}^{(1)}[x_0] = \inf_{u(\cdot)} T_{\hat{v}_1^{(1)},\, u(\cdot)}[x_0].$$

Доказательство. Допустим, что игрок E применяет управление $\hat{v}_1^{(1)}[x]$. В этом случае завершающий этап игры происходит в множестве $\overline{A}^{(1)}$.

1) Пусть t_1 — момент времени, начиная с которого движение фазовой точки до момента попадания в точку m происходит в $\overline{A}^{(1)}$. Из утверждения 5.1 и несложного сравнения функций $\hat{T}^{(1)}[x_0]$ и $T^{(1)}[x_0]$, $x_0 \in \overline{A}^{(1)}$, следует, что с момента t_1 фазовое движение должно совпадать с эталонным движением $\hat{x}^{(1)}(t)$.

2) Пусть t_1 — момент, при котором $x(t_1) \in R \setminus \overline{A}^{(1)}$. Определим наименьший момент $t_2 > t_1$, когда фазовая точка входит в $\overline{A}^{(1)}$. Из точки $x(t_1)$ в момент t_1 выпустим эталонное движение $\hat{x}^{(1)}(t)$. Это движение до момента t_2 либо уже пройдет через точку m, либо в момент t_2 будет находиться в $\overline{A}^{(1)}$. В последнем случае будет выполняться неравенство

$$\hat{T}^{(1)}[\hat{x}^{(1)}(t_2)] \leqslant \hat{T}^{(1)}[x(t_2)].$$

3) Предположим, что при $x(t_0) \in R \setminus \overline{A}^{(1)}$ фазовое движение до момента попадания в множество $\overline{A}^{(1)}$ совпадает с эталонным движением $\hat{x}^{(1)}(t)$.

Пусть t_1—момент выхода фазовой точки из $\overline{A}^{(1)}$. Выйти из множества $\overline{A}^{(1)}$ фазовая точка может либо через участок граничной поверхности при $0 < x_2 < c$, либо при $x_2 > c$.

В первом случае $\hat{T}^{(1)}[x(t_1)] < \hat{T}_*^{(1)}[x(t_1)]$.

Допустим, что реализуется второй случай. Обозначим $t_2 = \min\{t : t < t_1, x(t) \in C^{(1)}\}$. Выпустим в момент t_1 из точки $x(t_1)$ движение $\hat{x}_*^{(1)}(t)$. Момент попадания его на кривую c_1db_1 обозначим через t_3. В момент t_2 из точки $x(t_2)$ выпустим движение $\hat{x}^{(1)}(t)$. Это движение либо до момента t_3 пройдет через точку m, либо будет находиться в этот момент на кривой $[me]$. Отсюда

$$\hat{T}^{(1)}[x(t_2)] < \hat{T}_*^{(1)}[x(t_1)].$$

Доказываемое утверждение вытекает из результатов пунктов 1), 2), 3).

Из точки d_1—точки пересечения кривой c_1b_1 с осью x_2, выпустим эталонное движение $x^{(1)}(t)$. Точку, в которой это движение попадает на кривую ma_1, обозначим через g. Выделим в множестве $\overline{A}^{(1)}$ максимальное подмножество $F^{(1)}$, состоящее из траекторий эталонного движения $x^{(1)}(t)$, приходящих на кривую $[mg]$. Множеством $\tilde{F}^{(1)}$ будет криволинейный треугольник md_1g (рис. 1).

Утверждение 5.3. *Для любой начальной позиции $x_0 \in F^{(1)}$ тактика $\{u^{(1)}, \delta^{(1)}\}$ является оптимальной тактикой игрока P, а управление $v_1^{(1)}[x]$ — оптимальным управлением обратной связи игрока E. Время $T^{(1)}[x_0]$ совпадает в $F^{(1)}$ с ценой игры.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in F^{(1)}$. Предположим, что до момента t_1 первого выхода фазовой точки из множества $\overline{A}^{(1)}$ игрок E возбуждает реализации $v_1(t)$ с помощью управления $v_1^{(1)}[x]$, а при $t > t_1$—с помощью управления $\hat{v}_1^{(1)}[x]$.

Допустим, что момент t_1 конечен. Тогда на основании утверждения 5.2 при $t \geq t_1$ фазовое движение должно совпадать с движением $\hat{x}_*^{(1)}(t)$.

Если выход осуществляется через участок границы при $0 < x_2 < c$, то

$$T^{(1)}[x(t_1)] < \hat{T}_*^{(1)}[x(t_1)]. \tag{5.5}$$

Пусть реализуется вторая возможность: выход через границу множества $\overline{A}^{(1)}$ при $x_2 > c$. Из точки $x(t_1)$ в момент t_1 выпустим движение $\hat{x}_*^{(1)}(t)$. Через t_2 обозначим момент попадания его (после разворота вокруг точки m) на кривую ma_1. Из точки x_0 в момент t_0 выпустим эталонное движение $x^{(1)}(t)$. Это движение либо до момента t_2 пройдет через точку m, либо будет находиться в момент t_2 на кривой $[mg]$; в последнем случае будет выполняться неравенство $x_2^{(1)}(t_2) < \hat{x}_2^{(1)}(t_2)$. Поэтому

$$T^{(1)}[x(t_0)] < (t_1 - t_0) + \hat{T}_*^{(1)}[x^{(1)}(t_1)]. \tag{5.6}$$

Доказываемое утверждение вытекает из соотношений (5.2), (5.5), (5.6).

3. Рассмотрим начальные позиции в множестве $\tilde{B}^{(1)}$, близкие к кривой d_1b_1. Легко видеть, что если игрок P применяет тактику $\{u^{(1)}, \delta^{(1)}\}$, то он гарантирует себе время перевода из таких позиций в точку m, равное $T^{(1)}[x_0]$. Однако это не самое меньшее время, какое он может гарантировать. Оптимальное решение с точки зрения игрока P будет тогда, когда он начнет переключаться на экивокальной кривой [2], выпущенной из точки b_1 и проходящей в $\tilde{B}^{(1)}$. Переключение на этой кривой будет оптимальным и с точки зрения игрока E.

Для каждой точки x_0 на экивокальной кривой должно выполняться равенство $t^{(1)}[x_0]=t^{(2)}[x_0]$, где $t^{(1)}[x_0]$ — время траверсирующего движения, а $t^{(2)}[x_0]$ — время проникающего движения.

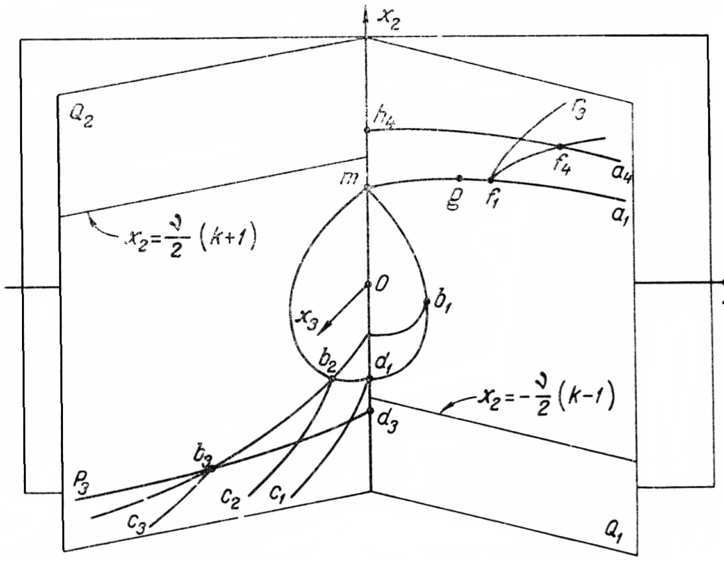

Рис. 2

Траверсирующее движение — это движение системы (3.1), которое идет по экивокальной кривой от точки x_0 до точки b_1 при $v_1=0$ и продолжается от точки b_1 эталонным движением $x^{(1)}(t)$. Проникающее движение также начинается в точке x_0, но сразу же сходит с экивокальной кривой вправо и идет в множестве $\tilde{B}^{(1)}$ при $u=\mu$, $v_1(x)=w(x)$ до момента попадания на кривую d_1b_1, затем продолжается эталонным движением $x^{(1)}(t)$.

Построение экивокальной кривой может быть проделано примерно так же, как в [1, § 4].

Будем считать, что экивокальная кривая построена. Из точки m выпустим движение $x^{(1)}(t)$. Точку пересечения траектории этого движения с экивокальной кривой обозначим через b_2 (рис. 2). Из точки b_2 в обратном времени выпустим в полуплоскости Q_2 движение системы (3.1) при $u=\mu$, $v_1=0$. Полученную кривую обозначим через c_2b_2. Кривая $c_2b_1ma_1$ порождает разбиение множества R на множества $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$.

Функции $u^{(2)}[x]$, $v_1^{(2)}[x]\in V_1^{(2)}$ были определены в начале параграфа. Укажем принцип построения последовательности $(\delta_n^{(2)}[x])$ на кривых ma_1 и b_2b_1.

На кривой ma_1 положим $(\delta_n^{(2)}[x])=(\delta_n^{(1)}[x])$. На экивокальной кривой b_2b_1 $(\delta_n^{(2)}[x])$ выберем так, чтобы при любом n дискретная схема не вырождалась и чтобы при $v_1^{(2)}[x]=0$ на b_2b_1 эталонное движение $x^{(2)}(t)$ после попадания на экивокальную кривую шло по ней в направлении точки b_1.

Построение такой последовательности можно выполнить с помощью вспомогательных кривых, лежащих в множестве $\tilde{B}^{(1)}$.

Поясним, как ведет себя эталонное движение $x^{(2)}(t)$ после попадания на экивокальную кривую b_2b_1. Пусть x^* — точка попадания. Если в точке x^* $v_1^{(2)}[x^*]=w(x^*)$, то эталонное движение сходит с кривой b_2b_1 во внутренность множества $\tilde{A}^{(2)}$; если в точке x^* $v_1^{(2)}[x^*]=0$, эталонное движение в течение некоторого времени идет по кривой b_2b_1 в направлении точки b_1. Заметим, что скорость движения системы (3.1) по экивокальной кривой b_2b_1 в направлении точки b_1 будет наименьшей именно тогда, когда на этой кривой $v_1[x]=0$.

Выделим в множестве $\bar{A}^{(2)}$ $(\bar{B}^{(2)})$ максимальное подмножество $C^{(2)}$ $(D^{(2)})$, состоящее из траекторий эталонного движения $x^{(2)}(t)$, приходящих на кривую $[mg]$ $([b_2b_1])$.

Используя свойства экивокальной кривой, утверждения 5.1—5.3, можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 5.4. *Для любой начальной позиции $x_0\in F^{(2)}=C^{(2)}\cup D^{(2)}$ тактика $\{u^{(2)},\ \delta^{(2)}\}$ является оптимальной тактикой игрока P, а любое управление $v_1^{(2)}[x]\in V_1^{(2)}$ — оптимальным управлением обратной связи игрока E. Время $T^{(2)}[x_0]$ совпадает в $F^{(2)}$ с ценой игры.*

Пусть $T_*^{(2)}[x_0]$—продолжение по непрерывности функции $T^{(2)}[x_0]$ из множества $R\diagdown\bar{A}^{(2)}$ на поверхность, разделяющую множества $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$. Определим на кривой ma_1 точку f_1 (рис. 2), для которой $T^{(2)}[f_1]=T_*^{(2)}[f_1]$ (при этом для точек $x_0\in[mf_1)$ будет выполнено неравенство $T^{(2)}[x_0]<T_*^{(2)}[x_0]$, а для $x_0\in(f_1a_1)$ — неравенство $T^{(2)}[x_0]>T_*^{(2)}[x_0]$). Выделим в множестве $\bar{A}^{(2)}$ максимальное подмножество G, состоящее из траекторий эталонного движения $x^{(2)}(t)$, приходящих на кривую $[mf_1]$.

Из точки b_2 выпустим экивокальную кривую (свойства ее аналогичны свойствам кривой b_2b_1). Среди точек множества G, лежащих на оси x_2, найдем точку с минимальной координатой x_2 (точка d_3). Из точки d_3 в обратном времени выпустим в полуплоскости Q_2 движение системы (3.1) при $u=\mu$, $v_1(x)=w(x)$ (кривая d_3p_3 на рис. 2). Можно показать, что экивокальная кривая, выращиваемая из точки b_2, пересекает кривую d_3p_3; точку пересечения обозначим через b_3. Из точки b_3 в обратном времени выпустим в полуплоскости Q_2 движение системы (3.1) при $u=\mu$, $v_1=0$ (траектория c_3b_3). Кривая $c_3b_3b_1ma_1$ (рис. 2) порождает разбиение множества R на множества $A^{(3)}$ и $B^{(3)}$.

Из точки f_1 в обратном времени выпустим в полуплоскости Q_1 движение системы (3.1) при $u=-\mu$, $v_1(x)=w(x)$ (траектория f_1r_3). Из каждой точки кривой f_1r_3 в обратном времени выпустим движение при $u=-\mu$, $v_1=0$, $v_2=\nu$. Полученная так поверхность делит множество $B^{(3)}$ на две части; ту из них, что пересекается с осью x_2, обозначим через $K^{(3)}$. В множестве $\bar{A}^{(3)}$ $(\bar{K}^{(3)})$ выделим максимальное подмножество $C^{(3)}$ $(D^{(3)})$, состоящее из траекторий эталонного движения $x^{(3)}(t)$, приходящих на кривую $[mf_1]$ $([b_3b_1])$. На поверхности, разделяющей множества $A^{(3)}$ и $B^{(3)}$, выделим максимальное подмножество α_1, состоящее из траекторий эталонного движения $x^{(3)}(t)$, приходящих на кривую $[mf_1)$. Через α_2 обозначим часть разделяющей поверхности при $0<x_2<c$. Пусть $\alpha=\alpha_1\cup\alpha_2$.

На кривой ma_1 положим $(\delta_n^{(3)}[x])=(\delta_n^{(1)}[x])$. На экивокальной кривой b_3b_1 последовательность $(\delta_n^{(3)}[x])$ выберем так, чтобы при любом n дискретная схема не вырождалась и чтобы при $v_1^{(3)}[x]=0$ на b_3b_1 эталонное движение $x^{(3)}(t)$ после попадания на эту кривую шло по ней в направлении точки b_1.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.5. *Для любой начальной позиции $x_0 \in F^{(3)}=C^{(3)} \cup D^{(3)}$ тактика $\{u^{(3)}, \delta^{(3)}\}$ является оптимальной тактикой игрока P, а любое управление $v_1^{(3)}[x] \in V_1^{(3)}$ — оптимальным управлением обратной связи игрока E. Время $T^{(3)}[x_0]$ совпадает в $F^{(3)}$ с ценой игры. Оно непрерывно всюду в $F^{(3)}$, исключая поверхность α.*

4. Рассмотрим начальные позиции на кривой f_1a_1. Для них $T^{(3)}[x_0] \geqslant T_*^{(3)}[x_0]$ (равенство лишь для точки f_1), где $T_*^{(3)}[x_0]$—продолжение по непрерывности из множества $R\diagdown\bar{A}^{(3)}$ функции $T^{(3)}[x_0]$ на поверхность, разделяющую множества $A^{(3)}$ и $B^{(3)}$. Поэтому если бы в множестве $\mathring{\tilde{B}}_1^{(3)}=\tilde{B}_1^{(3)}\diagdown[ma_1)$ функция $v_1[x]$ равнялась нулю, то игроку P было бы выгоднее сбросить фазовую точку в множество $\mathring{\tilde{B}}_1^{(3)}$, чем удерживать ее на f_1a_1; другими словами, игроку P в этом случае было бы выгоднее переключаться не на линии f_1a_1, а на линии несколько сдвинутой (относительно f_1a_1) в $\mathring{\tilde{B}}_1^{(3)}$. Однако и игрок E может изменить свою линию переключения. Возникает ситуация, приводящая к компромиссному решению с помощью эквивокальной кривой, выходящей из точки f_1 и проходящей в $\mathring{\tilde{B}}_1^{(3)}$.

Для любой начальной позиции x_0 на эквивокальной кривой время траверсирующего движения должно быть равно времени проникающего движения. Траверсирующее движение в этом случае—это движение системы (3.1), которое идет по эквивокальной кривой от точки x_0 до точки f_1 при $v_1(x)=w(x)$ и продолжается от точки f_1 эталонным движением $x^{(3)}(t)$. Проникающее движение также начинается в точке x_0, оно совпадает с эталонным движением $x^{(3)}(t)$; это движение сразу же сходит с эквивокальной кривой.

Среди точек множества $D^{(3)}$, лежащих на оси x_2, найдем точку с максимальной координатой x_2 (точка h_4). Из точки h_4 в обратном времени выпустим эталонное движение $x^{(3)}(t)$ (траектория h_4a_4). Эквивокальная кривая пересекает кривую h_4a_4. Точку пересечения обозначим через f_4. Положим $c_4=c_3$, $b_4=b_3$. Кривая $c_4b_4b_1mf_1f_4a_4$ (рис. 3) порождает разбиение множества R на множества $A^{(4)}$ и $B^{(4)}$.

На кривых b_4b_1 и mf_1 положим $(\delta_n^{(4)}[x])=(\delta_n^{(3)}[x])$. На кривой f_1a_4 последовательность $(\delta_n^{(4)}[x])$ выберем так, чтобы дискретная схема при любом n не вырождалась и чтобы при $v_1^{(4)}[x]=w(x)$ на f_1a_4 эталонное движение $x^{(4)}(t)$ после попадания на эту кривую шло по ней в направлении точки f_1.

В множестве $\bar{A}^{(4)}$ $(B^{(4)})$ выделим максимальное подмножество $C^{(4)}$ $(D^{(4)})$, состоящее из траекторий эталонного движения $x^{(4)}(t)$, приходящих на кривую $[mf_4]$ $([b_4b_1])$.

Утверждение 5.6. *Для любой начальной позиции $x_0 \in F^{(4)}=C^{(4)} \cup D^{(4)}$ тактика $\{u^{(4)}, \delta^{(4)}\}$ является оптимальной тактикой игрока P, а любое управление $v_1^{(4)}[x] \in V_1^{(4)}$ — оптимальным управлением обратной связи игрока E. Время $T^{(4)}[x_0]$ совпадает в $F^{(4)}$ с ценой игры. Оно непрерывно всюду в $F^{(4)}$, исключая поверхность α.*

На рис. 3 показано несколько траекторий эталонного движения $x^{(4)}(t)$, начинающихся из одной точки $x_0 \in \tilde{A}^{(4)}$. Расщепление движений происходит в точках $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$.

5. Процесс построения оптимальной тактики $\{u^0, \delta^0\}$ и оптимальных управлений $v_1^0[x] \in V_1^0$ может быть продолжен. На каждом новом шаге добавляется новый участок эквивокальной кривой. При нечетном (четном) $i \geqslant 5$ такой участок наращивается в полуплоскости $Q_2 (Q_1)$ из точки b_{i-1} (f_{i-1}). Наращивание эквивокальной кривой производится до тех пор, пока она не выйдет на кривую $d_i p_i\,(h_i a_i)$, где $d_i\,(h_i)$ — точка пересечения оси x_2 с нижней (верхней) граничной поверхностью множества $C^{(i-1)}$ $(D^{(i-1)})$, а $d_i p_i\,(h_i a_i)$ —траектория движения системы (3.1) в полуплоскости $Q_2 (Q_1)$ в обратном

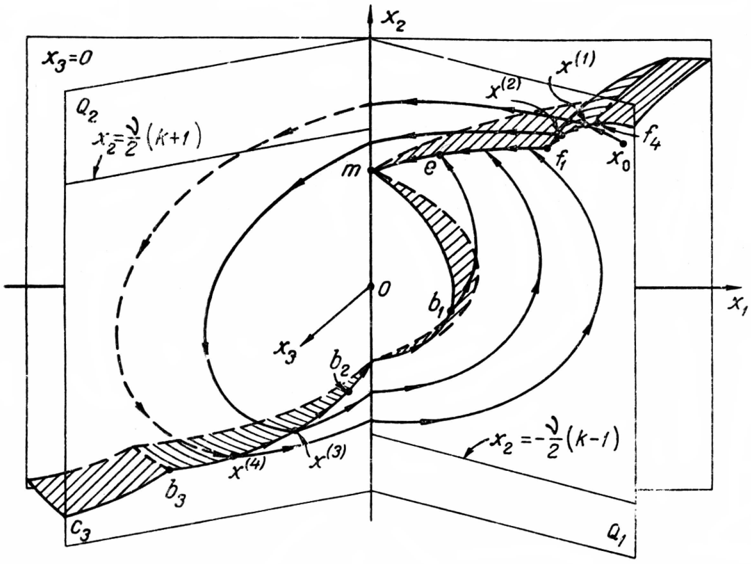

Рис. 3

времени из точки $d_i\,(h_i)$ при $u = \mu$ $(u = -\mu)$, $v_1(x) = w(x)$ $(v_1 = 0)$. Точку выхода на кривую $d_i p_i\,(h_i a_i)$ обозначим через $b_i\,(f_i)$. Если $i \geqslant 5$ нечетно (четно), положим $b_{i+1} = b_i$ $(f_{i+1} = f_i)$. На каждом i-ом шаге, $i \geqslant 5$, эквивокальная кривая наращивается в множестве $\tilde{B}^{(i-1)}$. Построение не вырождается, ибо с ростом i увеличивается проекция на ось x_2 добавляемого участка эквивокальной кривой.

При $i \geqslant 5$ обозначим через $c_i b_i\,(f_i a_i)$ траекторию движения системы (3.1) из точки $b_i\,(f_i)$ в обратном времени в полуплоскости $Q_2 (Q_1)$ при $u = \mu$ $(u = -\mu)$, $v_1 = 0$. Кривая $c_i b_i m f_1 f_i a_i$ порождает разбиение множества R на множества $A^{(i)}$ и $B^{(i)}$. Из точки f_i в обратном времени выпустим в полуплоскости Q_1 движение системы (3.1) при $u = -\mu$, $v_1(x) = w(x)$ (траектория $f_i r_i$). Из каждой точки кривой $f_i r_i$ в обратном времени выпустим движение при $u = -\mu$, $v_1 = 0$, $v_2 = \nu$. Полученная так поверхность делит множество $B^{(i)}$ на две части; ту из них, что пересекается с осью x_2, обозначим через $K^{(i)}$. Множество $C^{(i)}$ $(D^{(i)})$, $i \geqslant 5$, определяется как максимальное подмножество множества $\overline{A}^{(i)}$ $(\overline{K}^{(i)})$, состоящее из траекторий эталонного движения $x^{(i)}(t)$, приходящих на кривую $[mf_i]$ $([b_i b_1])$. Множество $F^{(i)} = C^{(i)} \cup D^{(i)}$.

Последовательность $(\delta_n^{(i)}[x])$, $i \geqslant 5$, задается на кривых $m f_1 f_i a_i$, $c_i b_i b_1$ так, чтобы при любом n дискретная схема не вырождалась и чтобы при $v_1^{(i)}[x] = w(x)$ $(v_1^{(i)}[x] = 0)$ на кривой $m f_1 f_i a_i$ $(c_i b_i b_1)$ эталонное движение $x^{(i)}(t)$ после попадания на эту кривую шло по ней в направлении точки $m\,(b_1)$.

Цена игры в пределе при $i \to \infty$ определяется на всем множестве R. Она непрерывна в R всюду, за исключением поверхности α.

6. Для того чтобы при любых i и n дискретная схема не вырождалась после перехода к более широкому множеству управлений v_1, v_2 (см. первое условие леммы 1.1 и § 3 из [1]) нужно несколько точнее, чем это сделано, определить последовательность $(\delta_n^{(i)}[x])$, $i \geqslant 1$, на поверхности, разделяющей множества $A^{(i)}$ и $B^{(i)}$, а именно, на ее кусках в множестве L при $x_2 > c$ и $x_2 < 0$. Например, при $x_2 > c$ и $x_2 < 0$ можно положить $(\delta_n^{(i)}[x]) = (\delta_n^{(i)}[x^*])$, где x^*—точка на кривой $ma_i\,(c_ib_1)$ с координатой $x_1^* = x_1$. В целом последовательности $(\delta_n^{(i)}[x])$, $i = 1, 2, \ldots$, всегда можно подобрать так, чтобы выполнялись оба условия леммы 1.1.

Литература

1. Пацко В. С. Дифференц. уравнения, **7**, № 3, 1971.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.

Поступила в редакцию
19 марта 1971 г.

Институт математики и механики
АН СССР