

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

---

ПРИКЛАДНАЯ  
МАТЕМАТИКА  
И МЕХАНИКА

Том 35

1

---

МОСКВА · 1971

## К ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В. С. Пацко

(Свердловск)

Показано, что из разрешимости задачи о программном максимуме [1] времени перевода линейной системы с постоянными коэффициентами в общем случае не вытекает разрешимость аналогичной задачи в обратном времени.

Тем самым устанавливается, что стандартный в теории управляемых процессов прием синтеза оптимальных систем путем инверсии времени в рассматриваемых конфликтных ситуациях может применяться лишь при дополнительных условиях.

1. В работе содержится ответ на формулируемый ниже вопрос.

Пусть задана линейная система

$$dx / dt = Ax + u - v \quad (1.1)$$

Здесь  $A$  — постоянная матрица размерности  $n \times n$ ;  $x$  —  $n$ -мерный вектор-столбец;  $u, v$  — управляющие параметры, стесненные в любой момент времени ограничениями

$$u(t) \in U, \quad v(t) \in V,$$

где  $U, V$  — ограниченные, выпуклые, замкнутые множества размерности не больше  $n$ .

Системе (1.1) в обратном времени  $\tau = -t$  соответствует система

$$dx / dt = -Ax - u + v \quad (1.2)$$

Ее управляющие параметры  $u, v$  в любой момент  $\tau$  принадлежат соответственно множествам  $U, V$ .

Пусть  $u^{(1)}(\cdot), v^{(1)}(\cdot), (u^{(2)}(\cdot), v^{(2)}(\cdot))$  — произвольные измеримые, заданные на бесконечном интервале времени  $0 \leq t < \infty$  ( $0 \leq \tau < \infty$ ), программы  $u(t), v(t)$  ( $u(\tau), v(\tau)$ ), удовлетворяющие при любом  $t$  ( $\tau$ ) условиям

$$u(t) \in U, v(t) \in V \quad (u(\tau) \in U, v(\tau) \in V)$$

Выделим в фазовом пространстве две точки  $x^{(1)}$  и  $x^{(2)}$ . Через

$$T^{(1)} [u^{(1)}(\cdot), v^{(1)}(\cdot)] \quad (T^{(2)} [u^{(2)}(\cdot), v^{(2)}(\cdot)])$$

обозначим наименьший момент времени, при котором система (1.1) ((1.2)) в силу программ  $u^{(1)}(\cdot), v^{(1)}(\cdot), (u^{(2)}(\cdot), v^{(2)}(\cdot))$  перейдет из точки  $x^{(1)}$  ( $x^{(2)}$ ) в точку  $x^{(2)}$  ( $x^{(1)}$ ). Если такой перевод при выбранных программах невозможен, положим

$$T^{(1)} [u^{(1)}(\cdot), v^{(1)}(\cdot)] = \infty \quad (T^{(2)} [u^{(2)}(\cdot), v^{(2)}(\cdot)] = \infty)$$

Определим

$$T^{(i)} = \sup_v \min_u T^{(i)} [u^{(i)}(\cdot), v^{(i)}(\cdot)] \quad (i = 1, 2)$$

(точная верхняя грань (минимум) берется по всем возможным программам  $v^{(i)}(\cdot), (u^{(i)}(\cdot))$ ).

Вопрос: вытекает ли из конечности времени  $T^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) конечность времени  $T^{(j)}$  ( $j = 2, 1; j \neq i$ )?

В общем случае (без дополнительных, кроме сделанных, предположений) ответ на этот вопрос отрицательный. Это показывается на примере системы второго порядка.

2. Рассмотрим систему второго порядка

$$dx_1 / dt = x_2, \quad dx_2 / dt = u - v \quad (2.1)$$

с ограничениями на управляющие параметры

$$|u| \leq \mu, \quad v = w + c, \quad |w| \leq \nu, \quad \nu < \mu, \quad c = \text{const}, \quad \mu < c < \mu + \nu \quad (2.2)$$

В обратном времени системе (2.1) соответствует система

$$dx_1 / d\tau = -x_2, \quad dx_2 / d\tau = -u + v \quad (2.3)$$

с ограничениями (2.2).

Положим  $x^{(2)} = 0$ . Точку  $x^{(1)}$  обозначим через  $m$ . Будем считать в дальнейшем, что точка  $m$  принадлежит множеству

$$A = \left\{ x : x_2 > 0, -\frac{x_2^2}{2(\mu - \nu + c)} + \frac{(\mu - \nu)(\mu + \nu - c)^2 x_2^2}{4(\mu + \nu + c)^2 (\mu - \nu + c)^2} > x_1 > -\frac{x_2^2}{2(\mu - \nu + c)} \right\} \quad (2.4)$$

Покажем, что для любой точки  $m \in A$

$$T^{(1)} = \infty, \quad T^{(2)} < \infty$$

3. Утверждение 3.1. Для любой точки  $m$  из множества  $A$  время  $T^{(1)} = \infty$ .

Доказательство. Обозначим

$$t^\circ = \frac{x_{2m}}{\mu - \nu + c}$$

Пусть в систему (2.1) вместо  $u$  подставлена произвольная программа  $u(t)$  ( $|u(t)| \leq \mu$ ), а вместо  $v$  — программа

$$v^\circ(t) = \begin{cases} -\nu + c, & \text{если } 0 \leq t < t^\circ \\ \nu + c, & \text{если } t^\circ \leq t \end{cases}$$

и пусть в начальный момент  $t = 0$  система (2.1) находится в точке  $m$ .

Из формулы Коши

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u(s) - v^\circ(s) \end{pmatrix} ds$$

с учетом (2.2), (2.4) вытекают следующие оценки положения системы (2.1):

если  $0 \leq t < t^0$ ,  $x_2(t) > 0$

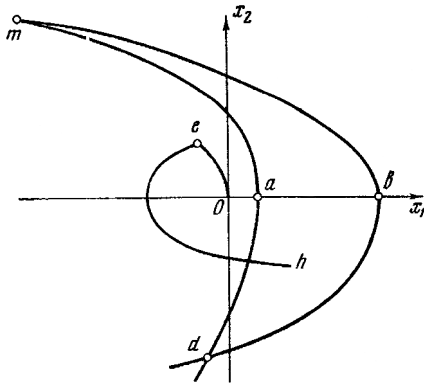
$$x_1(t^0) \geq \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)} + x_{1m}, \quad x_2(t^0) \geq 0$$

если  $x_2(t) \geq 0$ ,  $t > t^0$ ,  $x_1(t) > \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)} + x_{1m}$

если  $x_2(t) < 0$ ,  $t > t^0$

$$x_1(t) \geq \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)} + x_{1m} - \frac{x_2^3(t)}{2(-\mu + \nu + c)}$$

Из этих оценок видно, что ни при каком  $t \geq 0$  система (2.1) не попадает в начало координат. Отсюда в силу произвольности программы  $u(t)$  время  $T^{(1)} = \infty$ . Утверждение доказано.



4. Прежде чем перейти к доказательству того, что для любой точки  $m \in A$  время  $T^{(2)} < \infty$ , сделаем вспомогательные построения (фигура).

Из точки  $m$  выпустим движения системы (2.1) при  $u = -\mu$ ,  $v = -\nu + c$  и при  $u = \mu$ ,  $v = \nu + c$ . Траектория первого движения описывается уравнением

$$x_1 = \frac{x_{2m}^2 - x_2^2}{2(\mu - \nu + c)} + x_{1m}, \quad x_2 \leq x_{2m} \quad (4.1)$$

второго — уравнением

$$x_1 = \frac{x_{2m}^2 - x_2^2}{2(-\mu + \nu + c)} + x_{1m}, \quad x_2 \leq x_{2m} \quad (4.2)$$

Точки пересечения кривых (4.1) и (4.2) с осью  $x_1$  обозначим соответственно через  $a$  и  $b$

$$x_{1a} = \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)} + x_{1m}, \quad x_{1b} = \frac{x_{2m}^2}{2(-\mu + \nu + c)} + x_{1m}$$

Из точки  $a$  выпустим движение системы (2.1) при  $u = -\mu$ ,  $v = \nu + c$ , а из точки  $b$  при  $u = -\mu$ ,  $v = -\nu + c$ . Траектории этих движений

$$x_1 = \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - \nu + c)} + x_{1m} - \frac{x_2^3}{2(\mu + \nu + c)}, \quad x_2 \leq 0$$

$$x_1 = \frac{x_{2m}^2}{2(-\mu + \nu + c)} + x_{1m} - \frac{x_2^3}{2(\mu - \nu + c)}, \quad x_2 \leq 0$$

пересекаются в точке  $d$

$$x_{1d} = \frac{x_{2m}^2 [2\nu c - \mu(\mu - \nu + c)]}{2\nu [c^2 - (\mu - \nu)^2]} + x_{1m}$$

$$x_{2d} = -x_{2m} \left( \frac{(\mu - \nu)(\mu + \nu + c)}{\nu(-\mu + \nu + c)} \right)^{1/2}$$

**Утверждение 4.1.** Перевод системы (2.3) из любой начальной позиции на кривой  $mad$  в точку  $m$  при любой программе  $v(\tau) = w(\tau) + c$  ( $|w(\tau)| \leq v$ ) возможен за время, не большее некоторого числа  $t_*$ .

Доказательство разобьем на два этапа: вначале рассмотрим перевод системы (2.3) с кривой  $mad$  на кривую  $mb$ , затем с кривой  $mb$  в точку  $m$ .

Пусть в начальный момент система (2.3) находится в некоторой точке на кривой  $mad$ . Положим  $u = -\mu$ . Тогда при любой программе  $v(\tau)$

$$dx_1/d\tau = -x_2, \mu + v + c \geq dx_2/d\tau = \mu + v(\tau) \geq \mu - v + c > 0$$

Следовательно, движение будет идти между кривыми  $mad$ ,  $bd$  и через конечное время попадет на кривую  $mb$ . Время перехода с кривой  $mad$  на кривую  $mb$  ограничено сверху числом

$$t_1 = \frac{x_{2m} - x_{2d}}{\mu - v + c}$$

Пусть система (2.3) находится в начальный момент на кривой  $mb$ . Тогда при любой программе  $v(\tau)$  программа

$$u(\tau) = \mu - v - c + v(\tau)$$

обеспечивает движение системы (2.3) по кривой  $mb$  в направлении точки  $m$ , причем скорость движения не зависит от программы  $v(\tau)$ . Время движения до точки  $m$  ограничено сверху числом

$$t_2 = \frac{x_{2m}}{-\mu + v + c}$$

Таким образом, перевод системы (2.3) с кривой  $mad$  в точку  $m$  при любой программе  $v(\tau)$  может быть завершен за время, не большее числа  $t_* = t_1 + t_2$ . Утверждение доказано.

Положим

$$\alpha = \frac{x_{2m}}{\mu - v + c} - \left[ \frac{4v}{(\mu + c)^2 - v^2} \left( x_{1m} + \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - v + c)} \right) \right]^{1/2}$$

$$v_* = x_{2m}/\alpha - \mu$$

Так как точка  $m \in A$ , величины  $\alpha$  и  $v_*$  удовлетворяют неравенствам

$$\frac{x_{2m}}{\mu - v + c} > \alpha > \frac{x_{2m}}{\mu - v + c} - \frac{x_{2m}(\mu + v - c)}{(\mu + v + c)(\mu - v + c)} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{(\mu - v)v}{(\mu + c)^2 - v^2}} > \frac{2cx_{2m}}{(\mu + c)^2 - v^2} > \frac{x_{2m}}{2\mu}$$

$$\mu > v_* > -v + c$$

**Утверждение 4.2.** Перевод системы (2.3) из начала координат на кривую  $ma$  возможен за время, не большее  $\alpha$  при любой программе  $v(\tau) = w(\tau) + c$  ( $|w(\tau)| \leq v$ ) со средним значением на отрезке  $0 \leq \tau \leq \alpha$

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha v(\tau) d\tau \geq v_*$$

*Доказательство.* Пусть система (2.3) находится в момент  $\tau = 0$  в начале координат и движется затем в силу программ  $v(\tau)$  и  $u(\tau) = -\mu$ . При любом  $\tau \geq 0$

$$dx_2 / d\tau = \mu + v(\tau) > 0$$

Обозначим через  $\beta$  момент времени, при котором система (2.3) выходит на прямую  $x_2 = x_{2m}$ ;  $\beta \leq \alpha$ , так как по предположению

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} v(\tau) d\tau \geq v_* \quad \left( \beta = \alpha \text{ при } \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} v(\tau) d\tau = v_* \right)$$

Через  $v^*$  обозначим среднее значение программы  $v(\tau)$  на отрезке  $0 \leq \tau \leq \beta$

$$v^* = \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} v(\tau) d\tau = \frac{x_{2m}}{\beta} - \mu$$

Введем вспомогательную программу

$$v^{\circ}(\tau) = \begin{cases} v + c, & \text{если } 0 \leq \tau < \beta^{\circ}, \\ -v + c, & \text{если } \beta^{\circ} \leq \tau \end{cases}$$

$$\beta^{\circ} = \frac{x_{2m} - \beta(\mu - v + c)}{2v} < \beta$$

Среднее значение программы  $v^{\circ}(\tau)$  на отрезке  $0 \leq \tau \leq \beta$  равно  $v^*$ .

Положение системы (2.3) в момент  $\tau = \beta$  оценивается следующим образом:

$$x_2(\beta) = x_{2m}, \quad x_1(\beta) = \int_0^{\beta} (\tau - \beta) [\mu + v(\tau)] d\tau \geq \int_0^{\beta} (\tau - \beta) [\mu + v^{\circ}(\tau)] d\tau =$$

$$= \frac{(\mu + c)^2 - v^2}{4v} \left( \frac{x_{2m}}{\mu - v + c} - \beta \right)^2 - \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - v + c)} \geq$$

$$\geq \frac{(\mu + c)^2 - v^2}{4v} \left( \frac{x_{2m}}{\mu - v + c} - \alpha \right)^2 - \frac{x_{2m}^2}{2(\mu - v + c)} = x_{1m}.$$

Так как при  $\tau > 0$

$$dx_1 / d\tau = -x_2 < 0$$

то из этих оценок следует, что система (2.3) пересекает кривую  $ta$  при  $\tau \leq \beta \leq \alpha$ . Утверждение доказано.

*Утверждение 4.3.* Перевод системы (2.3) из начала координат на кривую  $ad$  возможен за время, не большее  $\alpha$  при любой программе  $v(\tau) = w(\tau) + c$  ( $|w(\tau)| \leq v$ ) со средним значением на отрезке  $0 \leq \tau \leq \alpha$

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} v(\tau) d\tau < v_*$$

*Доказательство.* Введем вспомогательную программу

$$v^{\circ}(\tau) = \begin{cases} v + c, & \text{если } 0 \leq \tau < \alpha^{\circ}, \\ -v + c, & \text{если } \alpha^{\circ} \leq \tau \end{cases}$$

$$\alpha^{\circ} = \frac{x_{2m} - \alpha(\mu - v + c)}{2v} < \alpha$$

Среднее значение программы  $v^\circ(\tau)$  на отрезке  $0 \leq \tau \leq \alpha$  равно  $v_*$ .

Движение  $x^\circ(\tau)$  (фигура, траектория  $Oeh$ ) системы (2.3) в силу программ  $v^\circ(\tau)$ ,  $u(\tau) = \mu$  с начальной позицией в момент  $\tau = 0$  в начале координат при  $\tau \geq \alpha^\circ$  описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x_1^\circ(\tau) &= (\mu - \nu - c)(\alpha^\circ)^2/2 + (\mu - \nu - c)\alpha^\circ(\tau - \alpha^\circ) + \\ &\quad + (\mu + \nu - c)(\tau - \alpha^\circ)^2/2 \\ x_2^\circ(\tau) &= (-\mu + \nu + c)\alpha^\circ - (\mu + \nu - c)(\tau - \alpha^\circ) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Нетрудно проверить, что это движение для любой точки  $m \in A$  пересекает кривую  $ad$  на интервале  $\alpha^\circ < \tau \leq \alpha$ .

Пусть теперь действует произвольная программа  $v(\tau)$ , имеющая на отрезке  $0 \leq \tau \leq \alpha$  среднее значение, меньшее  $v_*$ . Снова положим  $u(\tau) = \mu$ . Движение  $x(\tau)$  системы (2.3) в силу программ  $v(\tau)$  и  $u(\tau)$  будет находиться при любом  $\tau \geq 0$  строго справа от траектории  $eh$  движения (4.3). Отсюда с учетом неравенства

$$x_2(\alpha) < x_2^\circ(\alpha)$$

получаем, что движение  $x(\tau)$  пересекает кривую  $ad$  при  $\tau \leq \alpha$ . Утверждение доказано.

Из утверждений 4.1.—4.3 следует, что для любой точки  $m \in A$   $T^{(2)} < \infty$ .

Автор благодарит Н. Н. Красовского за обсуждение этой работы и ценные замечания.

Поступила 29 VII 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.