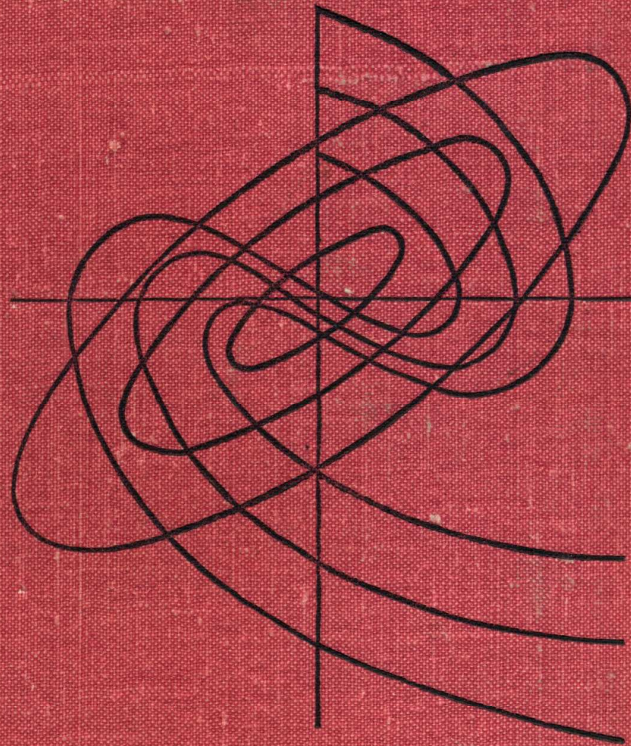


ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ  
ИГРЫ  
И ЗАДАЧИ  
УПРАВЛЕНИЯ



СВЕРДЛОВСК

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ  
И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

СВЕРДЛОВСК

Дифференциальные игры и задачи управления. Сб. статей. Свердловск, 1975 (УНЦ АН СССР).

Исследуются различные свойства решения игровых задач преследования-уклонения. Приведены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые, условия успешного окончания игры. Изучена связь между понятиями программного и позиционного поглощения. На новые классы дифференциальных игр (нелинейные игры, игры с неполной информацией, дифференциально-разностные игры, игры с интегральными ограничениями) обобщается правило экстремального прицеливания. Обсуждается построение теории оптимального управления и наблюдения посредством обобщенных импульсных управляющих воздействий при наличии выпуклых и невыпуклых ограничений на состояния и траектории. Решена задача синтеза оптимальных операций наблюдения в бесконечномерных и дифференциально-разностных системах. Исследованы некоторые спектральные свойства производящего оператора бесконечномерных управляемых систем.

Сборник может представить интерес для научных работников и студентов, занимающихся теорией оптимального управления и ее приложениями. В нем продолжены исследования, опубликованные в сборнике «Экстремальные стратегии в позиционных дифференциальных играх» и основанные на использовании экстремальных конструкций Н. Н. Красовского.

Ответственный редактор А. Б. Куржанский

УДК 517.941.92

В. С. ПАЦКО

## ЗАДАЧА КАЧЕСТВА В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### I. Постановка задачи

Рассмотрим систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = Ax + u - v. \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  — фазовый вектор,  $A$  — постоянная матрица  $2 \times 2$ ,  $u$  и  $v$  — управления первого и второго игроков соответственно. Предположим, что в любой момент времени  $t$

$$u(t) \in U, \quad v(t) \in V, \quad (1.2)$$

где  $U$  — отрезок на плоскости  $X$ , не сводящийся к точке, а  $V$  — выпуклый замкнутый многоугольник. Пусть выполнено условие общности положения [1] по  $u$ , т. е. прямая, проведенная через начало координат параллельно отрезку  $U$ , не инвариантна относительно преобразования  $A$ .

Под окончанием игры будем понимать попадание системы (1.1) в некоторую заранее заданную точку  $m$ . Первый игрок заинтересован в переводе системы (1.1) в точку  $m$ , интересы второго игрока противоположны.

Пусть «реализация  $u(\cdot)(v(\cdot))$ » — измеримая функция времени  $u(t)(v(t))$ ,  $t_0 \leq t < \infty$ , удовлетворяющая при любом  $t$  ограничению (1.2) и возбуждаемая первым (вторым) игроком в процессе игры каким-либо способом.

Сформулируем задачу за первого игрока. Будем считать, что первый игрок при  $t \geq t_0$  может столкнуться с любой реализацией  $v(\cdot)$ . Свое управление первый игрок обязан строить по принципу обратной связи при помощи дискретной схемы  $\{u[x], \delta[x]\}$ . Дискрет времени  $\delta[x] > 0$  определяет величину полуинтервала  $t^* \leq t < t^* + \delta[x(t^*)]$ , в течение которого управление  $u$  держится постоянным. Оно зависит от позиции  $x(t^*)$ , где выбирается по

функции  $u[x]$ . Момент  $t^*$  назовем моментом  $\delta$ -переключения. Если на некотором отрезке времени последовательность  $\{t^n\}$  моментов  $\delta$ -переключения стремится слева к пределу  $t_*$ , то под позицией системы (1.1) в момент  $t_*$  условимся понимать  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t^n)$ . Скажем,

что момент  $\delta$ -переключения  $t^* \neq t_0$  является моментом переключения управления  $u$ , если  $u(t^* - 0) \neq u(t^* + 0)$ .

Дискретную схему  $\{u[x], \delta[x]\}$  назовем допустимой, если при любой начальной позиции  $x_0 = x(t_0)$  и при любой реализации  $v(\cdot)$  моменты переключения управления  $u$  имеют не более конечного числа точек сгущения на любом конечном отрезке времени.

Пусть  $T[x_0; \{u[x], \delta[x]\}, v(\cdot)]$  — время перевода системы (1.1) в точку  $m$  из начальной позиции  $x_0 = x(t_0)$  при дискретной схеме  $\{u[x], \delta[x]\}$  и реализации  $v(\cdot)$ . Если перевод невозможен, примем  $T[x_0; \{u[x], \delta[x]\}, v(\cdot)] = \infty$ . Положим

$$T[x_0; \{u[x], \delta[x]\}] = \sup_{v(\cdot)} T[x_0; \{u[x], \delta[x]\}, v(\cdot)],$$

где точная верхняя грань берется по всем реализациям  $v(\cdot)$ .

Задача 1. Найти множество  $A$  всех точек  $x_0 \in X$ , для каждой из которых существует такая допустимая дискретная схема  $\{u[x], \delta[x]\}$ , что  $T[x_0; \{u[x], \delta[x]\}] < \infty$ .

Сформулируем задачу за второго игрока. Аналогично понятию допустимой дискретной схемы  $\{u[x], \delta[x]\}$  первого игрока введем понятие допустимой дискретной схемы  $\{v[x], \Delta[x]\}$  второго игрока. Начальный момент дискрета  $\Delta$  назовем моментом  $\Delta$ -переключения. Пусть  $T[x_0; \{v[x], \Delta[x]\}, u(\cdot)]$  — время перевода системы (1.1) в точку  $m$  из начальной позиции  $x_0 = x(t_0)$  при дискретной схеме  $\{v[x], \Delta[x]\}$  и реализации  $u(\cdot)$ . Если перевод невозможен, примем  $T[x_0; \{v[x], \Delta[x]\}, u(\cdot)] = \infty$ . Положим

$$T[x_0; \{v[x], \Delta[x]\}] = \inf_{u(\cdot)} T[x_0; \{v[x], \Delta[x]\}, u(\cdot)],$$

где точная нижняя грань берется по всем реализациям  $u(\cdot)$ .

Задача 2. Найти множество  $B$  всех точек  $x_0 \in X$ , для каждой из которых существует такая допустимая дискретная схема  $\{v[x], \Delta[x]\}$ , что  $T[x_0; \{v[x], \Delta[x]\}] = \infty$ .

Очевидно, что  $A \cap B = \emptyset$ .

Если множество  $V$  пересекается прямой, проходящей через отрезок  $U$ , но не лежит целиком на этой прямой, то  $B = X \setminus \{m\}$  [2]. Поэтому такой случай рассматривать не будем. Исключим также из рассмотрения случай, когда множество  $V$  — точка, либо отрезок, параллельный отрезку  $U$ . Решения задач 1, 2 для этого случая вытекают из известных результатов теории управления и теории дифференциальных игр [1, 3, 4, 5].

## 2. Канонический вид системы (1.1). Кривые $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  — корни характеристического полинома матрицы  $A$ . Если  $\lambda_1, \lambda_2$  — действительные, то условимся, что  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$  при  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0$  и  $\lambda_1 < \lambda_2$  при  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ .

Не теряя общности, будем считать, что:

- 1) точка  $m$  совпадает с началом координат;
- 2) отрезок  $U$  расположен на оси  $x_2$  симметрично относительно нуля;
- 3) множество  $V$  лежит относительно оси  $x_2$  строго справа;
- 4) если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  — действительные, то

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad a > 0;$$

- 5) если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  — комплексные, то

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}, \quad a > 0, b < 0.$$

Символом  $\mu$  ( $-\mu$ ) обозначим вектор, совпадающий с верхним (нижним) концом отрезка  $U$ .

На множестве единичных векторов  $s$  введем отношение порядка. Скажем, что  $s_1 \leq s_2$ , если вектор  $s_1$  поворотом против часовой стрелки на угол, меньший  $\pi$ , совмещается с вектором  $s_2$ .

Примем  $f(x, u, v) = (-Ax - u + v) / |Ax + u - v|$  для  $x \in X$ ,  $u \in U$ ,  $v \in V$ ,  $Ax + u - v \neq 0$ .

Пусть  $x \in X$  и  $u \in U(x) = \{u: u \in U, Ax + u - V \ni 0\}$ . Положим

$$f^{(1)}(x, u) = \min_{v \in V} f(x, u, v), \quad (2.1)$$

$$f^{(2)}(x, u) = \max_{v \in V} f(x, u, v). \quad (2.2)$$

Если  $u \notin U(x)$ , то будем считать, что  $f^{(i)}(x, u) = \emptyset$ ,  $i = 1, 2$ .

Через  $W^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , обозначим максимальную совокупность точек  $x \in X$ , для каждой из которых множество  $\bigcup_{u \in U(x)} f^{(i)}(x, u)$  непусто и лежит в некотором остроугольном секторе с вершиной в начале координат. Примем

$$W = W^{(1)} \cup W^{(2)},$$

$$f^{(1)}(x) = \sup_{u \in U(x)} f^{(1)}(x, u), \quad f^{(2)}(x) = \inf_{u \in U(x)} f^{(2)}(x, u), \quad x \in W.$$

Нетрудно видеть, что полуплоскость  $X(-\mu) = \{x: (Ax)_1 - v_1 < 0, \forall v \in V\}$  принадлежит  $W$ . Функции  $f^{(1)}(x)$ ,  $f^{(2)}(x)$  удовлетворяют условию Липшица по  $x$  в любом замкнутом ограниченном множестве из  $X(-\mu)$ .

Пусть  $\rho^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , — траектория\*) системы  $\frac{dx}{d\tau} = f^{(i)}(x)$  при  $\tau \geq 0$ , выходящая из точки  $x(0) = m$  и продолженная вправо до границы полуплоскости  $X(-\mu)$ . Скажем, что  $\rho^{(1)} > \rho^{(2)}$ , соответственно  $\rho^{(1)} < \rho^{(2)}$ ,  $\rho^{(1)} \doteq \rho^{(2)}$ , если существует такое  $r > 0$ , что

\*) Термин «траектория» означает фазовую траекторию.

в полосе  $\{x: 0 < x_1 < r\}$  кривая  $\rho^{(1)}$  идет строго выше, соответственно строго ниже, совпадает с кривой  $\rho^{(2)}$  (рис. 2.1).

Можно показать, что каковы бы ни были кривые  $\rho^{(1)}$ ,  $\rho^{(2)}$ , выполняется одно из соотношений:  $\rho^{(1)} > \rho^{(2)}$ ,  $\rho^{(1)} < \rho^{(2)}$ ,  $\rho^{(1)} \doteq \rho^{(2)}$ .

Если  $\rho^{(1)} < \rho^{(2)}$ , то  $B = X \setminus \{m\}$  [6]. Достаточно просто решение задач 1, 2 и в случае  $\rho^{(1)} \doteq \rho^{(2)}$ . Опишем его без доказательства. Пусть  $\rho$  — максимальная непрерывная дуга из пересечения  $\rho^{(1)} \cap \rho^{(2)}$  с началом  $m$ . Если эта дуга заканчивается на границе полуплоскости  $X(-\mu)$ , то конечную точку не будем включать в  $\rho$ .

Лемма 2.1. Если  $\rho^{(1)} \doteq \rho^{(2)}$ , то  $A = \{m\}$ ,  $B = X \setminus \rho$ .

В дальнейшем будем считать, что  $\rho^{(1)} > \rho^{(2)}$ . При таком условии множества  $-\mu + V$  и  $\mu + V$  не пересекаются.

### 3. Терминология и обозначения

Условимся, что символы  $\overset{\circ}{L}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\text{Fr } L$  означают соответственно внутренность, замыкание и границу множества  $L$ .

Пусть

$$X(\mu) = \{x: (Ax)_1 - v_1 > 0, \forall v \in V\},$$

$$Q = X \setminus (X(\mu) \cup X(-\mu)),$$

$$H(\alpha) = \overline{X(\alpha)} \cap Q,$$

$$P(\alpha) = \{x: Ax + \alpha - V \ni 0\}, \quad \alpha = \mu, -\mu.$$

Очевидно, что  $P(\alpha) \subset Q$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ . Если определитель матрицы  $A$  отличен от нуля, то каждое из множеств  $P(\mu)$ ,  $P(-\mu)$  не пусто и является выпуклым замкнутым многоугольником, пересекающимся с любой прямой полосы  $Q$ . Кроме того,  $P(\mu) \cap P(-\mu) = \emptyset$  и  $P(\mu) = P(-\mu) + \beta$ , где  $\beta$  — некоторый вектор, параллельный полосе  $Q$ . Если определитель матрицы  $A$  равен нулю, то не пустым может быть только одно из множеств  $P(\mu)$ ,  $P(-\mu)$ . При этом оно представляет собой замкнутую бесконечную полосу (возможно вырождение в прямую), вложенную в  $Q$ .

Символом  $Q(\mu)$  ( $Q(-\mu)$ ) обозначим максимальное подмножество полосы  $Q$ , для каждой точки  $x$  которого пересечение множества  $-Ax - u + V$  с осью ординат при любом  $u \in U(x)$  лежит выше (ниже) нуля. Пусть

$$J = \overline{Q(\mu) \cup Q(-\mu)}, \quad J(\alpha) = J \cap P(\alpha),$$

$$F(\alpha) = (J \cap H(\alpha)) \setminus P(\alpha), \quad \alpha = \mu, -\mu.$$

Введенные множества поясняются на рис. 3.1, 3.2.

Если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  действительные и  $\lambda_2 \neq 0$ , то введем следующие обозначения:

$$K(-\mu) = \{x: (Ax - \mu - v)_2 < 0, \forall v \in V\},$$

$$K(\mu) = \{x: (Ax + \mu - v)_2 > 0, \forall v \in V\},$$

$$k(\alpha) = \text{Fr } K(\alpha),$$

$$V(\alpha) = \{v: v \in V, (Ax + \alpha - v)_2 = 0, \forall x \in k(\alpha)\},$$

$$k^*(\alpha) = \{x: x \in k(\alpha), (Ax)_1 - v_1 < 0, \forall v \in V(\alpha)\},$$

$$k_*(\alpha) = \{x: x \in k(\alpha), (Ax)_1 - v_1 > 0, \forall v \in V(\alpha)\},$$

$$\tilde{k}(\alpha) = \{x: x \in k(\alpha), \exists v \in V(\alpha): (Ax)_1 - v_1 = 0\},$$

$$\hat{k}^*(\alpha) = \{x: x \in k(\alpha), \exists v \in V(\alpha): (Ax)_1 - v_1 < 0\},$$

$$\hat{k}_*(\alpha) = \{x: x \in k(\alpha), \exists v \in V(\alpha): (Ax)_1 - v_1 > 0\},$$

$$C^*(\alpha) = \tilde{k}(\alpha) \setminus \hat{k}_*(\alpha),$$

$$C_*(\alpha) = \tilde{k}(\alpha) \setminus \hat{k}^*(\alpha), \quad \alpha = \mu, -\mu.$$

Пусть  $x \neq y$ . Символом  $\pi(x, y)$  обозначим прямую, проходящую через точки  $x, y$ . Символ  $\pi_1(x)$  ( $\pi_2(x)$ ) будет обозначать горизонтальную (вертикальную) прямую, проходящую через точку  $x$ . Пусть  $H(x)$  — прямая, параллельная полосе  $Q$  и проходящая через  $x$ .

Выберем точку  $y$  справа от оси ординат так, чтобы при любом  $x$  с координатой  $0 < x_1 \leq y_1$  точка пересечения прямой  $\pi_2(x)$  с кривой  $\rho^{(1)}$  лежала выше точки пересечения этой прямой с кривой  $\rho^{(2)}$ . Обозначим через  $\omega$  замкнутый криволинейный треугольник (рис. 3.3), сторонами которого служат дуга кривой  $\rho^{(1)}$  от точки  $m$  до точки  $\rho^{(1)} \cap \pi_2(y)$ , дуга кривой  $\rho^{(2)}$  от точки  $m$  до точки  $\rho^{(2)} \cap \pi_2(y)$  и отрезок  $[\rho^{(1)} \cap \pi_2(y), \rho^{(2)} \cap \pi_2(y)]$ .

Пусть  $q$  — вертикальная прямая [прямая, не являющаяся вертикальной]. Запись  $x > q$  ( $x < q$ ) будет означать, что точка  $x$  лежит справа (слева) от прямой  $q$  [выше (ниже) прямой  $q$ ]. Условимся, что  $x \geq q$  ( $x \leq q$ ) эквивалентно выполнению хотя бы одного из условий:  $x \in q$ ,  $x > q$  ( $x < q$ ). Пусть  $C$  — некоторое множество. Скажем, что  $C > q$  ( $C \geq q$ ), если  $x > q$  ( $x \geq q$ ) при любом  $x \in C$ . Аналогично введем соотношения  $C < q$ ,  $C \leq q$ . Будем считать, что при четном  $k$  символ  $>^{(k)}$  ( $<^{(k)}$ ) эквивалентен символу  $>$  ( $<$ ), а при нечетном — символу  $<$  ( $>$ ).

Пусть  $\alpha = \mu, -\mu$  и  $x \in X \setminus P(\alpha)$ . Символом  $V^{(1)}(x, \alpha)$  ( $V^{(2)}(x, \alpha)$ ) обозначим совокупность всех векторов  $v \in V$ , на которых достигается минимум (максимум) в (2.1) (в (2.2)) при  $u = \alpha$ . Пусть  $v^{(i)}(x, \alpha)$ ,  $i = 1, 2$ , — вектор из  $V^{(i)}(x, \alpha)$ , реализующий минимум модуля  $|Ax + \alpha - v|$ .

Если  $x \in Q$ , то через  $v(x, \alpha)$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ , обозначим вектор  $v \in V$ , реализующий минимум модуля  $|Ax + \alpha - v|$  при условии  $(Ax)_1 - v_1 = 0$ .

Пусть  $\gamma(z)$  — кривая без самопересечений с началом  $z$ . Если  $y^{(1)}, y^{(2)}$  — две различные точки на  $\gamma(z)$ , причем  $y^{(1)}$  встречается первой при движении по  $\gamma(z)$  от  $z$ , то через  $\gamma(y^{(1)}, y^{(2)})$  обозна-

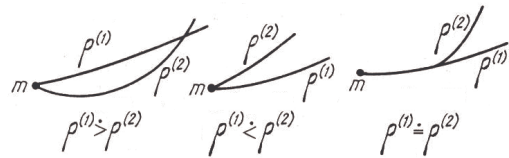


Рис.2.1

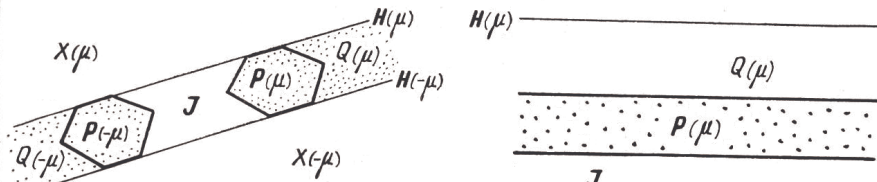


Рис.3.1

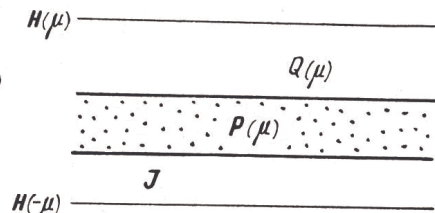


Рис.3.2

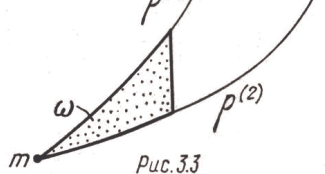
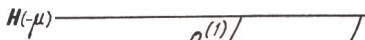


Рис.3.3

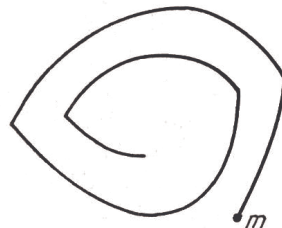


Рис.3.4

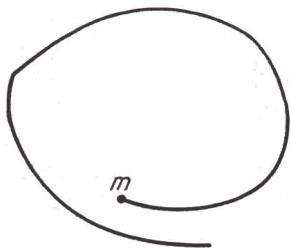


Рис.3.5

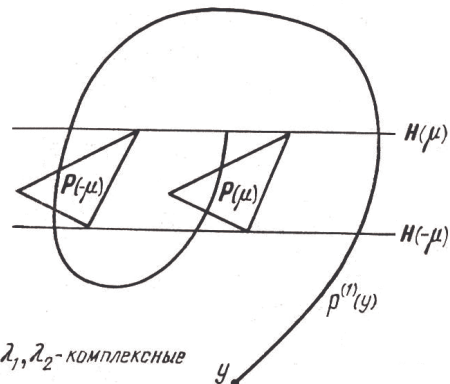


Рис.4.1

$\lambda_1, \lambda_2$ -комплексные

чим дугу кривой  $\gamma(z)$  с началом  $y^{(1)}$  и концом  $y^{(2)}$ . Если  $y^{(1)} = y^{(2)} \in \gamma(z)$ , положим  $\gamma(y^{(1)}, y^{(2)}) = y^{(1)}$ . Для любого  $y \in \gamma(z)$  пусть  $\gamma(y) = \gamma(z) \setminus (\gamma(z, y) \setminus \{y\})$ .

Пусть  $\gamma(z)$  — простая замкнутая кривая [7] с началом и концом  $z$ . Будем всегда считать, что направление обхода  $\gamma(z)$  соответствует движению против часовой стрелки. Если  $y^{(1)}, y^{(2)}$  — две различные точки на  $\gamma(z)$ , то через  $\gamma(y^{(1)}, y^{(2)})$  обозначим дугу кривой  $\gamma(z)$  с началом  $y^{(1)}$  и концом  $y^{(2)}$ . Если  $y^{(1)} = y^{(2)} \in \gamma(z)$ ,  $y^{(1)} \neq z$ , положим  $\gamma(y^{(1)}, y^{(2)}) = y^{(1)}$ . Примем  $\gamma(z, z) = \gamma(z)$ . Для любого  $y \in \gamma(z)$ ,  $y \neq z$ , пусть  $\gamma(y) = \gamma(z) \setminus (\gamma(z, y) \setminus \{y\})$ .

Пусть  $\gamma(m)$  — кривая без самопересечений с началом  $m$  и  $x = x(m, \tau)$ ,  $\tau \in \theta$ , — ее параметрическое представление. Кривую  $\gamma(m)$  назовем закручивающейся (раскручивающейся) спиралью, если на плоскости вне  $\gamma(m)$  существует такая точка  $\phi$ , что:

1) для каждого луча  $\chi$  с началом  $\phi$  найдется момент  $\tau_* \in \theta$ , что  $x(m, \tau_*) \in \chi$  и для любого такого  $\tau_*$  и любых достаточно близких к  $\tau_*$  моментов  $\tau_1 < \tau_*$ ,  $\tau_2 > \tau_*$  точки  $x(m, \tau_1)$ ,  $x(m, \tau_2)$  находятся по разные стороны от луча  $\chi$ ;

2) если для некоторого луча  $\chi$   $x(m, \tau^{(1)}) \in \chi$ ,  $x(m, \tau^{(2)}) \in \chi$ , где  $\tau^{(1)} < \tau^{(2)}$ , то  $|\phi - x(m, \tau^{(1)})| > |\phi - x(m, \tau^{(2)})|$  (соответственно  $|\phi - x(m, \tau^{(1)})| < |\phi - x(m, \tau^{(2)})|$ ).

Закручивающаяся (раскручивающаяся) спираль показана на рис. 3.4 (3.5).

Через  $[ab)$  обозначим множество всех точек дуги  $ab$ , включая точку  $a$  и не включая  $b$ . Подобным же образом введем множества  $(ab)$ ,  $[ab]$ ,  $(ab)$ .

Пусть  $\alpha = \mu$ ,  $-\mu$  и  $x \in X \setminus P(\alpha)$ . Через  $\eta^{(1)}(x, \alpha)$  ( $\eta^{(2)}(x, \alpha)$ ) обозначим единичный вектор, ортогональный вектору  $f^{(1)}(x, \alpha)$  ( $f^{(2)}(x, \alpha)$ ) и совмещающийся с последним поворотом на угол  $\frac{\pi}{2}$  против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Символ  $\langle x, y \rangle$  будет обозначать скалярное произведение векторов  $x, y$ , а  $\{x, y\}$  — множество, состоящее из двух элементов  $x, y$ .

Пусть  $C, D$  — произвольные множества из  $X$  и  $T[x, D, u(\cdot), v(\cdot)]$  — время перевода системы (1.1) из точки  $x$  на множество  $D$  в силу некоторых реализаций  $u(\cdot), v(\cdot)$ . Если такой перевод невозможен, примем  $T[x, D, u(\cdot), v(\cdot)] = \infty$ . Положим

$$\Omega(C, D) = \inf_{x, u(\cdot), v(\cdot)} T[x, D, u(\cdot), v(\cdot)],$$

где точная нижняя грань берется по всем  $x \in C$ ,  $u(\cdot), v(\cdot)$ . Аналогичным образом введем величины  $\delta(C, D, u_*)$  и  $\Delta(C, D, v_*)$ . Отличие состоит лишь в том, что при определении величины  $\delta(C, D, u_*)$  ( $\Delta(C, D, v_*)$ ) множество реализаций  $u(\cdot)$  ( $v(\cdot)$ ) будем считать состоящим из одной реализации, тождественно равной вектору  $u_* \in U$  ( $v_* \in V$ ).

Обозначим через  $O(x, r)$  открытый круг с центром  $x$  и радиусом  $r$ .

#### 4. Построение вспомогательных кривых.

Непосредственно из определения множеств  $W, J$  следует, что  $X \setminus J \subset W$ . Нетрудно также убедиться в том, что если  $x \in X(\alpha) \cup \cup Q(-\alpha)$  ( $x \in X(\alpha) \cup Q(\alpha)$ ), то  $f^{(1)}(x) = f^{(1)}(x, \alpha)$  ( $f^{(2)}(x) = f^{(2)}(x, -\alpha)$ ),  $\alpha = \mu, -\mu$ .

Лемма 4.1. Функция  $f^{(i)}(x, \alpha)$  ( $f^{(i)}(x)$ ), где  $i=1, 2, \alpha = \mu, -\mu$ , удовлетворяет условию Липшица по  $x$  в любом выпуклом замкнутом ограниченном множестве из  $X \setminus P(\alpha)$  ( $X \setminus J$ ).

Доказательство. Пусть  $B$  — произвольное выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $X \setminus P(\alpha)$ . Тогда множество  $\cup_{x \in B} (-Ax - \alpha + V)$  не содержит нуль и лежит в некотором остроугольном секторе с вершиной в начале координат. Для любых  $y, z \in B$  имеем

$$|f^{(i)}(y, \alpha) - f^{(i)}(z, \alpha)| = |f(y, \alpha, v^{(i)}(y, \alpha)) - f(z, \alpha, v^{(i)}(z, \alpha))| \leq |f(y, \alpha, v^{(i)}(y, \alpha)) - f(z, \alpha, v^{(i)}(y, \alpha))|.$$

Отсюда вытекает требуемое утверждение для функции  $f^{(i)}(x, \alpha)$ .

Фиксируем  $\alpha = \mu, -\mu$  и  $i=1, 2$ . Обозначим через  $O_\alpha(r)$  окрестность прямой  $H(\alpha)$  радиуса  $r > 0$ . Пусть  $B$  — произвольное выпуклое замкнутое ограниченное множество из  $X \setminus J$ , пересекающееся как с полуплоскостью  $X(\alpha)$ , так и с внутренностью множества  $Q((-1)^{i+1}\alpha)$ . Если  $r$  достаточно мало, то множество

$$\left[ \cup_{y \in C} (-Ay - \alpha + v^{(i)}(y, \alpha)) \right] \cup \left[ \cup_{z \in D} (-Az - \alpha + v^{(i)}(z, -\alpha)) \right] \cup \left[ \cup_{z \in D} (-Az + \alpha + v^{(i)}(z, -\alpha)) \right],$$

где

$$C = B \cap O_\alpha(r) \cap X(\alpha), \\ D = B \cap O_\alpha(r) \cap Q((-1)^{i+1}\alpha),$$

не содержит нуль и лежит в некотором остроугольном секторе с вершиной в начале координат. При этом для любых  $y \in C, z \in D$

$$|f^{(i)}(y) - f^{(i)}(z)| = |f(y, \alpha, v^{(i)}(y, \alpha)) - f(z, -\alpha, v^{(i)}(y, -\alpha))| \leq |f(y, \alpha, v^{(i)}(y, \alpha)) - f(z, \alpha, v^{(i)}(y, \alpha))|.$$

Отсюда с учетом соотношений между функцией  $f^{(i)}(x)$  и функциями  $f^{(i)}(x, \mu), f^{(i)}(x, -\mu)$  вытекает требуемое утверждение для  $f^{(i)}(x)$ . Доказательство закончено.

Определение 4.1. Кривая  $p^{(i)}(y), i=1, 2, y \in X \setminus J$ , есть гладкая кривая максимальной длины (возможно бесконечной), для которой существует параметрическое представление  $x = x^{(i)}(y, \tau), \tau \geq 0, x^{(i)}(y, 0) = y$ , удовлетворяющее условиям:

1) для любых неравных моментов  $\tau_1, \tau_2$  из произвольного

полуинтервала  $[0, \tau_*]$ , входящего в область определения движения  $x = x^{(i)}(y, \tau)$ , имеем  $x^{(i)}(y, \tau_1) \neq x^{(i)}(y, \tau_2)$ ;

2) если  $x^{(i)}(y, \tau^*) \in X \setminus J$ , то

$$\left. \frac{dx^{(i)}(y, \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau^*} = f^{(i)}(x^{(i)}(y, \tau^*));$$

3) если  $x^{(i)}(y, \tau^*) \in J$ , то

$$\left. \frac{dx^{(i)}(y, \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau^*} \in \{f^{(i)}(x^{(i)}(y, \tau^*), \mu), f^{(i)}(x^{(i)}(y, \tau^*), -\mu)\}.$$

При любом  $y \in X \setminus J$  кривая  $p^{(i)}(y), i=1, 2$  существует и единственна. Пример показан на рис. 4.1.

Определение 4.2. Кривая  $p^{(i)}(y, \alpha), i=1, 2, \alpha = \mu, -\mu, y \in X \setminus J(\alpha)$  есть гладкая кривая максимальной длины (возможно бесконечной), для которой существует параметрическое представление  $x = x^{(i)}(y, \tau, \alpha), \tau \geq 0, x^{(i)}(y, 0, \alpha) = y$ , удовлетворяющее условиям:

1) для любых неравных моментов  $\tau_1, \tau_2$  из произвольного полуинтервала  $[0, \tau_*]$ , входящего в область определения движения  $x = x^{(i)}(y, \tau, \alpha)$ , имеем  $x^{(i)}(y, \tau_1, \alpha) \neq x^{(i)}(y, \tau_2, \alpha)$ ;

2) если  $x^{(i)}(y, \tau^*, \alpha) \in X \setminus J$ , то

$$\left. \frac{dx^{(i)}(y, \tau, \alpha)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau^*} = f^{(i)}(x^{(i)}(y, \tau^*, \alpha));$$

3) если  $x^{(i)}(y, 0, \alpha) = y \in J$ , то

$$\left. \frac{dx^{(i)}(y, \tau, \alpha)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = f^{(i)}(y, \alpha);$$

4) если  $\tau^* > 0, x^{(i)}(y, \tau^*, \alpha) \in J$ , то

$$\left. \frac{dx^{(i)}(y, \tau, \alpha)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau^*} \in \{f^{(i)}(x^{(i)}(y, \tau^*, \alpha), \mu), f^{(i)}(x^{(i)}(y, \tau^*, \alpha), -\mu)\}.$$

Если кривая  $p^{(i)}(y, \alpha), i=1, 2, \alpha = \mu, -\mu, y \in X \setminus J(\alpha)$  существует, то она единственна. Пример показан на рис. 4.2.

Скажем, что точка  $y$  принадлежит множеству  $Y(\alpha), \alpha = \mu, -\mu$ , если  $y \in J(\alpha)$  и на некотором интервале  $(0, \tau^*), \tau^* > 0$ , траектория  $l_+(y)$  дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} = f^{(1)}(x, -\alpha), x(0) = y \quad (4.1)$$

проходит вне множества  $\overline{Q(\alpha)}$ . Пусть  $l(y)$  — траектория уравнения (4.1) на интервале  $(\Delta, \tau^*)$ , где  $\Delta < 0$  достаточно мало по модулю.

Пусть  $y \in J(\alpha)$  и  $r > 0$  — достаточно мало. Через каждую точку  $z \in D(y, r) = O(y, r) \cap (J \cup X(\alpha))$  проведем траекторию  $\sigma(z)$  уравнения  $\frac{dx}{dt} = f^{(1)}(x, \alpha)$ . Продолжим траекторию влево и вправо до границы множества  $D(y, r)$ ; условимся, что крайние точки входят в  $\sigma(z)$ . Пусть  $\Sigma(\alpha) = \bigcup_{z \in D(y, r)} \sigma(z)$ . Символом  $M(y, \alpha)$  обозначим совокупность всех траекторий семейства  $\Sigma(\alpha)$ , выходящих из точки  $y$  (рис. 4.3).

**Определение 4.3.** Множество  $Z(\alpha)$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ , есть совокупность всех точек  $y$ , удовлетворяющих условиям: 1)  $y \in J(\alpha)$ , 2)  $M(y, \alpha) \neq \emptyset$ , 3) при  $\alpha = \mu$  ( $\alpha = -\mu$ ) любая точка любой траектории из  $M(y, \alpha)$ , за исключением точки  $y$ , лежит слева (справа) от кривой  $l(y)$ .

Обозначим через  $\hat{p}^{(1)}(y)$ ,  $y \in Z(\alpha)$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ , ту из крайних кривых пучка  $M(y, \alpha)$ , которая ближе к дуге  $l_+(y)$  (рис. 4.3). Пусть  $y_* \neq y$  — произвольная точка на  $\hat{p}^{(1)}(y)$ . Положим  $p^{(1)}(y) = \hat{p}^{(1)}(y, y_*) + p^{(1)}(y_*, \alpha)$  (знак  $+$  означает соединение кривых). Параметрическое представление кривой  $p^{(1)}(y)$  обозначим  $x = x^{(1)}(y, \tau)$ . В качестве параметра  $\tau$  всегда будем брать длину кривой от начальной точки.

Если  $y \in F(\alpha)$ , то введем для кривой  $p^{(2)}(y, \alpha)$  эквивалентное обозначение  $p^{(2)}(y)$ , а для ее параметрического представления — обозначение  $x = x^{(2)}(y, \tau)$ .

Пусть кривая  $p^{(i)}(y)$ ,  $i=1, 2$ , конечна и  $[0, \tau^*)$  — максимальный открытый справа полуинтервал из области  $\Theta^{(i)}$  определения движения  $x = x^{(i)}(y, \tau)$ . Момент  $\tau^*$  назовем моментом обрыва, а точку  $x^{(i)}(y, \tau^*)$  — точкой обрыва кривой  $p^{(i)}(y)$ . Условимся момент обрыва включать в  $\Theta^{(i)}$ . Если  $x^{(i)}(y, \tau) \neq x^{(i)}(y, \tau^*)$  ни при каком  $\tau \in [0, \tau^*)$ , то назовем точку  $x^{(i)}(y, \tau^*)$  точкой обрыва первого рода.

Пусть  $z = x^{(i)}(y, \tau(z))$  — произвольная точка на кривой  $p^{(i)}(y)$ ,  $i=1, 2$ , причем  $\tau(z) > 0$ . Обозначим через  $u_p^{(i)}(z)$  тот из векторов  $\mu, -\mu$ , при котором для любого  $\tau < \tau(z)$ , достаточно близкого к  $\tau(z)$ ,  $\frac{dx^{(i)}(y, \tau)}{d\tau} = f^{(i)}(x^{(i)}(y, \tau), \alpha)$ .

**Лемма 4.2.** Пусть  $z$  есть точка обрыва первого рода кривой  $p^{(1)}(y)$ . Тогда при  $i=1$   $z \in J(u_p^{(1)}(z)) \cup F(u_p^{(1)}(z))$ , а при  $i=2$   $z \in J(u_p^{(2)}(z))$ .

**Доказательство.** Очевидно, что  $z \in Fr J$ . Если  $i=1$ , то требуемое утверждение вытекает из определения кривой  $p^{(1)}(y)$  и равенства  $f^{(1)}(x) = f^{(1)}(x, \alpha)$ ,  $x \in X(\alpha) \cup Q(-\alpha)$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ . Если  $i=2$ , то кроме определения кривой  $p^{(2)}(y)$  и равенства  $f^{(2)}(x) = f^{(2)}(x, \alpha)$ ,  $x \in X(-\alpha) \cup Q(-\alpha)$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ , следует еще учесть, что вектор  $f^{(2)}(x, \alpha)$ ,  $x \in F(\alpha)$ , направлен вертикально вниз при  $\alpha = \mu$  и вертикально вверх при  $\alpha = -\mu$ .

**Лемма 4.3.** Пусть  $\alpha = \mu, -\mu$  и  $y \in X(\alpha)$ . Кривая  $p^{(1)}(y)$  может впервые выйти на прямую  $H(\alpha)$  только на участке  $H(\alpha) \setminus Q(\alpha)$ .

**Доказательство.** При любом  $x \in H(\alpha) \cap Q(\alpha) \subset X \setminus J$  вектор  $f^{(1)}(x) = f^{(1)}(x, -\alpha)$  и направлен вертикально вверх, если  $\alpha = \mu$ , и вертикально вниз, если  $\alpha = -\mu$ . Доказательство следует из непрерывности функции  $f^{(1)}(x)$  в  $X \setminus J$  и определения кривой  $p^{(1)}(y)$ .

Определим вспомогательную кривую  $g^{(1)}$ .

Положим  $g^{(1)} = p^{(1)}(m)$ , если кривая  $p^{(1)}(m)$  бесконечна. Пусть кривая  $p^{(1)}(m)$  конечна,  $d_1$  — точка обрыва, а  $\tau^*$  — момент обрыва. Через  $\tau_1 < \tau^*$  обозначим такой минимальный момент, что при любом  $\tau \in (\tau_1, \tau^*)$   $\frac{dx^{(1)}(m, \tau)}{d\tau} = f^{(1)}(x^{(1)}(m, \tau), u_p^{(1)}(d_1))$ . Если множество  $K_1^{(1)} = \{\tau : \tau \in [\tau_1, \tau^*], x^{(1)}(m, \tau) \in Z(-u_p^{(1)}(d_1))\} = \emptyset$ , положим  $g^{(1)} = p^{(1)}(m)$ . Если  $K_1^{(1)} \neq \emptyset$ , обозначим через  $\tau_2$  наибольший момент из  $K_1^{(1)}$  и пусть  $a_2 = x^{(1)}(m, \tau_2)$ .

Предположим, что построение доведено до точки  $a_i$ ,  $i \geq 2$ . Выпустим из точки  $a_i$  кривую  $p^{(1)}(a_i)$ . Условимся обрывать ее при первом попадании на уже построенную часть кривой  $g^{(1)}$ .

Положим  $g^{(1)} = \psi_i^{(1)} = p^{(1)}(m, a_2) + p^{(1)}(a_2, a_3) + \dots + p^{(1)}(a_i)$ , если кривая  $p^{(1)}(a_i)$  бесконечна. Пусть кривая  $p^{(1)}(a_i)$  конечна,  $d_i$  — точка обрыва, а  $\tau^*$  — момент обрыва. Через  $\tau_1 < \tau^*$  обозначим такой минимальный момент, что при любом  $\tau \in (\tau_1, \tau^*)$   $\frac{dx^{(1)}(a_i, \tau)}{d\tau} = f^{(1)}(x^{(1)}(a_i, \tau), u_p^{(1)}(d_i))$ . Если множество  $K_i^{(1)} = \{\tau : \tau \in [\tau_1, \tau^*], x^{(1)}(a_i, \tau) \in Z(-u_p^{(1)}(d_i))\} = \emptyset$ , положим  $g^{(1)} = \psi_i^{(1)}$ . Если  $K_i^{(1)} \neq \emptyset$ , обозначим через  $\tau_2$  наибольший момент из  $K_i^{(1)}$  и пусть  $a_{i+1} = x^{(1)}(a_i, \tau_2)$ .

Таким образом, кривая  $g^{(1)}$  определена по индукции. Типичный вид кривой  $g^{(1)}$  показан на рис. 4.4. Положим

$$G^{(1)} = g^{(1)} + \sum_{a_i \in g^{(1)}, i > 2} p^{(1)}(a_i, d_{i-1}).$$

Пусть  $y \neq m$  — произвольная точка на  $G^{(1)}$ . Через  $G^{(1)}(m, y)$  обозначим ту из кривых, входящих в  $G^{(1)}$  и соединяющих точки  $m$  и  $y$ , для которой максимальный непрерывный участок, лежащий на  $g^{(1)}$  и содержащий точку  $m$ , минимален (рис. 4.5). Примем  $G^{(1)}(m, m) = g^{(1)}(m, m)$ . Положительной стороной кривой  $G^{(1)}(m, z)$  назовем ту из ее сторон, которая на начальном участке обращена к траектории  $p^{(2)}$ . Противоположную сторону назовем отрицательной.

Обозначим через  $L(\alpha)$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ , совокупность всех точек  $x \in X(\alpha)$ , удовлетворяющих условиям: 1)  $f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x)$ ; 2) вектор  $f^{(1)}(x)$ , приложенный к  $x$ , направлен внутрь множества

$$E(\alpha) = \{x : x \in X(\alpha), f^{(1)}(x) > f^{(2)}(x)\}; \quad (4.2)$$

3) существует отрезок, соединяющий точку  $x$  с множеством  $Q(\alpha)$  и целиком лежащий в  $\overline{X(\alpha)} \setminus E(\alpha)$ .

Если определитель матрицы  $A$  отличен от нуля (равен нулю) и  $L(\alpha) \neq \emptyset$ , то  $L(\alpha)$  — полупрямая (прямая, параллельная полосе  $Q$ ), рис. 4.6.

Положим  $L = L(\mu) \cup L(-\mu)$ .

Определение 4.4. Пусть  $p(m)$  — дуга без самопересечений с началом  $m$ . Скажем, что точка  $y \neq m$  принадлежит  $\gamma$  — пересечению дуги  $p(m)$  с  $G^{(1)}$ , если: 1)  $y \in p(m) \cap G^{(1)}$ ; 2) объединение дуг  $G^{(1)}(m, y)$ ,  $p(m, y)$  есть простая замкнутая кривая, причем отрицательная сторона дуги  $G^{(1)}(m, y)$  обращена внутрь множества, ограниченного этой кривой.

Скажем, что точка  $y \neq m$  принадлежит  $\beta(\xi)$  — пересечению дуги  $p(m)$  с  $G^{(1)}$ , если: 1)  $y \in p(m) \cap G^{(1)}$  ( $y \in p(m) \cap G^{(1)}$ ,  $y \notin L$ ); 2) никакая из точек  $z \neq m$  на  $G^{(1)}(m, y)$  не принадлежит  $\gamma$  — пересечению дуги  $p(m)$  с  $G^{(1)}$ ; 3) положительная сторона дуги  $G^{(1)}(m, y)$  обращена внутрь множества, ограниченного замкнутой кривой, не обязательно простой, составленной из дуг  $G^{(1)}(m, y)$ ,  $p(m, y)$ .

Если  $p(m)$  — простая замкнутая кривая, то условимся считать, что  $m$  принадлежит как  $\beta$ , так и  $\xi$  — пересечению  $p(m)$  с  $G^{(1)}$ , но не принадлежит  $\gamma$  — пересечению.

На рис. 4.7 приведены примеры  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\xi$  — пересечения. На этом рисунке  $y \in p(m) \cap \beta G^{(1)}$ ,  $z \in p(m) \cap \xi G^{(1)}$ ,  $w \in p(m) \cap \gamma G^{(1)}$ ,  $z \in p(m) \cap \beta G^{(1)}$ . На рис. 4.8 показан пример, где не удовлетворяется условие 2) в определении  $\beta(\xi)$  — пересечения, а условия 1), 3) выполнены. Здесь  $y \in p(m) \cap \gamma G^{(1)}$ ,  $z \in p(m) \cap \beta G^{(1)}$ ,  $z \in p(m) \cap \xi G^{(1)}$ . (Символ  $\cap \xi$  означает  $\xi$  — пересечение,  $\xi = \beta, \gamma, \zeta$ ).

Определим вспомогательную кривую  $g^{(2)}$ .

Положим  $g^{(2)} = p^{(2)}(m)$ , если кривая  $p^{(2)}(m)$  бесконечна. Пусть кривая  $p^{(2)}(m)$  конечна,  $z$  — точка обрыва, а  $\tau^*$  — момент обрыва. Примем  $g^{(2)} = p^{(2)}(m)$ , если  $p^{(2)}(m) \cap \xi G^{(1)} \neq \emptyset$ . В противном случае обозначим через  $\tau_1 < \tau^*$  такой минимальный момент, что при

любом  $\tau \in (\tau_1, \tau^*)$   $\frac{dx^{(2)}(m, \tau)}{d\tau} = f^{(2)}(x^{(2)}(m, \tau), u_p^{(2)}(z))$ . Если мно-

жество  $K_1^{(2)} = \{\tau : \tau \in [\tau_1, \tau^*], x^{(2)}(m, \tau) \in F(-u_p^{(2)}(z))\} = \emptyset$ , положим  $g^{(2)} = p^{(2)}(m)$ . Если  $K_1^{(2)} \neq \emptyset$ , обозначим через  $\tau_2$  наибольший момент из  $K_1^{(2)}$  и пусть  $c_2 = x^{(2)}(m, \tau_2)$ .

Предположим, что построение доведено до точки  $c_i$ ,  $i \geq 2$ . Выпустим из точки  $c_i$  кривую  $p^{(2)}(c_i)$ . Условимся обрывать ее при первом попадании на уже построенную часть кривой  $g^{(2)}$ .

Положим  $g^{(2)} = \psi_i^{(2)} = p^{(2)}(m, c_2) + p^{(2)}(c_2, c_3) + \dots + p^{(2)}(c_i)$ ,

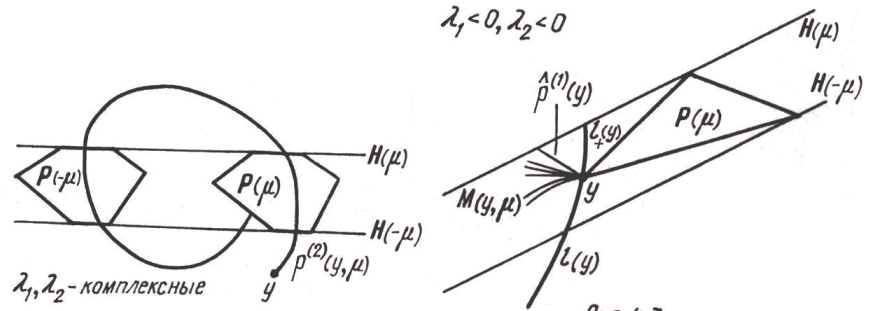


Рис. 4.2

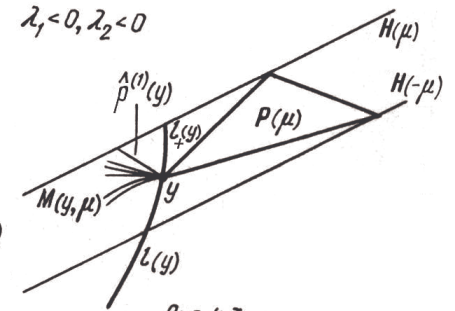


Рис. 4.3

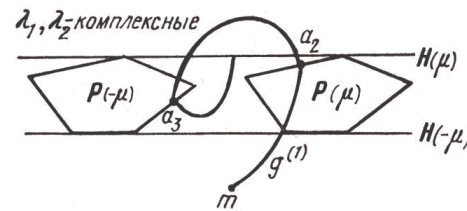


Рис. 4.4

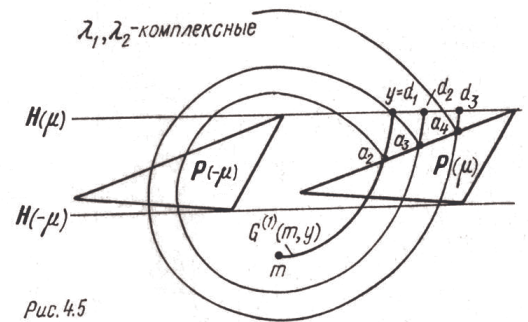


Рис. 4.5

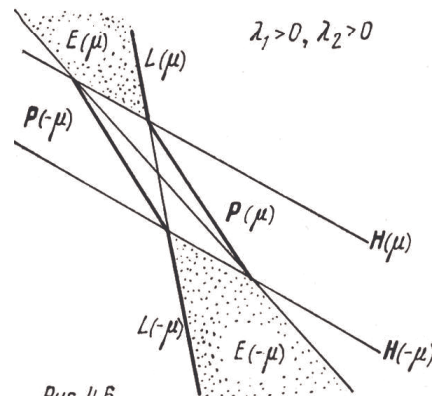


Рис. 4.6

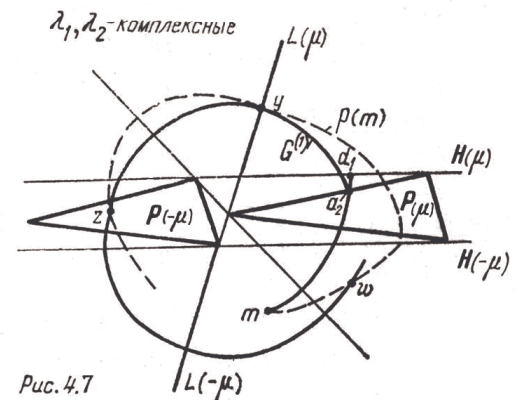


Рис. 4.7



если кривая  $p^{(2)}(c_i)$  бесконечна. Пусть кривая  $p^{(2)}(c_i)$  конечна,  $z$  — точка обрыва, а  $\tau^*$  — момент обрыва. Примем  $g^{(2)} = \psi_i^{(2)}$ , если  $\psi_i^{(2)} \cap \xi G^{(1)} \neq \emptyset$ . В противном случае обозначим через  $\tau_1 < \tau^*$  такой минимальный момент, что при любом  $\tau \in (\tau_1, \tau^*)$   $\frac{dx^{(2)}(c_i, \tau)}{d\tau} = f^{(2)}(x^{(2)}(c_i, \tau), u_p^{(2)}(z))$ . Если множество  $K_i^{(2)} = \{\tau : \tau \in [\tau_1, \tau^*], x^{(2)}(c_i, \tau) \in F(-u_p^{(2)}(z))\} = \emptyset$ , положим  $g^{(2)} = \psi_i^{(2)}$ . Если  $K_i^{(2)} \neq \emptyset$ , обозначим через  $\tau_2$  наибольший момент из  $K_i^{(2)}$  и пусть  $c_{i+1} = x^{(2)}(c_i, \tau_2)$ .

Таким образом, кривая  $g^{(2)}$  определена по индукции. Типичный вид кривой  $g^{(2)}$  показан на рис. 4.9.

Положительной стороной кривой  $g^{(2)}$  назовем ту из ее сторон, что на начальном участке обращена к траектории  $\rho^{(1)}$ . Противоположную сторону назовем отрицательной.

Пусть  $\xi = \beta, \gamma, \zeta$  и пусть  $R_\xi = g^{(2)} \cap \xi G^{(1)} \neq \emptyset$ . Обозначим через  $y_\xi$  первую, если идти по  $g^{(2)}$  от  $m$ , точку из  $R_\xi$ . Если хотя бы одна из кривых  $G^{(1)}(m, y_\varphi), g^{(2)}(m, y_\varphi)$ , где  $\varphi = \beta, \zeta$ , незамкнута, то пусть  $N_\varphi$  — замкнутое множество, ограниченное кривой, составленной из дуг  $G^{(1)}(m, y_\varphi), g^{(2)}(m, y_\varphi)$  (рис. 4.10). Если обе кривые  $G^{(1)}(m, y_\varphi), g^{(2)}(m, y_\varphi)$  замкнуты, пусть  $N_\varphi$  — замкнутое множество, заключенное между  $G^{(1)}(m, y_\varphi) = G^{(1)}(m, m)$  и  $g^{(2)}(m, y_\varphi) = g^{(2)}(m, m)$  (рис. 4.11).

Положим

$$r_\varphi^{(1)} = \begin{cases} G^{(1)}(m, y_\varphi), & \text{если } R_\varphi \neq \emptyset, \\ G^{(1)}(m, y_\gamma), & \text{если } R_\varphi = \emptyset, R_\gamma \neq \emptyset, \\ g^{(1)}, & \text{если } R_\varphi = R_\gamma = \emptyset, \end{cases}$$

$$g_\varphi^{(1)} = \begin{cases} G^{(1)}(m, y_\varphi), & \text{если } R_\varphi \neq \emptyset, g^{(1)} \cap N_\varphi \subset G^{(1)}(m, y_\varphi), \\ g^{(1)} \cap N_\varphi, & \text{если } R_\varphi \neq \emptyset, g^{(1)} \cap N_\varphi \supset G^{(1)}(m, y_\varphi), \\ r_\varphi^{(1)}, & \text{если } R_\varphi = \emptyset, \end{cases}$$

$$g_\varphi^{(2)} = \begin{cases} g^{(2)}(m, y_\varphi), & \text{если } R_\varphi \neq \emptyset, \\ g^{(2)}, & \text{если } R_\varphi = \emptyset, \end{cases} \quad \varphi = \beta, \zeta.$$

Условимся, что понятие положительной (отрицательной) стороны, введенное для кривых  $G^{(1)}(m, z), g^{(2)}$ , естественным образом переносится на кривые  $g_\varphi^{(1)}, g_\varphi^{(2)}$ ,  $\varphi = \beta, \zeta$ .

Пусть  $y$  — произвольная точка на кривой  $g^{(i)}$ ,  $i=1, 2$ , не являющаяся точкой самопересечения и не совпадающая с начальной (с точкой обрыва). Обозначим через  $u^{(i)}(y)$  ( $\tilde{u}^{(i)}(y)$ ) тот из

векторов  $\mu, \tilde{\mu}$ , при котором для любого  $x \in g^{(i)}(m, y) \setminus \{y\}$  ( $x \in g^{(i)}(y) \setminus \{y\}$ ), достаточно близкого к  $y$ , вектор  $f^{(i)}(x, \alpha)$  является касательным к  $g^{(i)}$  в точке  $x$ . Пусть  $(\mu^{(i)}y)$  ( $(y\mu^{(i)})$ ) — достаточно малая дуга кривой  $g^{(i)}(m, y)$  ( $g^{(i)}(y)$ ), на которой вектор  $v^{(i)}(x, u^{(i)}(y))$  ( $v^{(i)}(x, \tilde{u}^{(i)}(y))$ ) не зависит от  $x$ . Последний вектор обозначим  $v^{(i)}(y)$  ( $\tilde{v}^{(i)}(y)$ ).

Совершенно аналогично при  $i=1, 2$  и  $y \in g_\xi^{(i)}$  введем векторы  $u_\xi^{(i)}(y), \tilde{u}_\xi^{(i)}(y), v_\xi^{(i)}(y), \tilde{v}_\xi^{(i)}(y)$ .

Двигаясь по кривой  $g^{(1)}(g^{(2)})$  от точки  $m$ , перенумеруем все внутренние точки  $y$ , для которых  $u^{(1)}(y) \neq \tilde{u}^{(1)}(y)$  ( $u^{(2)}(y) \neq \tilde{u}^{(2)}(y)$ ). А именно, первую точку обозначим  $b_2(q_2)$ , вторую  $b_3(q_3)$  и т. д. Условимся, что  $b_1 = q_1 = m$ . Примем

$$v^{(1)} = \sup \{j : b_j \in g^{(1)}\}, \quad v_\varphi^{(1)} = \sup \{j : b_j \in g_\varphi^{(1)}\},$$

$$v^{(2)} = \sup \{j : q_j \in g^{(2)}\}, \quad v_\varphi^{(2)} = \sup \{j : q_j \in g_\varphi^{(2)}\},$$

$$\varphi = \beta, \zeta.$$

Лемма 4.4. Если  $v^{(1)} \leq 2$ , то  $R_\gamma = \emptyset$ .

Доказательство. Если  $R_\gamma \neq \emptyset$ , то отрицательная сторона дуги  $G^{(1)}(m, y_\gamma)$  обращена внутрь множества, ограниченного кривой, составленной из дуг  $G^{(1)}(m, y_\gamma)$  и  $g^{(2)}(m, y_\gamma)$ . Но это невозможно при  $v^{(1)} \leq 2$ .

Лемма 4.5. Если  $v^{(2)} \leq 2$ , то  $g_\varphi^{(1)} = r_\varphi^{(1)}$ ,  $\varphi = \beta, \zeta$ .

Доказательство. Поскольку  $v^{(2)} \leq 2$ , то кривая  $g^{(2)}$  незамкнута. Следовательно, если  $g_\varphi^{(1)} \neq r_\varphi^{(1)}$ , то  $y_\varphi \neq m$  и кривая  $G^{(1)}(m, y_\varphi)$  подходит в точке  $y_\varphi$  к кривой  $g^{(2)}$  с отрицательной стороны. Но это невозможно при  $v^{(2)} \leq 2$ .

Положим  $\tilde{y}_\varphi = y_\varphi$ ,  $\varphi = \beta, \zeta$ , в следующих случаях:

1)  $g_\varphi^{(1)} = r_\varphi^{(1)}$ ,  $y_\varphi \neq \emptyset$ ,  $u_\xi^{(1)}(y_\varphi) \neq \tilde{u}_\xi^{(1)}(y_\varphi)$ ; кроме того, при  $\varphi = \zeta$   $y_\zeta \in F(-u_\xi^{(2)}(y_\zeta))$ ;

2)  $g_\varphi^{(1)} = r_\varphi^{(1)}$ ,  $y_\varphi \neq \emptyset$ ,  $y_\varphi \in J(u_\xi^{(1)}(y_\zeta))$ . В остальных случаях будем считать, что  $\tilde{y}_\varphi = \emptyset$ .

Обозначим

$$B_\varphi^{(1)} = \{j : a_j \in g_\varphi^{(1)} \setminus \{y_\varphi\}, \tilde{v}_\xi^{(1)}(a_j) = v_\xi^{(1)}(a_j), \tilde{u}_\xi^{(1)}(a_j)\},$$

$$\varphi = \beta, \zeta,$$

$$B_\beta^{(2)} = \{j : q_j \in g_\beta^{(2)} \setminus \{y_\beta\}, q_j \in P(u_\xi^{(2)}(q_j)) \cup F(-u_\xi^{(2)}(q_j))\},$$

$$B_\zeta^{(2)} = \{j : q_j \in g_\zeta^{(2)} \setminus \{y_\zeta\}, q_j \in F(-u_\xi^{(2)}(q_j))\}.$$

Если  $B_\varphi^{(1)} \neq \emptyset$  ( $B_\varphi^{(2)} \neq \emptyset$ ), то пусть  $\vartheta_\varphi^{(1)} = \min \{j : j \in B_\varphi^{(1)}\}$  ( $\vartheta_\varphi^{(2)} = \min \{j : j \in B_\varphi^{(2)}\}$ ),  $a_\varphi = a_{\vartheta_\varphi^{(1)}}(q_\varphi = q_{\vartheta_\varphi^{(2)}})$ . Если  $B_\varphi^{(1)} = \emptyset$  ( $B_\varphi^{(2)} = \emptyset$ ),

будем считать  $a_\varphi = \emptyset$  ( $q_\varphi = \emptyset$ ). Условимся, что  $g_\varphi^{(1)}(\emptyset) = g_\varphi^{(2)}(\emptyset) = \emptyset$ . Положим

$$E_\varphi = [(g_\varphi^{(1)} \setminus g_\varphi^{(1)}(a_\varphi)) \cup \{a_\varphi\} \cup (g_\varphi^{(2)} \setminus g_\varphi^{(2)}(q_\varphi))] \setminus \{\tilde{y}_\varphi\}. \quad (4.3)$$

$$\varphi = \beta, \zeta.$$

Символом  $m^*$  обозначим первую, если идти от  $m$  по  $g_\zeta^{(2)}$  точку множества  $R_\beta \cap L$ , принадлежащую хотя бы одной из кривых  $g_\zeta^{(1)}(a_\zeta)$ ,  $g_\zeta^{(2)}(q_\zeta)$ .

Пусть  $w^{(1)}(b_j)$  ( $w^{(2)}(q_j)$ ) — максимальная гладкая дуга из  $G^{(1)}$  (на кривой  $g^{(2)}$ ) с началом  $b_j$  ( $q_j$ ),  $j \geq 1$ , в каждой внутренней точке  $x$  которой вектор  $f^{(1)}(x, (-1)^j \mu)$  ( $f^{(2)}(x, (-1)^{j+1} \mu)$ ) является касательным.

**5. Решение задач 1, 2 в случае  $\rho^{(1)} > \rho^{(2)}$  при комплексных и действительных одного знака корнях  $\lambda_1, \lambda_2$ .**

Будем считать, что корни  $\lambda_1, \lambda_2$  либо комплексные, либо действительные одного знака. При таком предположении множество  $P(\mu)$  лежит в полосе  $Q$  строго справа от множества  $P(-\mu)$ .

Пусть  $\pi(\alpha)$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ , — вертикальная прямая, опорная к множеству  $Q(\alpha)$ . Через  $e(\alpha)$  обозначим верхнюю при  $\alpha = \mu$  и нижнюю при  $\alpha = -\mu$  точки отрезка  $\pi(\alpha) \cap Q(\alpha)$ . Пусть далее  $h_1(\alpha) = J(\alpha) \cap H(-\alpha)$ ,  $h_2(\alpha) = J(\alpha) \cap H(\alpha)$ . Символом  $l_1(\mu)$  ( $l_2(\mu)$ ) обозначим левую (правую) бесконечно удаленную точку прямой  $H(\mu)$ , а символом  $l_1(-\mu)$  ( $l_2(-\mu)$ ) — правую (левую) бесконечно удаленную точку прямой  $H(-\mu)$  (рис. 5.1).

Отметим, что каждая точка  $b_i(q_i)$ ,  $i > 1$ , лежит на кривой  $[e(s_i)h_2(s_i)l_2(s_i)]$  (на полупрямой  $(h_2(-s_i)l_1(-s_i))$ ), где  $s_i = (-1)^i \mu$ . Всякая точка  $a_i(c_i)$ ,  $i > 1$ , принадлежит одной из дуг  $[e(\mu)h_2(\mu)]$ ,  $[e(-\mu)h_2(-\mu)]$  (одному из полуинтервалов  $(h_2(-\mu), h_1(\mu))$ ,  $(h_2(\mu), h_1(-\mu))$ ) (рис. 5.1).

Обозначим через  $x[v, \alpha]$  точку, удовлетворяющую уравнению  $Ax + \alpha - v = 0$ , где  $\alpha = \mu, -\mu$ ,  $v \in V$ .

Сформулируем ряд утверждений, облегчающих построение кривых  $g_\varphi^{(1)}$ ,  $g_\varphi^{(2)}$ ,  $\varphi = \beta, \zeta$ . Доказательства их приведены в конце параграфа.

5.1. Если  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , то  $Z(\mu) = Y(\mu) \subset [e(\mu)h_2(\mu)]$ .

5.2. Пусть  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $v^{(1)} > 1$ . Тогда кривая  $w^{(1)}(b_2)$  выходит в полуплоскость  $X(\mu)$  и не возвращается на прямую  $H(\mu)$ .

5.3. Пусть  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $v^{(2)} > 1$ . Тогда кривая  $w^{(2)}(q_2)$  выходит в полуплоскость  $X(\mu)$  и не возвращается на прямую  $H(\mu)$ . Кроме того,  $v^{(1)} > 1$ .

5.4. Если  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , то  $v^{(i)} \leq 2$ ,  $i = 1, 2$ .

5.5. Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , то  $Z(\mu) \subset ([e(\mu)C_*(\mu)] \setminus \{h_1(\mu)\}) \cup (C^*(\mu)h_2(\mu))$ ,  $Z(\mu) \supset Y(\mu) \cap (C^*(\mu)h_2(\mu))$ .

5.6. Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , то  $v_\varphi^{(1)} \leq 2$ .

5.7. Пусть  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $v^{(1)} = 1$  и кривая  $g^{(1)}$  обрывается на дуге  $J(-\mu)$ . Тогда  $R_\zeta \neq \emptyset$ ,  $v^{(2)} \leq 2$ .

5.8. Пусть  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $v^{(1)} = 2$ . Тогда  $R_\zeta \neq \emptyset$ ,  $v^{(2)} \leq 3$ .

5.9. Если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  действительные одного знака, то  $R_\beta \cap L(-\mu) = \emptyset$ ,  $R_\beta \cap L(\mu)$  либо пусто, либо состоит из одной точки.

5.10. Пусть  $y \in P(\alpha)$  — точка на кривой  $g^{(1)}$  и  $u^{(1)}(y) = \alpha$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ . Тогда  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , точка  $y$  принадлежит  $J(\alpha)$  и является точкой обрыва кривой  $g^{(1)}$ .

5.11. Пусть  $y \in P(\alpha)$  — точка на кривой  $g^{(2)}$  и  $u^{(2)}(y) = \alpha$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ . Если  $v^{(2)}(y) = v(y, \alpha)$ , то  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ .

5.12. Если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  комплексные, то  $Z(\alpha) = Y(\alpha) \cap \cap ([e(\alpha)h_2(\alpha)] \setminus \{h_1(\alpha)\})$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ .

5.13. Если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  положительные или комплексные, то  $\tilde{v}^{(1)}(a_i) \neq v(a_i, \tilde{u}^{(1)}(a_i))$  для любой точки  $a_i \in g^{(1)}$ ,  $i > 1$ .

5.14. Пусть  $y \in P(\alpha)$  — точка на кривой  $g^{(i)}$  и  $u^{(i)}(y) = \alpha$ , где  $i = 1, 2$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ . Если  $v^{(i)}(y) \neq v(y, \alpha)$ , то полукасательная к кривой  $g^{(i)}(m, y)$  в точке  $y$  не лежит на прямой  $\pi(x[v^{(i)}(y), \alpha], y)$ .

5.15. Если  $R_\gamma \neq \emptyset$ , то  $y_\gamma \in g^{(1)}$  и  $u^{(1)}(y_\gamma) \neq u^{(2)}(y_\gamma)$ .

5.16. Если  $g_\varphi^{(1)} = r_\varphi^{(1)}$ ,  $y_\varphi \neq m$ , то  $y_\varphi \in g^{(1)}$  и  $u^{(1)}(y_\varphi) \neq u^{(2)}(y_\varphi)$ .

5.17. Если  $g^{(1)}$  — закручивающаяся спираль, то  $R_\gamma = \emptyset$ .

5.18. Если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  положительные или комплексные и  $v^{(2)} < \infty$ , то  $R_\zeta \neq \emptyset$ .

5.19. Пусть  $i = 1, 2$ . Если  $v^{(i)} \geq 3$ , то кривая  $g^{(i)}$  является либо простой замкнутой кривой, либо закручивающейся спиралью, либо раскручивающейся спиралью.

5.20. Если  $R_\gamma \neq \emptyset$ ,  $R_\varphi = \emptyset$ , то  $v_\varphi^{(2)} = \infty$ .

5.21. Пусть  $v_\varphi^{(1)} = \infty$  и кривая  $g_\varphi^{(1)}$  — закручивающаяся спираль. Тогда кривая  $g_\varphi^{(1)}$  имеет предельный цикл [7].

5.22. Пусть  $v_\varphi^{(2)} = \infty$  и кривая  $g_\varphi^{(2)}$  — раскручивающаяся спираль, имеющая хотя бы одну предельную точку [7]. Тогда кривая  $g_\varphi^{(2)}$  имеет предельный цикл.

5.23. Пусть  $v_\varphi^{(1)} = \infty$  и кривая  $g_\varphi^{(1)}$  — раскручивающаяся спираль. Тогда  $v_\varphi^{(2)} = \infty$  кривая  $g_\varphi^{(2)}$  — раскручивающаяся спираль. Кроме того, кривая  $g_\varphi^{(1)}(g_\varphi^{(2)})$  не имеет предельных точек.

5.24. Если кривая  $g^{(2)}$  — закручивающаяся спираль, то  $R_\zeta \neq \emptyset$ .

Используя понятия  $\varphi$  и  $\gamma$  пересечения,  $\varphi = \beta, \zeta$ , разделим все возможные варианты взаимного расположения кривой  $g^{(2)}$  и множества  $G^{(1)}$  на три группы:

φ1.  $R_\varphi \neq \emptyset$ ,

φ2.  $R_\varphi = \emptyset$ ,  $R_\gamma \neq \emptyset$ ,

φ3.  $R_\varphi = R_\gamma = \emptyset$ .

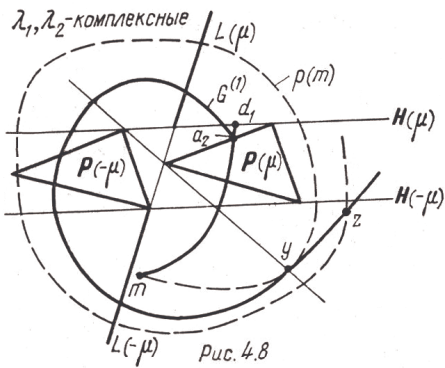


Рис. 4.8

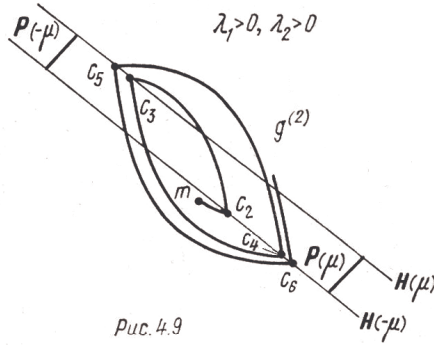


Рис. 4.9

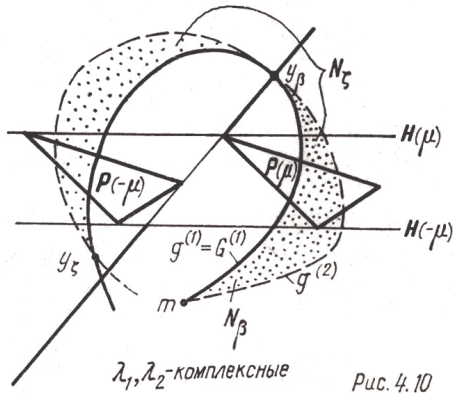


Рис. 4.10

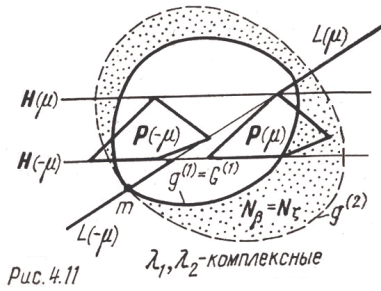


Рис. 4.11

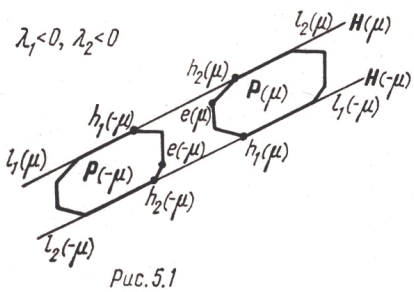


Рис. 5.1

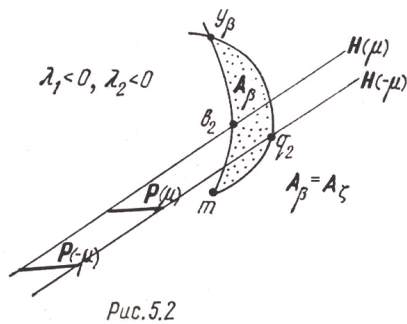


Рис. 5.2

Группу ф3, в свою очередь, разобьем на следующие случаи:  
 ф3.1.  $v^{(1)}=v^{(2)}=\infty$ . Кривые  $g^{(1)}, g^{(2)}$  — раскручивающиеся спирали;

ф3.2.  $v^{(1)}=v^{(2)}=\infty$ . Кривая  $g^{(1)}$  — закручивающаяся спираль, кривая  $g^{(2)}$  — раскручивающаяся спираль;

ф3.3.  $v^{(1)} < \infty, v^{(2)} = \infty$ ;

ф3.4.  $v^{(1)} < \infty, v^{(2)} < \infty$ .

Случаи ф3.3, ф3.4 разделим на подслучаи:

ф3.3.1. Кривая  $g^{(1)}$  замкнута;

ф3.3.2. Кривая  $g^{(1)}$  незамкнута;

ф3.4.1.  $v^{(1)}=v^{(2)}=1$ . Кривая  $g^{(1)}$  обрывается на интервале  $(h_1(-\mu), h_2(\mu))$ , кривая  $g^{(2)}$  лежит ниже прямой  $H(-\mu)$ ;

ф3.4.2.  $v^{(1)}=v^{(2)}=1$ . Кривая  $g^{(1)}$  лежит ниже прямой  $H(\mu)$ , кривая  $g^{(2)}$  — ниже прямой  $H(-\mu)$ ;

ф3.4.3.  $v^{(1)}=2, v^{(2)}=1$ .

Введем вспомогательные множества  $A_\beta, A_\zeta$ . Они будут использованы при построении множеств  $A, B$ . Пусть ниже  $\varphi = \beta, \zeta$ .

В случае ф1 положим  $A_\varphi = N_\varphi$ .

В случаях ф2, ф3.1, ф3.2, ф3.3.1, ф3.4.2, ф3.4.3 за  $A_\varphi$  примем наименьшее замкнутое множество, содержащее все точки  $x$ , каждую из которых можно соединить простой кривой с точкой  $m$  так, чтобы: 1) на кривой имелась дуга, лежащая внутри криволинейного треугольника  $\omega$ ; 2) кривая не переходила с отрицательной стороны кривой  $g_\varphi^{(1)}$  ( $g^{(2)}$ ) на ее положительную сторону.

В случае ф3.3.2 за  $A_\varphi$  примем наименьшее замкнутое множество, содержащее все точки  $x$ , каждую из которых можно соединить простой кривой с точкой  $m$  так, чтобы: 1) на кривой имелась дуга, лежащая внутри криволинейного треугольника  $\omega$ ; 2) кривая не переходила с отрицательной стороны кривой  $g^{(2)}$  на ее положительную сторону.

В случае ф3.4.1. пусть  $A_\varphi = X$ .

Примеры множеств  $A_\beta, A_\zeta$  показаны на рис. 5.2—5.5.

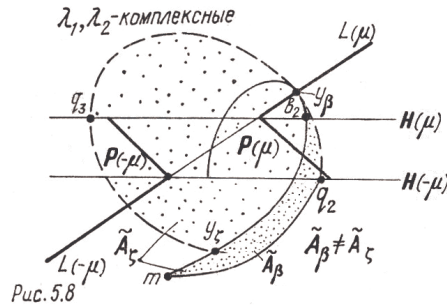
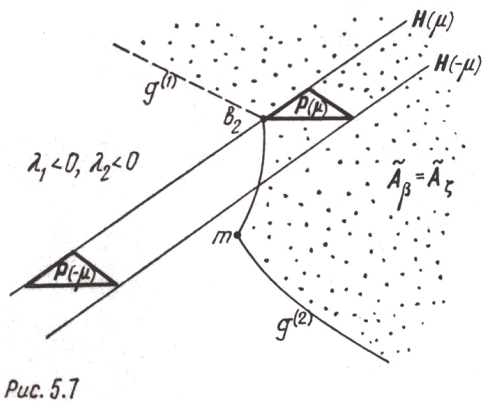
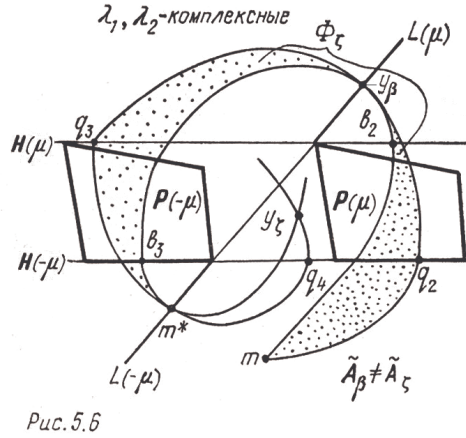
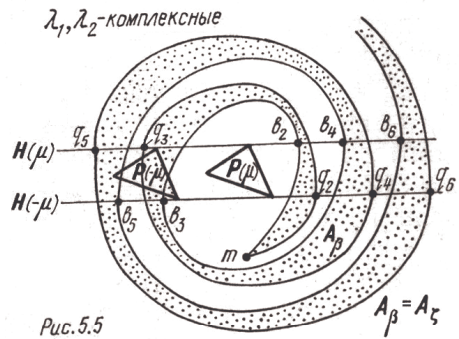
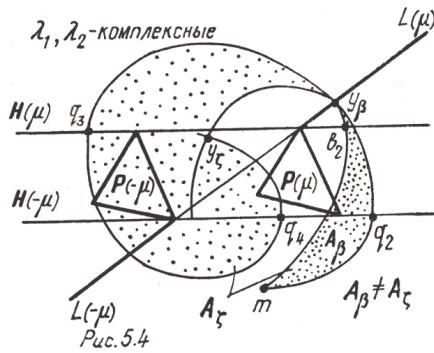
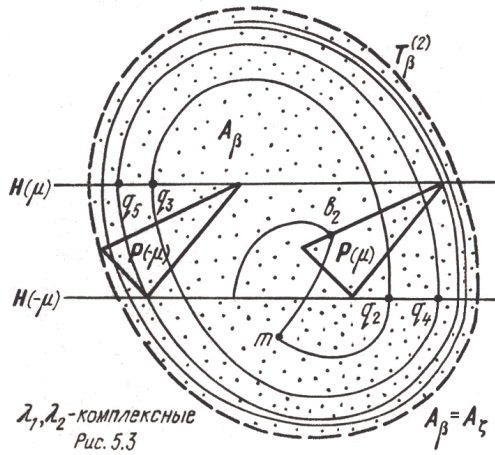
Обозначим через  $T_\varphi^{(i)}$  предельный цикл кривой  $g_\varphi^{(i)}$ ;  $i=1, 2$ ,  $\varphi = \beta, \zeta$ . Заметим, что если  $T_\zeta^{(i)} = \emptyset$ , то  $T_\beta^{(i)} = \emptyset$ ,  $i=1, 2$ . Если кривая  $T_\zeta^{(1)}$  имеет хотя бы одну точку излома, не совпадающую ни с одной из точек  $h_2(\mu), h_2(-\mu)$ , положим  $\hat{T}_\zeta^{(1)} = T_\zeta^{(1)}$ . В противном случае пусть  $\hat{T}_\zeta^{(1)} = \emptyset$ . Примем  $\tilde{T}_\zeta^{(1)} = T_\zeta^{(1)} \setminus \hat{T}_\zeta^{(1)}$ .

Если  $m^* \neq \emptyset$ , то определим  $\Phi_\zeta$  как замкнутое множество, заключенное между кривыми  $g_\zeta^{(1)}(m, m^*), g_\zeta^{(2)}(m, m^*)$  (рис. 5.6). Если  $m^* = \emptyset$ , то пусть  $\Phi_\zeta = A_\zeta$ .

Пусть

$$\tilde{A}_\beta = \hat{A}_\beta \cup (E_\beta \cap \text{Fr } A_\beta), \quad (5.1)$$

$$\tilde{A}_\zeta = \begin{cases} \hat{\Phi}_\zeta \cup (E_\zeta \cap \text{Fr } \Phi_\zeta), & \text{если } m^* \neq \emptyset, \\ \hat{\Phi}_\zeta \cup (E_\zeta \cap \text{Fr } \Phi_\zeta) \cup \hat{T}_\zeta^{(1)}, & \text{если } m^* = \emptyset. \end{cases} \quad (5.2)$$



На рис. 5.7, 5.8 показаны примеры множеств  $\tilde{A}_\varphi$ ,  $\varphi = \beta, \zeta$ . Часть границы  $\text{Fr } \tilde{A}_\varphi$ , не входящая в  $\tilde{A}_\varphi$ , отмечена пунктиром.

Теорема 5.1.  $A = \tilde{A}_\beta$ ,  $B = X \setminus \tilde{A}_\zeta$ .

Теорема вытекает из следующих утверждений, доказываемых в п. п. 7—9.

Лемма 5.1.  $\tilde{A}_\beta \subset A$ .

Лемма 5.2.  $X \setminus \tilde{A}_\zeta \subset B$ .

Лемма 5.3.  $A_\zeta \setminus \tilde{A}_\zeta \subset B$ .

Лемма 5.4.  $\tilde{A}_\zeta \cap B = \emptyset$ .

Лемма 5.5.  $(A_\zeta \setminus \tilde{A}_\beta) \cap A = \emptyset$ .

Перейдем к доказательству утверждений 5.1—5.24. Предварительно отметим следующие простые свойства. Пусть  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ .

5.25. Если  $m < k(-\mu)$ , то  $\omega^{(1)}(m) \cap \hat{k}_*(-\mu) = \emptyset$ .

5.26. Если  $m > k(-\mu)$ , то кривая  $\omega^{(1)}(m)$  обрывается в точке  $k_*(-\mu)$ , причем  $\omega^{(1)}(m) \setminus \{k_*(-\mu)\} > k(-\mu)$ .

5.27. Пусть  $v^{(2)} > 1$ ,  $q_2 < k(-\mu)$ . Тогда  $\omega^{(2)}(q_2) \cap \hat{k}^*(-\mu) = \emptyset$ .

5.28. Пусть  $v^{(2)} > 2$ ,  $q_3 > k(\mu)$ . Тогда  $\omega^{(2)}(q_3) \cap \hat{k}_*(\mu) = \emptyset$ .

5.29. Пусть  $v^{(1)} > 1$ . Если  $b_2 > \pi_2(C^*(\mu))$ , то кривая  $\omega^{(1)}(b_2)$  обрывается в точке  $C^*(\mu)$ , причем  $\omega^{(1)}(b_2) \setminus \{C^*(\mu)\} < k(\mu)$ . Если  $b_2 \leq \pi_2(C_*(\mu))$ , то  $\omega^{(1)}(b_2) \setminus \{b_2\} < k(\mu)$ .

Доказательства утверждений 5.1—5.24. Утверждения 5.1, 5.5, 5.12 следуют непосредственно из определения множеств  $Y(\alpha)$ ,  $Z(\alpha)$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ .

5.2. В силу 5.1  $b_2 \geq k(\mu)$ . Поэтому  $\frac{dx_2^{(1)}(b_2, \tau)}{d\tau} \geq 0$  при любом  $\tau \geq 0$ .

5.3. Так как  $v^{(2)} > 1$ ,  $f^{(1)}(m) \geq f^{(2)}(m)$ , то  $m > k(\mu)$ ,  $m > k(-\mu)$ .

В силу последнего  $q_2 > k(-\mu)$  и значит  $\frac{dx_2^{(2)}(q_2, \tau)}{d\tau} > 0$  при любом  $\tau \geq 0$ . Неравенство  $v^{(1)} > 1$  следует из  $m > k(\mu)$ ,  $m > k(-\mu)$  и утверждения 5.1.

5.4. Если  $v^{(1)} > 1$ , то  $m > k(-\mu)$  и значит  $b_2 > k(-\mu)$ . Утверждение вытекает теперь из 5.2, 5.3.

5.6. Если  $k(\mu) < k(-\mu)$ , то утверждение следует из 5.5, 5.29.

Пусть  $k(\mu) \geq k(-\mu)$ . Тогда  $m > k(\mu)$ , ибо  $\rho^{(1)} > \rho^{(2)}$ . Отсюда  $\omega^{(2)}(m) \geq k(\mu)$ . Если  $\omega^{(1)}(m) \cap H(-\mu) \leq k(\mu)$  (рис. 5.9), то  $v_\varphi^{(1)} = 1$ . В противном случае (рис. 5.10)  $v_\varphi^{(1)} = 2$ .

5.7. Предположим, что  $v^{(2)} > 1$ . Тогда, если  $m < k(-\mu)$ , то с учетом 5.25  $q_2 < k(-\mu)$ . Отсюда в силу 5.25, 5.27  $R_\zeta \neq \emptyset$ ,  $v^{(2)} = 2$ .

Пусть  $m \in k(-\mu)$ . Тогда кривая  $\omega^{(1)}(m)$  идет по  $k(-\mu)$  и обрывается в точке  $C_*(-\mu)$ . Поскольку  $\rho^{(1)} > \rho^{(2)}$ , то  $R_\zeta \neq \emptyset$ ,  $v^{(2)} = 2$ . Отсюда в силу 5.27  $R_\zeta \neq \emptyset$ ,  $v^{(2)} = 2$ .

Пусть  $m > k(-\mu)$  (рис. 5.10). Если  $q_2 < k(-\mu)$ , то соотношения

$R_\xi \neq \emptyset$ ,  $v^{(2)}=2$  следуют из 5.26, 5.27. Если  $q_2 \geq k(-\mu)$ , то  $q_2 \neq C_*(-\mu)$ . Следовательно, на прямой  $H(-\mu)$  выше кривой  $\omega^{(1)}(m)$  есть точка из  $P(-\mu)$ . Стало быть, и в этом случае  $R_\xi \neq \emptyset$ ,  $v^{(2)}=2$ .

Итак, если  $v^{(2)} > 1$ , то  $R_\xi \neq \emptyset$ ,  $v^{(2)}=2$ . Если  $v^{(2)}=1$ , то непустота  $R_\xi$  очевидна.

5.8. Предположим, что  $v^{(2)} > 3$ . Тогда по определению кривой  $g^{(2)}$  точка  $q_3$  лежит на прямой  $H(\mu)$  выше конечной точки кривой  $\omega^{(1)}(m)$ .

Пусть  $q_3 > k(\mu)$  (рис. 5.11). Если  $b_2 \leq \pi_2(C_*(\mu))$ , то в силу 5.28 кривая  $\omega^{(2)}(q_3)$  пересекает  $\omega^{(1)}(m)$ . Отсюда  $R_\xi \neq \emptyset$ ,  $v^{(2)}=3$ . Если  $b_2 > \pi_2(C^*(\mu))$ , то соотношения  $R_\xi \neq \emptyset$ ,  $v^{(2)}=3$  следуют из 5.28, 5.29.

Пусть  $q_3 \leq k(\mu)$ . Тогда  $b_2 > \pi_2(C^*(\mu))$ , ибо в противном случае точка  $q_3$  лежала бы на прямой  $H(\mu)$  ниже конечной точки кривой  $\omega^{(1)}(m)$ . В силу 5.29  $R_\xi \neq \emptyset$ ,  $v^{(2)}=3$ .

Если  $v^{(2)} \leq 2$ , то непустота  $R_\xi$  очевидна.

5.9. Следует из того, что в указанном случае  $v_\varphi^{(1)} \leq 2$  (см. 5.4, 5.6).

5.10. Предположим, что  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . Если  $m \leq k(-\mu)$ , то  $\omega^{(1)}(m) < H(-\mu)$ . Если  $m > k(\mu)$ , то  $\omega^{(1)}(m) > k(-\mu)$ . Поэтому случай  $y \in P(-\mu)$  невозможен. Невозможность случая  $y \in P(\mu)$  вытекает из 5.2, 5.4.

Пусть корни  $\lambda_1, \lambda_2$  комплексные. Опираясь на определение кривой  $g^{(1)}$  и используя принятый вид матрицы  $A$  при комплексных корнях, нетрудно вывести из условия  $y \in P(\alpha)$ , что при любом  $x$  на  $g^{(1)}(m, y)$ , достаточно близком к  $y$ ,  $f(x, \alpha, v(y, \alpha)) < f^{(1)}(x, \alpha)$ . Последнее противоречит определению функции  $f^{(1)}(x, \alpha)$ .

Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , то есть примеры (рис. 5.12), где  $y \in P(\alpha)$ . То, что  $y \in J(\alpha)$  и является точкой обрыва, следует из определения кривой  $g^{(1)}$ .

5.11. Поскольку  $v^{(2)}(y) = v(y, \alpha)$ , то некоторая достаточно малая дуга  $(\kappa^{(2)}y)$  кривой  $g^{(2)}(m, y)$ , для любой точки  $x$  которой  $v^{(2)}(x) = v^{(2)}(y)$ , есть траектория системы  $\dot{x} = Ax + \alpha - v(y, \alpha)$ , причем если  $x(t_*) \in (\kappa^{(2)}y)$ , то при  $t \geq t_*$  движение идет от точки равновесия  $y$ . Последнее возможно только при  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ .

5.13. Пусть  $a_i \in J(\alpha)$ , где  $\alpha = \tilde{u}^{(1)}(a_i)$ , и  $\tilde{v}^{(1)}(a_i) = v(a_i, \alpha)$ . Тогда некоторая достаточно малая дуга  $[a_i \kappa^{(1)}]$  кривой  $g^{(1)}(a_i)$ , для любой точки  $x$  которой  $\tilde{v}^{(1)}(x) = \tilde{v}^{(1)}(a_i)$ , есть траектория системы  $\dot{x} = Ax + \alpha - v(a_i, \alpha)$ , причем если  $x(t_*) \in (a_i \kappa^{(1)})$ , то при  $t \geq t_*$  движение идет к точке равновесия  $a_i$ . Последнее возможно только при  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ .

5.14. Предположим противное. Поскольку достаточно малая дуга  $(\kappa^{(i)}y)$  кривой  $g^{(i)}(m, y)$  есть траектория системы  $\dot{x} = Ax + \alpha - v^{(i)}(y)$ , то вектор  $Ay + \alpha - v^{(i)}(y)$ , приложенный к точке  $y$ , направлен по прямой  $\pi(x[v^{(i)}(y), \alpha], y)$  от точки равновесия

$x[v^{(i)}(y), \alpha]$ . Следовательно, дуга  $(\kappa^{(i)}y)$  лежит на прямой  $\pi(x[v^{(i)}(y), \alpha], y)$ , что противоречит условию  $v^{(i)}(y) \neq v(y, \alpha)$ .

5.15, 5.16. Следуют из того, что кривая  $G^{(1)}(m, y_\xi)$  подходит к кривой  $g^{(2)}$  в точке  $y_\xi$  с отрицательной стороны,  $\xi = \varphi, \gamma$ .

5.17. Предположим, что  $R_\gamma \neq \emptyset$ . В силу 5.15  $y_\gamma \in g^{(1)}$ . Отрицательная сторона дуги  $g^{(1)}(m, y_\gamma)$  должна быть обращена внутрь множества, ограниченного кривой, составленной из дуг  $g^{(1)}(m, y_\gamma)$ ,  $g^{(2)}(m, y_\gamma)$ . Но это невозможно, когда  $g^{(1)}$  — закручивающаяся спираль.

5.18. Следует из определения кривых  $g^{(1)}, g^{(2)}$  и утверждений 5.7, 5.8, 5.10.

5.19. Вытекает из определения кривой  $g^{(i)}$ .

5.20. Вытекает из определения кривой  $g_\varphi^{(2)}$  с учетом 4.4, 5.4, 5.6, 5.15, 5.17, 5.18, 5.19.

5.21. В силу 5.4, 5.6 случай  $v_\varphi^{(1)} = \infty$  возможен только при комплексных  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Пусть  $x_*$  ( $x^*$ ) — предельная точка последовательности  $\{b_{2i}\}$  ( $\{b_{2i+1}\}$ ),  $i=1, 2, \dots$  (рис. 5.13). Очевидно,  $x_* \in [e(\mu)h_2(\mu)l_2(\mu)]$  ( $x^* \in [e(-\mu)h_2(-\mu)l_1(-\mu)]$ ). Покажем, что  $x_* \neq h_1(\mu)$ , если  $e(\mu) = h_1(\mu)$ . Предположим противное. Тогда можно указать такой номер  $j$ , что при любом  $i > j$  точки  $b_{2i}$  и  $x_* = h_1(\mu)$  принадлежат одной грани многоугольника  $P(\mu)$ . Отсюда вытекает, что для любого  $i > j$  дуга  $g_\varphi^{(1)}(b_{2i}, b_{2i+1})$  лежит на траектории движения

системы  $\dot{x} = -Ax - \mu + v(x_*, \mu)$  при  $t \geq 0$  из точки  $x(0) = b_{2i}$  до точки первого выхода на прямую  $H(-\mu)$ . Поскольку  $x_*$  есть точка равновесия рассматриваемой системы, то при достаточно большом  $i > j$  траектория проходит в множестве  $J \setminus J(-\mu)$ , что противоречит условию  $v_\varphi^{(1)} = \infty$ . Аналогично показывается, что  $x^* = h_1(-\mu)$ , если  $e(-\mu) = h_1(-\mu)$ .

Выпустим из  $x_*$  кривую  $p^{(1)}(x_*)$ . Пусть  $T'_*$  — часть этой кривой от точки  $x_*$  до точки первого выхода на прямую  $H(-\mu)$ . Дуга  $T'_*$  является предельной для аналогичных дуг последовательности кривых  $\{p^{(1)}(b_{2i})\}$ . Поэтому  $x^* \in T'_*$ . Обозначим через  $T_*$  (рис. 5.13) часть дуги  $T'_*$  от  $x_*$  до  $x^*$ . Дуга  $T_*$  является предельной для последовательности дуг  $\{g_\varphi^{(1)}(b_{2i}, b_{2i+1})\}$ .

Аналогично можно построить дугу  $T^* \subset p^{(1)}(x^*)$ , соединяющую точки  $x^*$ ,  $x_*$  и являющуюся предельной для последовательности дуг  $\{g_\varphi^{(1)}(b_{2i+1}, b_{2i+2})\}$ . Простая замкнутая кривая  $T_\varphi^{(1)}$ , составленная из дуг  $T_*$  и  $T^*$ , есть предельный цикл кривой  $g_\varphi^{(1)}$ .

5.22. Соединим точки  $q_2, q_3$  простой кривой, не имеющей других точек пересечения с  $g_\varphi^{(2)}$ , кроме  $q_2, q_3$ . Кривая  $l_1(\mu)q_3q_2l_1(-\mu)$  делит плоскость на две части  $X_1, X_2$  (рис. 5.14). Кривую  $(q_3q_2l_1(-\mu))$  включим в  $X_1$ , полупрямую  $[q_3l_1(\mu)]$  — в  $X_2$ . Дуги кривой  $g^{(2)}$ , лежащие в  $X_1$ , удовлетворяют уравнению

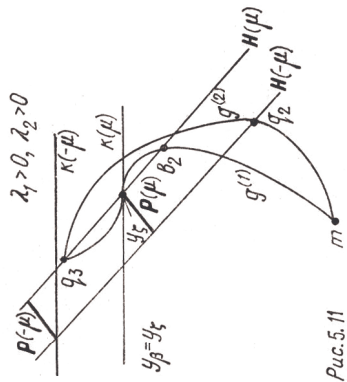


Рис. 5.9

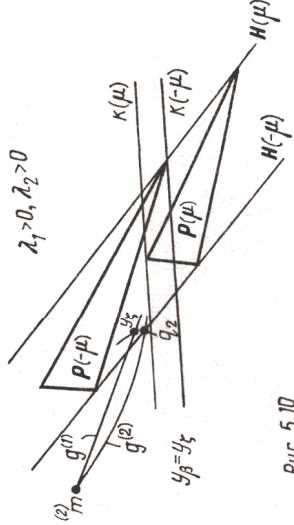


Рис. 5.10

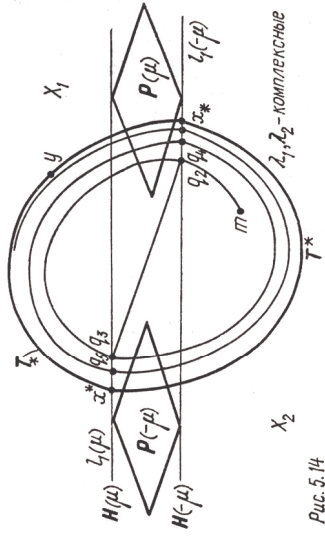


Рис. 5.11

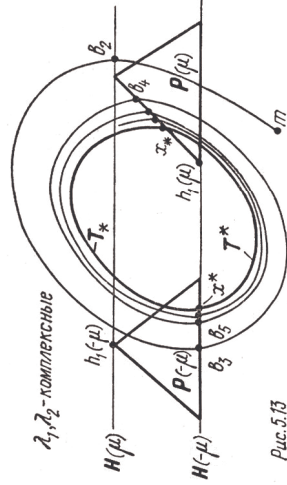


Рис. 5.12

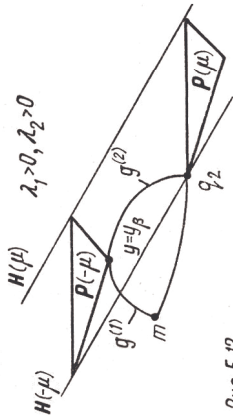


Рис. 5.13

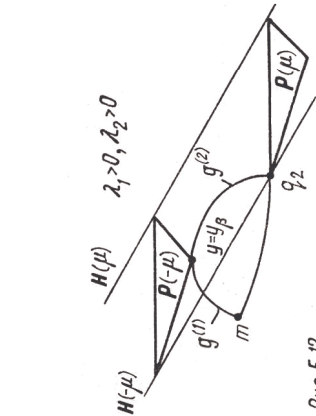


Рис. 5.14

$$\frac{dx}{d\tau} = f^{(2)}(x, -\mu), \quad (5.3)$$

дуги, лежащие в  $X_2$ , — уравнению

$$\frac{dx}{d\tau} = f^{(2)}(x, \mu). \quad (5.4)$$

Предположим для определенности, что указанная в формулировке предельная точка  $y$  лежит в  $X_1$ . Проведем через  $y$  траекторию  $T_*$  системы (5.3). Будем считать, что  $T_*$  продолжена в обе стороны до границы множества  $X_1$ . Поскольку в силу 5.4 случай  $v_\varphi^{(2)} = \infty$  возможен только при  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  или же при комплексных  $\lambda_1, \lambda_2$ , то один конец траектории  $T_*$  будет лежать на полупрямой  $[q_2 l_1(-\mu)]$ , а второй — на полупрямой  $[q_3 l_1(\mu)]$ . Следовательно, пересечение кривой  $g_\varphi^{(2)}$  с  $X_1$  принадлежит ограниченному множеству и, стало быть, дуга  $T_*$  является предельной для последовательности дуг  $\{g_\varphi^{(2)}(q_{2i}, q_{2i+1})\}$ .

Пусть  $x_* \in T_*$  ( $x_* \in T_*$ ) — предельная точка последовательности  $\{q_{2i+1}\}$  ( $\{q_{2i}\}$ ). Выпустим из  $x_*$  траекторию  $T^*$  системы (5.4). Продолжим ее до выхода на полупрямую  $[q_2 l_1(-\mu)]$ . Траектория  $T^*$  будет предельной для последовательности дуг  $\{g_\varphi^{(2)}(q_{2i+1}, q_{2i+2})\}$ , ее конечная точка совпадает с  $x_*$ .

Простая замкнутая кривая  $T_\varphi^{(2)}$ , составленная из дуг  $T_*$  и  $T^*$ , есть предельный цикл кривой  $g_\varphi^{(2)}$ .

5.23. В силу 5.4, 5.6 и условия  $v_\varphi^{(1)} = \infty$  корни  $\lambda_1, \lambda_2$  — комплексные. Поскольку  $g_\varphi^{(1)}$  — раскручивающаяся спираль и  $v_\varphi^{(1)} = \infty$ , то  $g_\varphi^{(2)}$  — раскручивающаяся спираль и  $v_\varphi^{(2)} = \infty$ . Если бы какая-либо из кривых  $g_\varphi^{(1)}, g_\varphi^{(2)}$  имела предельную точку, то тогда у нее был бы предельный цикл, что, в свою очередь, повлекло существование предельного цикла и у другой кривой. Предельные циклы кривых  $g_\varphi^{(1)}, g_\varphi^{(2)}$  должны были бы совпасть, что невозможно, ибо они описываются различными уравнениями.

5.24. Если  $v^{(2)} < \infty$ , то утверждение вытекает из 5.4, 5.18. Пусть  $v^{(2)} = \infty$  и  $R_\zeta = \emptyset$ . Тогда  $g^{(2)}$  имеет предельный цикл  $T^{(2)}$ . Кроме того, из определения кривых  $g^{(1)}$  и  $g^{(2)}$ , с учетом 5.4, 5.6, 5.10, 5.19 следует, что  $g^{(1)}$  — закручивающаяся спираль и  $v^{(1)} = \infty$ . Следовательно,  $g^{(1)}$  имеет предельный цикл  $T^{(1)}$ . Поскольку  $R_\zeta = \emptyset$ , то  $T^{(1)} = T^{(2)}$ , что невозможно.

6. Доказательство леммы 5.1. Пусть

$$G_\beta^{(1)} = g_\beta^{(1)} + \sum_{a_i \in g_\beta^{(1)}, i > 1} (p^{(1)}(a_i, d_{i-1}) \cap A_\beta).$$

Символом  $\rho_i^{(1)}$  ( $\rho_i^{(2)}$ ) обозначим максимальную гладкую дугу из  $G_\beta^{(1)}$  (на кривой  $g_\beta^{(2)}$ ) с началом  $b_i \in g_\beta^{(1)}$  ( $q_i \in g_\beta^{(2)}$ ),  $i \geq 1$ , в каждой внутренней точке  $x$  которой вектор  $f^{(1)}(x, (-1)^i \mu)$  ( $f^{(2)}(x, (-1)^{i+1} \mu)$ )

является касательным. Если длина дуги  $\rho_i^{(1)}$  ограничена, то пусть  $\bar{b}_i$  — ее конечная точка. Очевидно, что  $\bar{b}_i$  совпадает с одной из точек  $b_{i+1}$ ,  $d_i$ ,  $y_\beta$ . Если  $\sigma_i^{(1)} = \rho_i^{(1)} \cap X((-1)^i \mu) \neq \emptyset$  ( $\sigma_i^{(2)} = \rho_i^{(2)} \cap X((-1)^{i+1} \mu) \neq \emptyset$ ), то обозначим через  $\hat{b}_i$  ( $\hat{q}_i$ ) ту из крайних точек дуги  $\sigma_i^{(1)}$  ( $\sigma_i^{(2)}$ ), расстояние от которой по кривой  $\rho_i^{(1)}$  ( $\rho_i^{(2)}$ ) до точки  $b_i$  ( $q_i$ ) является наименьшим.

Предположим, что  $n$  — натуральное число и  $S^{(n)}$  — замкнутая окрестность множества  $V$  радиуса  $\frac{1}{n}$ . Будем считать, что  $n \geq \bar{n}$ , где  $\bar{n}$  таково, что множества  $\mu + S^{(n)}$  и  $-\mu + S^{(n)}$  не пересекаются. Пусть  $V^{(n)}$  — произвольный замкнутый выпуклый многоугольник, вложенный в  $S^{(n)}$  и содержащий  $S^{(n+1)}$ . Через  $E^{(n)}(-\mu)$  обозначим множество, построенное по той же формуле, что и  $E(-\mu)$ , см. (4.2), но с тем отличием, что при определении величин, входящих в эту формулу, вместо  $V$  взято множество  $V^{(n)}$ . На дуге  $\rho_1^{(1)} \cap \omega$  выберем последовательность точек  $\{m^{(n)}\}$ , монотонно сходящуюся к  $m$ , для которой при любом  $n \geq \bar{n}$   $m^{(n)} \in E^{(n)}(-\mu)$ .

Пусть  $\gamma$  — обозначение некоторой величины (т. е. множества, вектора, кривой), введенной раньше. Символом  $\gamma^{(n)}$  обозначим величину, аналогичную  $\gamma$ , но определенную не на основе множества  $V$  и точки  $m$ , а на основе множества  $V^{(n)}$  и точки  $m^{(n)}$ . Например,  $P^{(n)}(\alpha) = \{x: -Ax - \alpha + V^{(n)} \supseteq 0\}$ .

Положим

$$\hat{E}_\beta^{(n)} = (g_\beta^{(1)(n)} \cup g_\beta^{(2)(n)}) \setminus \{\tilde{y}_\beta^{(n)}\},$$

$$\hat{A}_\beta^{(n)} = \hat{A}_\beta^{(n)} \cup (\hat{E}_\beta^{(n)} \cap \text{Fr } A_\beta^{(n)}).$$

Справедливы следующие свойства: 1) при любом  $n \geq \bar{n}$   $\hat{A}_\beta^{(n)} \setminus \{m^{(n)}\} \subset \hat{A}_\beta$ ; 2) для любого  $x_0 \in \hat{A}_\beta$  можно указать такое  $n_0 \geq \bar{n}$ , что  $x_0 \in \hat{A}_\beta^{(n_0)}$ .

Лемма 6.1. Пусть  $n \geq \bar{n}$ . Существует допустимая дискретная схема  $\{u^{(n)}[x], \delta^{(n)}[x]\}$ , обеспечивающая первому игроку время  $T[x_0; \{u^{(n)}[x], \delta^{(n)}[x]\}] < \infty$  для любого  $x_0 \in \hat{A}_\beta^{(n)}$  и сохраняющая движение в  $\hat{A}_\beta^{(n)}$  до первого момента попадания в точку  $m^{(n)}$ .

Доказательство. Опишем элементарные ячейки  $\Pi_j$  ( $j$  — порядковый номер ячейки), из которых составляются множества  $\hat{A}_\beta^{(n)}$ . С помощью этих ячеек определим затем дискретную схему  $\{u^{(n)}[x], \delta^{(n)}[x]\}$ . Поскольку  $n$  фиксировано, то при описании ячеек ради простоты записи опустим верхний индекс  $n$  (на рисунках он сохранен). Ячейки  $\Pi_1 - \Pi_{25}$  — замкнутые криволинейные многоугольники. При их характеристике вначале указываются вершины многоугольника, затем стороны. Все ячейки показаны на рис. 6.1—

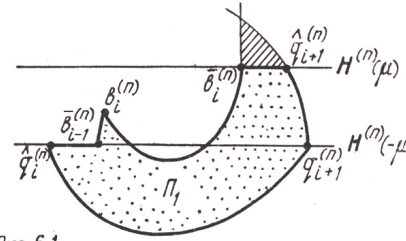


Рис. 6.1

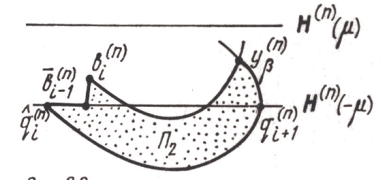


Рис. 6.2

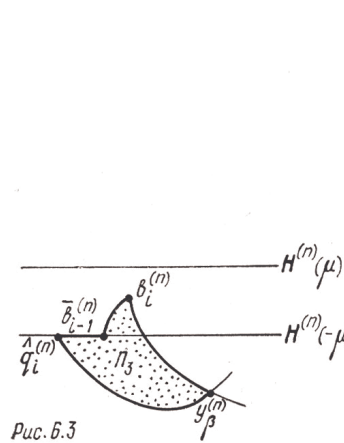


Рис. 6.3

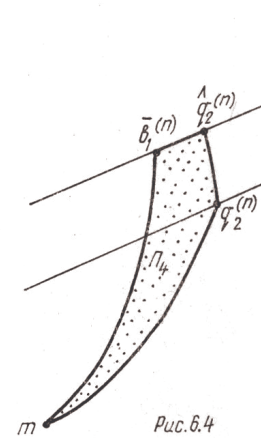


Рис. 6.4

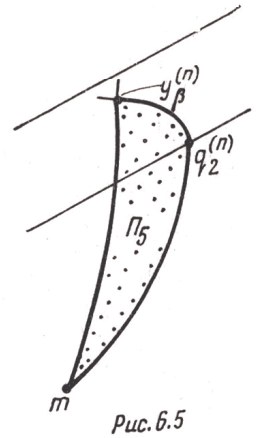


Рис. 6.5

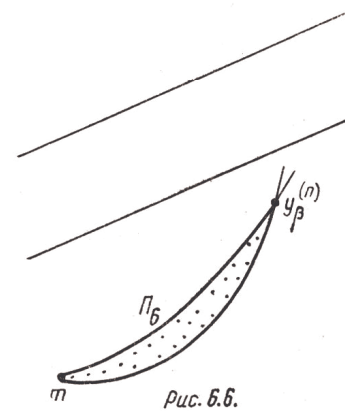


Рис. 6.6

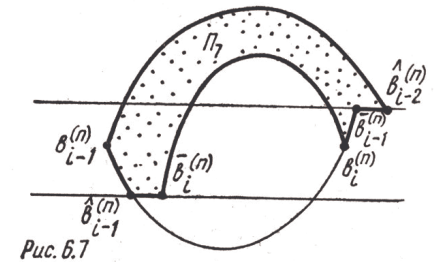


Рис. 6.7

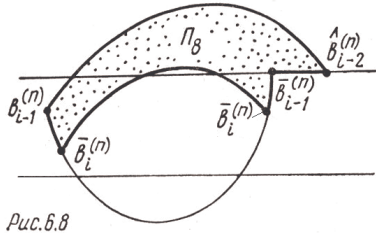


Рис. 6.8

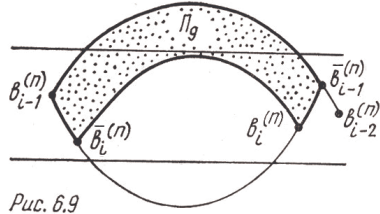


Рис. 6.9

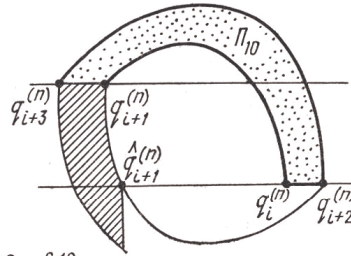


Рис. 6.10

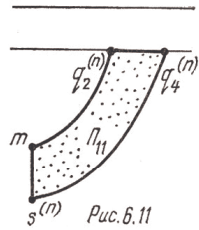


Рис. 6.11

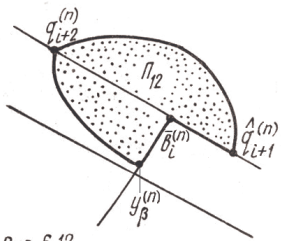


Рис. 6.12

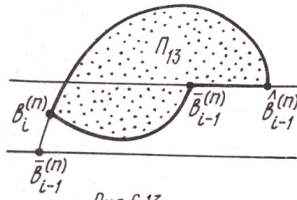


Рис. 6.13

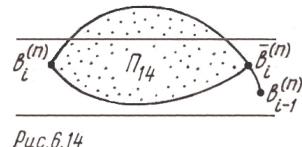


Рис. 6.14

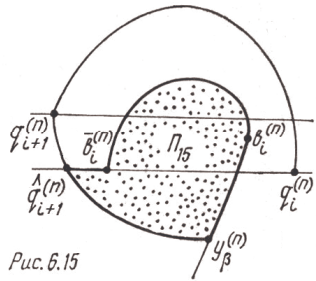


Рис. 6.15

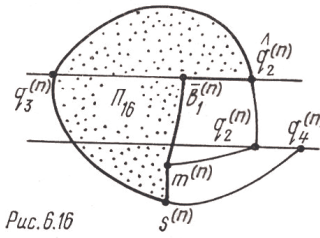


Рис. 6.16

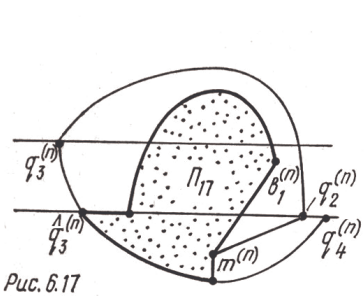


Рис. 6.17

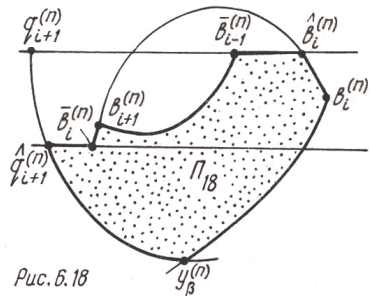


Рис. 6.18

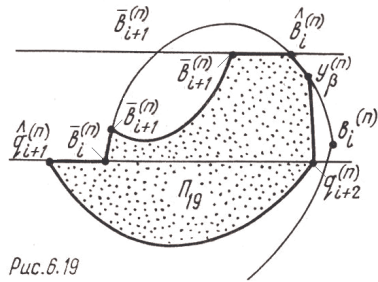


Рис. 6.19

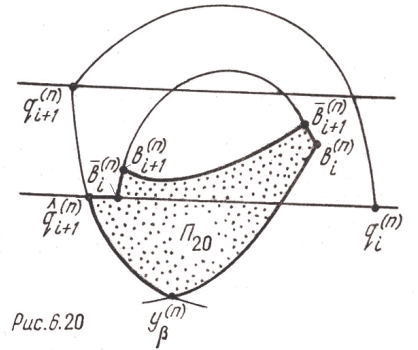


Рис. 6.20

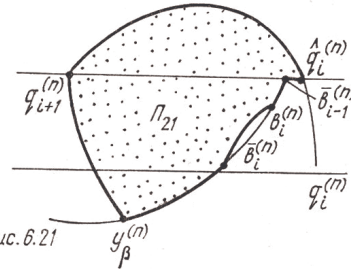


Рис. 6.21

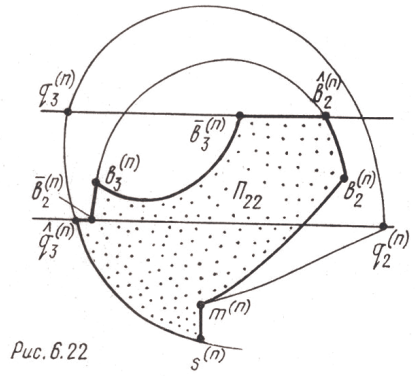


Рис. 6.22

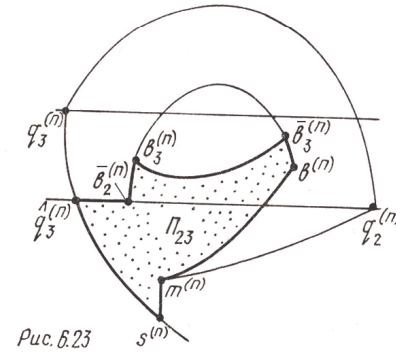


Рис. 6.23

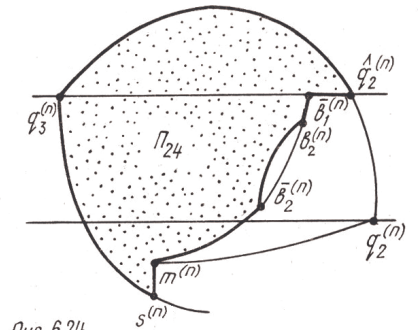


Рис. 6.24



6.30. Номер рисунка соответствует номеру ячейки. Если дуга  $\rho_3^{(2)(n)}$  проходит ниже точки  $m^{(n)}$ , положим  $s^{(n)} = \pi_2(m^{(n)}) \cap \rho_3^{(2)(n)}$ .

П<sub>1</sub>: Криволинейный многоугольник. Вершины:  $b_i, \bar{b}_i, \hat{q}_{i+1}, q_{i+1}, \hat{q}_i, \bar{b}_{i-1}$ ; стороны:  $\rho_i^{(1)}(b_i, \bar{b}_i), [\bar{b}_i, \hat{q}_{i+1}] \subset H((-1)^{i+1}\mu), \rho_{i+1}^{(2)}(q_{i+1}, \hat{q}_{i+1}), \rho_i^{(2)}(\hat{q}_i, q_{i+1}), [\hat{q}_i, \bar{b}_{i-1}] \subset H((-1)^i\mu), \rho_{i-1}^{(1)}(b_i, \bar{b}_{i-1})$ .

П<sub>2</sub>:  $b_i, \gamma_\beta, q_{i+1}, \hat{q}_i, \bar{b}_{i-1}$ ;  $\rho_i^{(1)}(b_i, \gamma_\beta), \rho_{i+1}^{(2)}(q_{i+1}, \gamma_\beta), \rho_i^{(2)}(\hat{q}_i, q_{i+1}), [\hat{q}_i, \bar{b}_{i-1}] \subset H((-1)^i\mu), \rho_{i-1}^{(1)}(b_i, \bar{b}_{i-1})$ .

П<sub>3</sub>:  $b_i, \gamma_\beta, \hat{q}_i, \bar{b}_{i-1}$ ;  $\rho_i^{(1)}(b_i, \gamma_\beta), \rho_i^{(2)}(\hat{q}_i, \gamma_\beta), [\hat{q}_i, \bar{b}_{i-1}] \subset H((-1)^i\mu), \rho_{i-1}^{(1)}(b_i, \bar{b}_{i-1})$ .

П<sub>4</sub>:  $m, \bar{b}_1, \hat{q}_2, q_2$ ;  $\rho_1^{(1)}(m, \bar{b}_1), [\bar{b}_1, \hat{q}_2] \subset H(\mu), \rho_2^{(2)}(q_2, \hat{q}_2), \rho_1^{(2)}(m, q_2)$ .

П<sub>5</sub>:  $m, \gamma_\beta, q_2$ ;  $\rho_1^{(1)}(m, \gamma_\beta), \rho_2^{(2)}(q_1, \gamma_\beta), \rho_1^{(2)}(m, q_2)$ .

П<sub>6</sub>:  $m, \gamma_\beta$ ;  $\rho_1^{(1)}(m, \gamma_\beta), \rho_1^{(2)}(m, \gamma_\beta)$ .

П<sub>7</sub>:  $b_i, \bar{b}_i, \hat{b}_{i-1}, b_{i-1}, \hat{b}_{i-2}, \bar{b}_{i-1}$ ;  $\rho_i^{(1)}(b_i, \bar{b}_i), [\bar{b}_i, b_{i-1}] \subset H((-1)^{i+1}\mu), \rho_{i-1}^{(1)}(b_{i-1}, \hat{b}_{i-1}), \rho_{i-2}^{(1)}(\hat{b}_{i-2}, b_{i-1}), [\hat{b}_{i-2}, \bar{b}_{i-1}] \subset H((-1)^i\mu), \rho_{i-1}^{(1)}(b_i, \bar{b}_{i-1})$ .

П<sub>8</sub>:  $b_i, \bar{b}_i, b_{i-1}, \hat{b}_{i-2}, \bar{b}_{i-1}$ ;  $\rho_i^{(1)}(b_i, \bar{b}_i), \rho_{i-1}^{(1)}(b_{i-1}, \bar{b}_i), \rho_{i-2}^{(1)}(\hat{b}_{i-2}, b_{i-1}), [\hat{b}_{i-2}, \bar{b}_{i-1}] \subset H((-1)^i\mu), \rho_{i-1}^{(1)}(b_i, \bar{b}_{i-1})$ .

П<sub>9</sub>:  $b_i, \bar{b}_i, b_{i-1}, \bar{b}_{i-1}$ ;  $\rho_i^{(1)}(b_i, \bar{b}_i), \rho_{i-1}^{(1)}(b_{i-1}, \bar{b}_i), \rho_{i-2}^{(1)}(\bar{b}_{i-1}, b_{i-1}), \rho_{i-1}^{(1)}(b_i, \bar{b}_{i-1})$ .

П<sub>10</sub>:  $q_i, q_{i+1}, q_{i+3}, q_{i+2}$ ;  $\rho_i^{(2)}(q_i, q_{i+1}), [q_{i+1}, q_{i+3}] \subset H((-1)^i\mu), \rho_{i+2}^{(2)}(q_{i+2}, q_{i+3})$ .

П<sub>11</sub>:  $m, s, q_4, q_2$ ;  $[m, s], \rho_3^{(2)}(s, q_4), [q_4, q_2] \subset H(-\mu), \rho_1^{(2)}(m, q_2)$ .

П<sub>12</sub>:  $\bar{b}_i, \gamma_\beta, q_{i+2}, \hat{q}_{i+1}$ ;  $\rho_i^{(1)}(\gamma_\beta, \bar{b}_i), \rho_{i+2}^{(2)}(q_{i+2}, \gamma_\beta), \rho_{i+1}^{(2)}(\hat{q}_{i+1}, q_{i+2}), [\hat{q}_{i+1}, \bar{b}_i] \subset H((-1)^{i+1}\mu)$ .

П<sub>13</sub>:  $b_i, \hat{b}_{i-1}, \bar{b}_i$ ;  $\rho_{i-1}^{(1)}(\hat{b}_{i-1}, b_i), [\hat{b}_{i-1}, \bar{b}_i] \subset H((-1)^{i+1}\mu), \rho_i^{(1)}(b_i, \bar{b}_i)$ .

П<sub>14</sub>:  $b_i, \bar{b}_i$ ;  $\rho_{i-1}^{(1)}(\bar{b}_i, b_i), \rho_i^{(1)}(b_i, \bar{b}_i)$ .

П<sub>15</sub>:  $b_i, \gamma_\beta, \hat{q}_{i+1}, \bar{b}_i$ ;  $\rho_{i-1}^{(1)}(\gamma_\beta, b_i), \rho_{i+1}^{(2)}(\hat{q}_{i+1}, \gamma_\beta), [\hat{q}_{i+1}, \bar{b}_i] \subset H((-1)^{i+1}\mu), \rho_i^{(1)}(b_i, \bar{b}_i)$ .

П<sub>16</sub>:  $m, s, q_3, \hat{q}_2, \bar{b}_1$ ;  $[m, s], \rho_3^{(2)}(q_3, s), \rho_2^{(2)}(\hat{q}_2, q_3), [\hat{q}_2, \bar{b}_1] \subset H(\mu), \rho_1^{(1)}(m, \bar{b}_1)$ .

П<sub>17</sub>:  $m, s, \hat{q}_3, \bar{b}_1, b_1$ ;  $[m, s], \rho_3^{(2)}(q_3, s), [\hat{q}_3, \bar{b}_1] \subset H(-\mu), \rho_2^{(1)}(b_1, \bar{b}_1), \rho_1^{(1)}(m, b_1)$ .

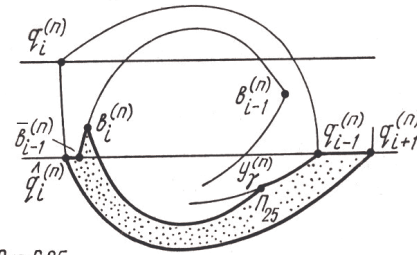


Рис. 6.25

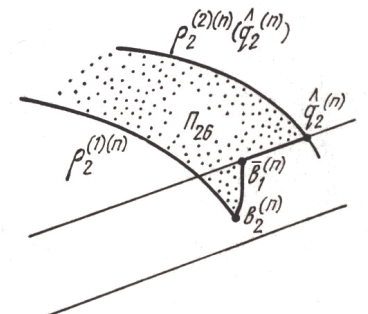


Рис. 6.26

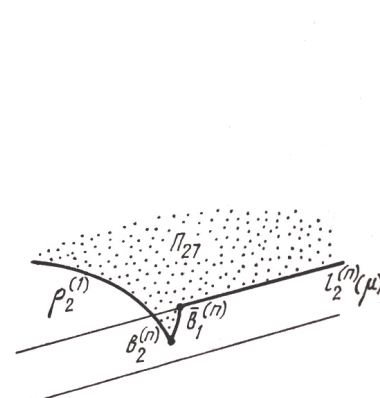


Рис. 6.27

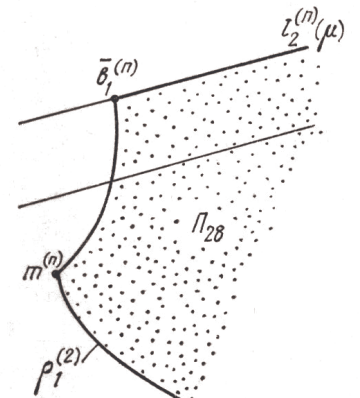


Рис. 6.28

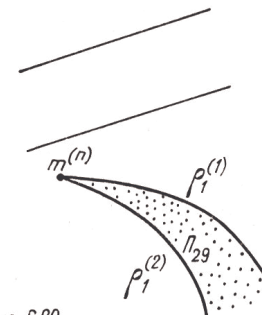


Рис. 6.29

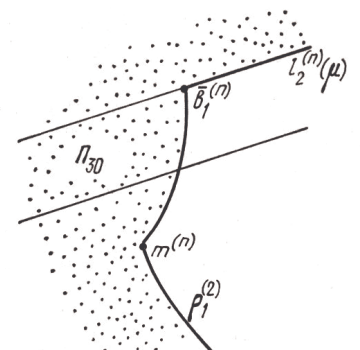


Рис. 6.30

$\Pi_{18}$ :  $b_i, \gamma_\beta, \hat{q}_{i+1}, \bar{b}_i, b_{i+1}, \bar{b}_{i+1}, \hat{b}_i; \rho_{i-1}^{(1)}(\gamma_\beta, b_i), \rho_{i+1}^{(2)}(\hat{q}_{i+1}, \gamma_\beta), [\hat{q}_{i+1}, \bar{b}_i] \subset H((-1)^{i+1}\mu), \rho_i^{(1)}(b_{i+1}, \bar{b}_i), \rho_{i+1}^{(1)}(b_{i+1}, \bar{b}_{i+1}), [\bar{b}_{i+1}, \hat{b}_i] \subset H((-1)^i\mu), \rho_i^{(1)}(b_i, \hat{b}_i).$

$\Pi_{19}$ :  $b_{i+1}, \bar{b}_{i+1}, \hat{b}_i, \gamma_\beta, q_{i+2}, \hat{q}_{i+1}, \bar{b}_i; \rho_{i+1}^{(1)}(b_{i+1}, \bar{b}_{i+1}), [\bar{b}_{i+1}, \hat{b}_i] \subset H((-1)^i\mu), \rho_i^{(1)}(\gamma_\beta, \hat{b}_i), \rho_{i+2}^{(2)}(q_{i+2}, \gamma_\beta), \rho_{i+1}^{(2)}(\hat{q}_{i+1}, q_{i+2}), [\hat{q}_{i+1}, \bar{b}_i] \subset H((-1)^{i+1}\mu), \rho_i^{(1)}(b_{i+1}, \bar{b}_{i+1}).$

$\Pi_{20}$ :  $b_i, \gamma_\beta, \hat{q}_{i+1}, \bar{b}_i, b_{i+1}, \bar{b}_{i+1}; \rho_{i-1}^{(1)}(\gamma_\beta, b_i), \rho_{i+1}^{(2)}(\hat{q}_{i+1}, \gamma_\beta), [\hat{q}_{i+1}, \bar{b}_i] \subset H((-1)^{i+1}\mu), \rho_i^{(1)}(b_{i+1}, \bar{b}_i), \rho_{i+1}^{(1)}(b_{i+1}, \bar{b}_{i+1}), \rho_i^{(1)}(b_i, \bar{b}_{i+1}).$

$\Pi_{21}$ :  $b_i, \bar{b}_i, \gamma_\beta, q_{i+1}, \hat{q}_i, \bar{b}_{i-1}; \rho_i^{(1)}(b_i, \bar{b}_i), \rho_{i-1}^{(1)}(\gamma_\beta, \bar{b}_i), \rho_{i+1}^{(2)}(q_{i+1}, \gamma_\beta), \rho_i^{(2)}(\hat{q}_i, \bar{b}_{i-1}), [\hat{q}_i, \bar{b}_{i-1}] \subset H((-1)^i\mu), \rho_{i-1}^{(1)}(b_i, \bar{b}_{i-1}).$

$\Pi_{22}$ :  $m, s, \hat{q}_3, \bar{b}_2, b_3, \bar{b}_3, \hat{b}_2, b_2; [m, s], \rho_3^{(2)}(\hat{q}_3, s), [\hat{q}_3, \bar{b}_2] \subset H(-\mu), \rho_2^{(1)}(b_3, \bar{b}_2), \rho_3^{(1)}(b_3, \bar{b}_3), [\bar{b}_3, \hat{b}_2] \subset H(\mu), \rho_2^{(1)}(b_2, \hat{b}_2), \rho_1^{(1)}(m, b_1).$

$\Pi_{23}$ :  $m, s, \hat{q}_3, \bar{b}_2, b_3, \bar{b}_3, b_2; [m, s], \rho_3^{(2)}(\hat{q}_3, s), [\hat{q}_3, \bar{b}_2] \subset H(-\mu), \rho_2^{(1)}(b_3, \bar{b}_2), \rho_3^{(1)}(b_3, \bar{b}_3), \rho_2^{(1)}(b_2, \bar{b}_3), \rho_1^{(1)}(m, b_1).$

$\Pi_{24}$ :  $m, s, q_3, \hat{q}_2, \bar{b}_1, b_2, \bar{b}_2; [m, s], \rho_3^{(2)}(q_3, s), \rho_2^{(2)}(\hat{q}_2, q_3), [\hat{q}_2, \bar{b}_1] \subset H(\mu), \rho_1^{(1)}(b_2, \bar{b}_1), \rho_2^{(1)}(b_2, \bar{b}_2), \rho_1^{(1)}(m, \bar{b}_2).$

$\Pi_{25}$ :  $b_i, \bar{b}_{i-1}, \hat{q}_i, q_{i+1}, q_{i-1}, \gamma_\nu; \rho_{i-1}^{(1)}(b_i, \bar{b}_{i-1}), [\bar{b}_{i-1}, \hat{q}_i] \subset H((-1)^i\mu), \rho_i^{(2)}(\hat{q}_i, q_{i+1}), [q_{i+1}, q_{i-1}] \subset H((-1)^i\mu), \rho_{i-2}^{(2)}(\gamma_\nu, q_{i-1}), \rho_i^{(1)}(b_i, \gamma_\nu).$

$\Pi_{26}$ . Замкнутое множество (см. рис. 6.26); элементы границы:  $\rho_1^{(1)}(b_2, \bar{b}_1), [\bar{b}_1, \hat{q}_2] \subset H(\mu), \rho_2^{(2)}(\hat{q}_2), \rho_2^{(1)}$ . Кривые  $\rho_2^{(2)}(\hat{q}_2)$  и  $\rho_2^{(1)}$  не пересекаются.

$\Pi_{27}$ . Замкнутое множество (см. рис. 6.27); элементы границы:  $\rho_2^{(1)}, \rho_1^{(1)}(b_2, \bar{b}_1)$ , полупрямая  $[\bar{b}_1 l_2(\mu))$ .

$\Pi_{28}$ . Замкнутое множество (см. рис. 6.28); элементы границы:  $\rho_1^{(1)}, \rho_1^{(2)}$ , полупрямая  $[\bar{b}_1 l_2(\mu))$ . Кривая  $\rho_1^{(2)}$  проходит ниже  $H(-\mu)$ .

$\Pi_{29}$ . Замкнутый криволинейный сектор (см. рис. 6.29); стороны:  $\rho_1^{(1)}, \rho_1^{(2)}$ .

$\Pi_{30} = X \setminus \Pi_{28}$ .

Любое множество  $A_\beta^{(n)}$  можно расчлениить на описанные ячейки. Следует, однако, иметь в виду, что при этом для определенных ячеек некоторые точки, указанные в описании как различные, могут совпадать. Например, в ячейке  $\Pi_1$  могут совпадать точки  $b_i^{(n)}$  и  $\bar{b}_{i-1}^{(n)}$ , в ячейке  $\Pi_{27}$  — точки  $b_2^{(n)}$  и  $\bar{b}_1^{(n)}$ .

Разделим все элементарные ячейки на 4 типа. К первому типу отнесем ячейки  $\Pi_1$ — $\Pi_6$ ,  $\Pi_{18}$ — $\Pi_{29}$ , ко второму —  $\Pi_7$ — $\Pi_9$ , к третьему —  $\Pi_{10}$ ,  $\Pi_{11}$ , к четвертому —  $\Pi_{12}$ — $\Pi_{17}$ ,  $\Pi_{30}$ . Внутри каждого типа

ячейки разобьем на группы. В случае первого, второго и четвертого типов к одной группе отнесем ячейки с одинаковым наибольшим номером  $i$  кривой  $\rho_j^{(1)(n)}$ , не сводящаяся к точке дуга которой лежит на границе ячейки. Для третьего типа к одной группе отнесем ячейки с одинаковым наименьшим номером  $i$  дуги  $\rho_j^{(2)(n)}$ , не сводящаяся к точке дуга которой лежит на границе ячейки. Запись  $\Pi\left(\frac{k}{i}\right)$  будет означать ячейку  $k$ -го типа,  $k=1, 2, 3, 4$ ,  $i$ -й группы. Добавочный нижний индекс у буквы  $\Pi$  по-прежнему будет означать порядковый номер ячейки в начальной классификации.

В каждом множестве  $A_\beta^{(n)}$  обязательно есть ячейка  $\Pi\left(\frac{1}{1}\right)$ . Ячейки второго, третьего и четвертого типов могут входить, а могут и не входить в множество  $A_\beta^{(n)}$ . Во всяком множестве  $A_\beta^{(n)}$  может быть не более одной ячейки четвертого типа.

Определим дискретную схему  $\{u^{(n)}[x], \delta^{(n)}[x]\}$ .

Положим  $u^{(n)}[x] = (-1)^i \mu$  на пересечении  $(\rho_i^{(1)(n)} \setminus \{b_i^{(n)}\}) \cap \hat{A}_\beta^{(n)}$  и во внутренности ячеек  $\Pi\left(\frac{1}{i}\right)$ ,  $\Pi\left(\frac{2}{i}\right)$ ,  $\Pi\left(\frac{3}{i}\right)$ ,  $i \geq 1$ . Пусть  $u^{(n)}[x] = (-1)^{i+1} \mu$  на пересечении  $(\rho_i^{(2)(n)} \setminus \{q_i^{(n)}\}) \cup \hat{A}_\beta^{(n)}$  и во внутренности ячеек  $\Pi\left(\frac{4}{i}\right)$ ,  $i \geq 1$ . В любой из оставшихся точек мно-

жества  $\hat{A}_\beta^{(n)}$ , где  $u^{(n)}[x]$  еще не определено (все такие точки находятся в  $X \setminus Q$ ),  $u^{(n)}[x]$  выберем произвольно: либо  $\mu$ , либо  $-\mu$ . Вне  $\hat{A}_\beta^{(n)}$  пусть  $u^{(n)}[x] \equiv u_*$  — произвольный вектор из  $U$ .

Зададим второй элемент дискретной схемы — функцию  $\delta^{(n)}[x]$ . Обозначим

$$\Psi(\alpha) = \left\{ x : x \in (G_\beta^{(1)(n)} \cup g_\beta^{(2)(n)}) \cap \hat{A}_\beta^{(n)}, u^{(n)}[x] = \alpha \right\}, \alpha = \mu, -\mu.$$

При  $x \in \hat{A}_\beta^{(n)} \cap Q$  положим  $\delta^{(n)}[x] = \frac{1}{2} \delta(x, \Psi(-u^{(n)}[x]), u^{(n)}[x])$ .

Если  $x \in (\hat{A}_\beta^{(n)} \setminus \{m^{(n)}\}) \setminus Q$ , то пусть  $\delta^{(n)}[x] = \min \left\{ \frac{1}{2} \delta(x, \Psi(-u^{(n)}[x]) \times [x], u^{(n)}[x]), \frac{1}{2} \Omega(x, Q) \right\}$ . Вне  $\hat{A}_\beta^{(n)}$  примем  $\delta^{(n)}[x] \equiv \delta_*$ , где  $\delta_* > 0$  — произвольно.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что введенная дискретная схема допустима.

Пусть первый игрок применяет дискретную схему  $\{u^{(n)}[x], \delta^{(n)}[x]\}$  и  $x(t_*) \in \hat{A}_\beta^{(n)}$ , где  $t_*$  — произвольный момент времени. Доказательство леммы 6.1 вытекает из следующих утверждений.

1. Если  $x(t_*) \in \Pi\left(\frac{1}{i}\right)$ ,  $i > 1$  ( $i=1$ ,  $x(t_*) \neq m^{(n)}$ ), то в некоторый конечный момент  $t_1 \geq t_*$ , зависящий от реализации  $v(\cdot)$ ,  $x(t_1) \in$

$\in \Pi\left(\frac{1}{j}\right)$  ( $x(t_1) = m^{(n)}$ ),  $j < i$ , причем на отрезке  $[t_*, t_1]$   $x(t) \in \hat{A}_\beta^{(n)}$ .

2. Если  $x(t_*) \in \Pi\left(\frac{2}{i}\right)$ , то в некоторый конечный момент  $t_1 \geq t_*$ , зависящий от реализации  $v(\cdot)$ ,  $x(t_1)$  принадлежит либо  $\Pi\left(\frac{2}{i}\right)$ ,  $j < i$ , либо  $\Pi\left(\frac{1}{k}\right)$ , причем на отрезке  $[t_*, t_1]$   $x(t) \in \hat{A}_\beta^{(n)}$ .

3. Если  $x(t_*) \in \Pi\left(\frac{3}{i}\right)$ ,  $x(t_*) \neq m^{(n)}$ , то в некоторый конечный момент  $t_1 \geq t_*$ , зависящий от реализации  $v(\cdot)$ ,  $x(t_1)$  принадлежит либо  $\Pi\left(\frac{3}{j}\right)$ ,  $j < i$ , либо  $\Pi\left(\frac{1}{k}\right)$ , либо  $\Pi\left(\frac{4}{d}\right)$ , причем на отрезке  $[t_*, t_1]$   $x(t) \in \hat{A}_\beta^{(n)}$ .

4. Если  $x(t_*) \in \Pi\left(\frac{4}{i}\right)$ ,  $x(t_*) \neq m^{(n)}$ , то в некоторый конечный момент  $t_1 \geq t_*$ , зависящий от реализации  $v(\cdot)$ ,  $x(t_1)$  принадлежит либо  $\Pi\left(\frac{1}{j}\right)$ , либо  $\Pi\left(\frac{2}{k}\right)$ , причем на отрезке  $[t_*, t_1]$   $x(t) \in \hat{A}_\beta^{(n)}$ .

Утверждения 1—4 раскрывают схему движения фазовой точки по ячейкам (рис. 6.31). Основой их доказательства служат следующие свойства:

$$\{x: x \in \hat{A}_\beta^{(n)}, u^{(n)}[x] = \alpha\} \cap P(\alpha) = \emptyset, \alpha = \mu, -\mu, \quad (6.1)$$

$$\langle Ax + \alpha - v, \eta^{(i)(n)}(x, \alpha) \rangle > 0,$$

$$\alpha = \mu, -\mu, i = 1, 2, v \in V, x \in P^{(n)}(\alpha), \quad (6.2)$$

$$(Ax + u - v)_1 > 0, x \in X(\mu), u \in U, v \in V, \quad (6.3)$$

$$(Ax + u - v)_1 < 0, x \in X(-\mu), u \in U, v \in V. \quad (6.4)$$

Поясним доказательство утверждений 1—4 на ячейках  $\Pi_1\left(\frac{1}{i}\right)$ ,  $\Pi_{10}\left(\frac{3}{i}\right)$ ,  $\Pi_{13}\left(\frac{4}{i}\right)$ . Для других ячеек оно проводится аналогично. Необходимо учесть, что ячейки  $\Pi_{26} - \Pi_{30}$  возможны только при  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ .

Рассмотрим ячейку  $\Pi_1\left(\frac{1}{i}\right)$  (рис. 6.1). По стороне  $\bar{b}_i^{(n)} \hat{q}_{i+1}^{(n)}$  она стыкуется с одной из ячеек первого или четвертого типа (рис. 6.32, 6.33). Обозначим такую ячейку через  $\tilde{\Pi}$ . Кривая  $\hat{q}_i^{(n)} \bar{b}_i^{(n)} \hat{q}_{i+1}^{(n)}$  при  $i > 2$  является общей с ячейкой  $\Pi_1\left(\frac{1}{i-1}\right)$ , при  $i=2$  — с ячейкой  $\Pi_4\left(\frac{1}{i}\right)$ .

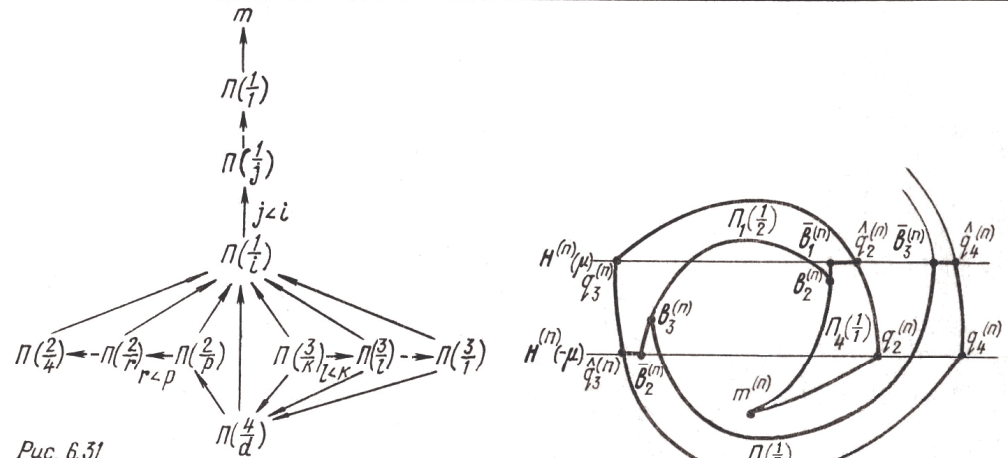


Рис. 6.31

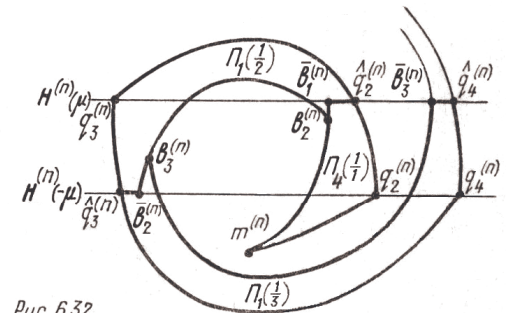


Рис. 6.32

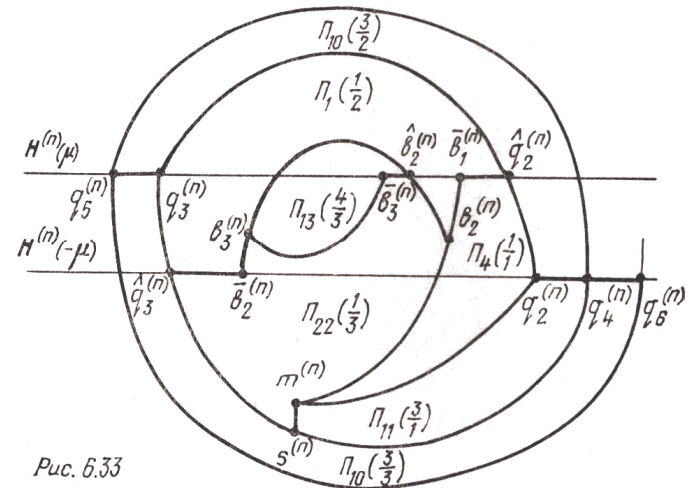


Рис. 6.33

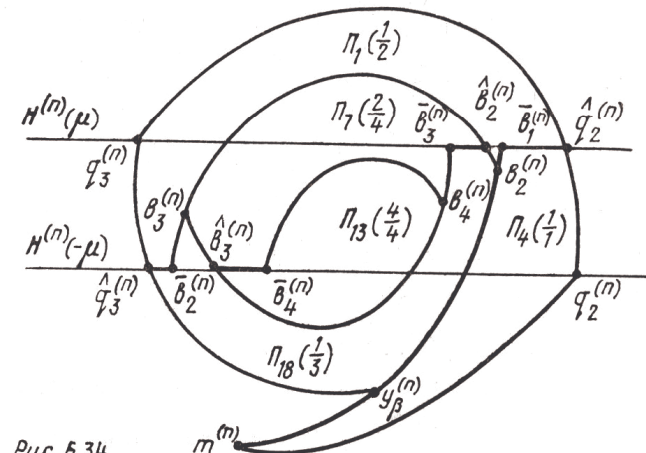


Рис. 6.34

Следующие выводы о поведении фазовой точки вытекают путем простых рассуждений из свойств (6.1)—(6.4) и определения дискретной схемы  $\{u^{(n)}[x], \delta^{(n)}[x]\}$ .

Пусть  $x(t_*) \in \Pi_1\left(\frac{1}{i}\right)$ . Тогда при любой реализации  $v(\cdot)$  наступит такой конечный момент  $t^* \geq t_*$ , что  $x(t^*) \in [\bar{b}_i^{(n)}, \hat{q}_{i+1}^{(n)}] \cup [\hat{q}_i^{(n)} \times \bar{b}_{i-1}^{(n)}, b_i^{(n)}]$ , причем на отрезке  $[t_*, t^*]$   $x(t) \in \Pi_1\left(\frac{1}{i}\right)$ .

Пусть  $x(t_*) \in [\bar{b}_i^{(n)}, \hat{q}_{i+1}^{(n)}]$ . Тогда при  $t \geq t_*$  фазовая точка может перейти из ячейки  $\Pi_1\left(\frac{1}{i}\right)$  в заштрихованную часть (см. рис. 6.1) ячейки  $\tilde{\Pi}$ . Однако, какова бы ни была реализация  $v(\cdot)$ , наступит такой конечный момент  $t^* \geq t_*$ , что  $x(t^*) \in [\bar{b}_i^{(n)}, \hat{q}_{i+1}^{(n)}]$  и при  $t \geq t^*$  движение будет идти в ячейке  $\Pi_1\left(\frac{1}{i}\right)$  до первого выхода на кривую  $[\hat{q}_i^{(n)} \bar{b}_{i-1}^{(n)}, b_i^{(n)}]$ . Момент первого выхода конечен. При любом  $t$  из отрезка  $[t_*, t^*]$   $x(t) \in \Pi_1\left(\frac{1}{i}\right) \cup (\tilde{\Pi} \setminus \{\tilde{y}_\beta^{(n)}\})$ .

Указанные выводы доказывают (с учетом определения множества  $\hat{A}_\beta^{(n)}$  и расположения ячейки  $\Pi_1\left(\frac{1}{i}\right)$  в  $\hat{A}_\beta^{(n)}$ ) утверждение 1 для ячейки  $\Pi_1\left(\frac{1}{i}\right)$ .

Рассмотрим ячейку  $\Pi_{10}\left(\frac{3}{i}\right)$  (рис. 6.10). Эта ячейка целиком лежит внутри множества  $A_\beta^{(n)}$  (рис. 6.33). Выход из ячейки невозможен через сторону  $q_{i+2}^{(n)} q_{i+3}^{(n)}$  и возможен через все остальные стороны. По стороне  $q_{i+3}^{(n)} q_{i+1}^{(n)}$  ячейка  $\Pi_{10}\left(\frac{3}{i}\right)$  стыкуется с ячейкой  $\Pi_{10}\left(\frac{3}{i+1}\right)$ , по стороне  $q_i^{(n)} q_{i+2}^{(n)}$  — с ячейкой  $\Pi_{10}\left(\frac{3}{i-1}\right)$ , если  $i > 2$ , и с ячейкой  $\Pi_{11}\left(\frac{3}{1}\right)$ , если  $i = 2$ . Сторона  $q_i^{(n)} q_{i+1}^{(n)}$  примыкает при  $i > 3$  к ячейке  $\Pi_{10}\left(\frac{3}{i-2}\right)$ , при  $i = 2$  — к ячейкам первого типа, при  $i = 3$  — к ячейке  $\Pi_{11}\left(\frac{3}{1}\right)$  и к одной из ячеек первого или четвертого типа. Поскольку фазовая точка за конечное время выходит из ячейки  $\Pi_{10}\left(\frac{3}{i}\right)$ , то доказательство утверждения 3 для этой ячейки вытекает из следующего заключения.

Пусть  $x(t_*) \in [q_{i+3}^{(n)}, q_{i+1}^{(n)}]$ . Тогда при  $t \geq t_*$  фазовая точка может перейти из ячейки  $\Pi_{10}\left(\frac{3}{i}\right)$  в заштрихованную часть (см.

рис. 6.10) ячейки  $\Pi_{10}\left(\frac{3}{i+1}\right)$ . Какова бы ни была реализация  $v(\cdot)$ , могут быть лишь две возможности: 1) в некоторый конечный момент  $t_1 > t_*$  фазовая точка попадает на дугу  $(\hat{q}_{i+1}^{(n)}, q_{i+1}^{(n)})$ , принадлежащую либо ячейке  $\Pi_{10}\left(\frac{3}{i-1}\right)$ , либо одной из ячеек первого или четвертого типа, причем на отрезке  $[t_*, t_1]$   $x(t) \in \Pi_{10}\left(\frac{3}{i}\right) \cup \Pi_{10}\left(\frac{3}{i+1}\right)$ ; 2) наступает такой конечный момент  $t_2 \geq t_*$ , что  $x(t_2) \in [q_{i+3}^{(n)}, q_{i+1}^{(n)}]$  и при  $t \geq t_2$  движение идет в  $\Pi_{10}\left(\frac{3}{i}\right)$  до выхода на кривую  $[q_{i+1}^{(n)} q_i^{(n)} q_{i+2}^{(n)}]$ ; на отрезке  $[t_*, t_2]$   $x(t) \in \Pi_{10}\left(\frac{3}{i}\right) \cup \Pi_{10} \times \left(\frac{3}{i+1}\right)$ .

Ячейка  $\Pi_{13}\left(\frac{4}{i}\right)$  (рис. 6.13) также целиком лежит внутри множества  $A_\beta^{(n)}$  (рис. 6.33, 6.34). Кривая  $b_i^{(n)} \bar{b}_i^{(n)} \hat{b}_{i-1}^{(n)}$  является общей с одной из ячеек первого или второго типа. То же самое справедливо и для кривой  $b_i^{(n)} \hat{b}_{i-1}^{(n)}$ . Таким образом, доказательство утверждения 4 для ячейки  $\Pi_{13}\left(\frac{4}{i}\right)$  сводится к доказательству того, что при любом  $x(t_*) \in \Pi_{13}\left(\frac{4}{i}\right)$  фазовая точка за конечное время выходит на границу этой ячейки.

Доказательство леммы 6.1 закончено.

Определим дискретную схему  $\{u^*[x], \delta^*[x]\}$ .

Пусть  $C^{(n)} = \bigcup_{n > k \geq \bar{n}} \hat{A}_\beta^{(k)}$ . При каждом  $n \geq \bar{n}$  положим  $u^*[x] = u^{(n)}[x]$ ,  $\delta^*[x] = \delta^{(n)}[x]$  для любого  $x \in \hat{A}_\beta^{(n)} \setminus (C^{(n)} \cup \{m^{(n)}\} \cup \overset{\circ}{\omega})$ . Таким образом, дискретная схема будет задана на  $\hat{A}_\beta \setminus \overset{\circ}{\omega}$ . При  $x \in \overset{\circ}{\omega}$  положим  $u^*[x] = -\mu$ ,  $\delta^*[x] = \Omega(x, \text{Fr } \omega)$ .

Зададим дискретную схему на  $\tilde{A}_\beta \setminus (\overset{\circ}{A}_\beta \cup \{m\})$ . В силу (4.3), (5.1)

$$\tilde{A}_\beta \setminus \overset{\circ}{A}_\beta = \{ [((g_\beta^{(1)} \setminus g_\beta^{(1)}(a_\beta)) \cup \{a_\beta\}) \cap \text{Fr } A_\beta] \cup [(g_\beta^{(2)} \setminus g_\beta^{(2)} \times (q_\beta)) \cup \text{Fr } A_\beta] \} \setminus \{\tilde{y}_\beta\}.$$

Член в первой (во второй) квадратной скобке есть непрерывная дуга кривой  $g_\beta^{(1)}(g_\beta^{(2)})$ , начинающаяся с  $m$ . Обозначим ее  $\tilde{g}_\beta^{(1)}$  ( $\tilde{g}_\beta^{(2)}$ ). Примем  $u^*[x] = (-1)^t \mu$  ( $u^*[x] = (-1)^{t+1} \mu$ ), если  $x \in (\rho_i^{(1)} \setminus$

$\setminus \{b_i\} \cap (\tilde{g}_\beta^{(1)} \setminus \{\tilde{y}_\beta\}) (x \in (\rho_i^{(2)} \setminus \{q_i\}) \cap (\tilde{g}_\beta^{(2)} \setminus \{y_\beta\}))$ ,  $i \geq 1$ . При  $x \in \tilde{A}_\beta \setminus (\overset{0}{A}_\beta \cup \{m\})$  положим  $\delta^*[x] = \frac{1}{2} \delta(x, D(-u^*[x]), u^*[x])$ .  
Здесь

$$D(\alpha) = \{x: x \in \tilde{A}_\beta \setminus (\overset{0}{A}_\beta \cup \{m\}), u^*[x] = \alpha\}, \alpha = \mu, -\mu.$$

Вне множества  $\tilde{A}_\beta$  пусть  $u^*[x] \equiv u^*$ ,  $\delta^*[x] \equiv \delta^*$ , где  $u^*$  — любой вектор из  $U$ , а  $\delta^* > 0$  — произвольное число.

Непосредственной проверкой можно убедиться в допустимости введенной дискретной схемы.

Предположим, что первый игрок применяет дискретную схему  $\{u^*[x], \delta^*[x]\}$ .

Пусть  $x_0 = x(t_0) \in \overset{0}{A}_\beta$ . Тогда найдется такое  $n_0 \geq \bar{n}$ , что  $x_0 \in \hat{A}_\beta^{(n_0)}$ . Какова бы ни была реализация  $v(\cdot)$ , движение при  $t \geq t_0$  будет идти в множестве  $\bigcup_{n_0 \geq k \geq \bar{n}} \hat{A}_\beta^{(k)}$  до первого момента  $t^*$  попадания в криволинейный треугольник  $\omega$ . При  $t \geq t^*$  движение будет идти в  $\omega$  и за конечное время окажется в точке  $m$ .

Пусть  $x_0 = x(t_0) \in \tilde{A}_\beta \setminus (\overset{0}{A}_\beta \cup \{m\})$ . Тогда либо в какой-то момент  $\delta$ -переключения  $t_*$  система (1.1) окажется в  $\overset{0}{A}_\beta$  и при  $t \geq t_*$  ее движение пойдет так, как описано выше, либо при  $t \geq t_0$  система (1.1) будет идти по одной из кривых  $\tilde{g}_\beta^{(1)}, \tilde{g}_\beta^{(2)}$  и за конечное время попадет в точку  $m$ . В первом случае на отрезке  $[t_0, t_*]$   $x(t) \in \tilde{A}_\beta$ .

Таким образом, время  $T[x_0; \{u^*[x], \delta^*[x]\}] < \infty$  для любого  $x_0 \in \tilde{A}_\beta$ . Доказательство закончено.

## 7. Доказательство леммы 5.2

Пусть  $s(\alpha)$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ , — простая гладкая дуга, лежащая целиком, за исключением разве одной из крайних точек, в множестве  $X \setminus (A_\xi \cup P(\alpha))$ . Дугой  $s^{(i)}(\alpha)$ ,  $i=1, 2$ , без контакта относительно  $f^{(i)}(x, \alpha)$  назовем такую дугу  $s(\alpha)$ , для любой внутренней точки  $x$  которой скалярное произведение  $\langle \eta(x), f^{(i)}(x, \alpha) \rangle \neq 0$ ; здесь  $\eta(x)$  — вектор нормали к дуге в точке  $x$ . Если дуга  $s^{(i)}(\alpha)$  является отрезком, будем писать «отрезок без контакта». Когда значение  $\alpha$  не вызывает сомнения, вместо  $s^{(i)}(\alpha)$  условимся писать просто  $s^{(i)}$ . Пусть  $s^{(i)(-)}(\alpha) = s^{(i)}(\alpha) \setminus (A_\xi \cup P(\alpha))$ .

I. Предположим, что никакая из кривых  $g_\xi^{(1)}, g_\xi^{(2)}$  не является замкнутой и не имеет предельного цикла.

Построим необходимые для дальнейшего дуги без контакта и введем вектор  $\sigma$ . Пусть  $i > 1$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ ,  $k=1, 2$ .

1. Пусть  $a_i \in J(\alpha) \cap Fr A_\xi$ ,  $a_i \neq y_\xi$ . Обозначим через  $x_{i,2}^{(1)}$  произвольную точку дуги  $(a_i, \kappa^{(1)}) \subset g_\xi^{(1)}(a_i)$  при  $\tilde{v}_\xi^{(1)}(a_i) = v(a_i, \alpha)$  (рис. 7.1, а) и точку  $a_i$  в противном случае (рис. 7.1, б)\*. На рис. 7.1, а, 7.1, б через  $s_*$  обозначен отрезок  $s_{i,1}^{(1)}(-\mu)$ , через  $s^*$  — отрезок  $s_{i,2}^{(1)}(\mu)$ . Проведем из точки  $x_{i,2}^{(1)}$  отрезок  $s_{i,2}^{(1)}(\alpha)$ , а из точки  $x_{i,1}^{(1)} = a_i$  — отрезок  $s_{i,1}^{(1)}(-\alpha)$ . Условимся, что при  $\alpha = \mu$  ( $\alpha = -\mu$ )  $s_{i,1}^{(1)(-)} < H(a_i)$  ( $s_{i,1}^{(1)(-)} > H(a_i)$ ) и, если  $x_{i,2}^{(1)} = a_i$ , то отрезок  $s_{i,2}^{(1)(-)}$  лежит выше (ниже) отрезка  $s_{i,1}^{(1)(-)}$ . Положим  $\sigma_i^{(1)} = v(a_i, \alpha)$ .

2. Пусть  $c_i \in F(\alpha) \cap Fr A_\xi$ ,  $c_i \neq y_\xi$ . Обозначим через  $x_{i,1}^{(2)}$  произвольную точку дуги  $(\kappa^{(2)}c_i) \subset g_\xi^{(2)}(m, c_i)$  при  $c_i \in J(-\alpha)$ ,  $v_\xi^{(2)}(c_i) = v(c_i, -\alpha)$  и точку  $c_i$  в противном случае. Проведем из точки  $x_{i,2}^{(2)}$  отрезок  $s_{i,1}^{(2)}(-\alpha)$ , а из точки  $x_{i,1}^{(2)} = c_i$  отрезок  $s_{i,1}^{(2)}(-\alpha)$ . Условимся, что при  $\alpha = (-1)^k \mu$   $s_{i,2}^{(2)(-)} < {}^{(k)}H(c_i)$  и, если  $x_{i,1}^{(2)} = c_i$ , то  $s_{i,1}^{(2)(-)} > {}^{(k)}H(c_i)$ . Кроме того, если  $x_{i,1}^{(2)} = c_i \in J(-\alpha)$  (рис. 7.2; на нем через  $s^*$  обозначен отрезок  $s_{i,1}^{(2)}(\mu)$ , через  $s_*$  — отрезок  $s_{i,2}^{(2)}(-\mu)$ ), то будем считать, что  $s_{i,1}^{(2)(-)}$  лежит по ту же сторону от прямой  $\pi(x[v_\xi^{(2)}(c_i), -\alpha], c_i)$ , что и дуга  $(\kappa^{(2)}c_i)$ . Положим  $\sigma_i^{(2)} = v(c_i, -\alpha)$ .

Допустим, что  $R_\xi \neq \emptyset$ . Примем

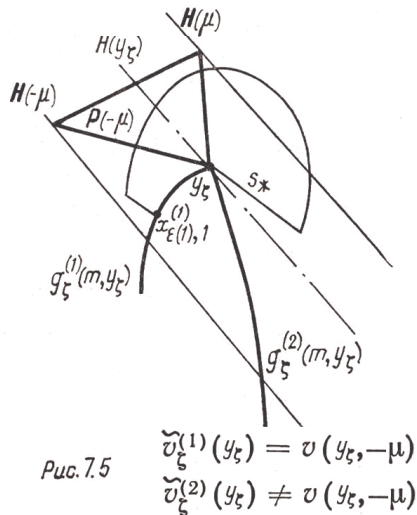
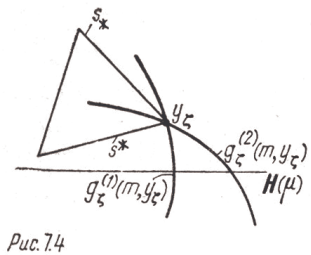
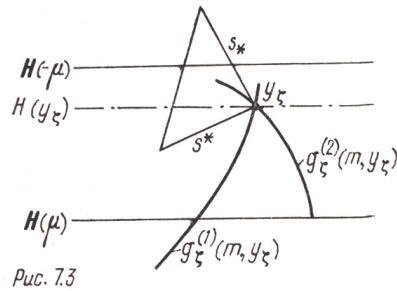
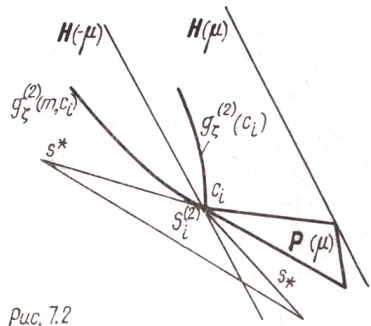
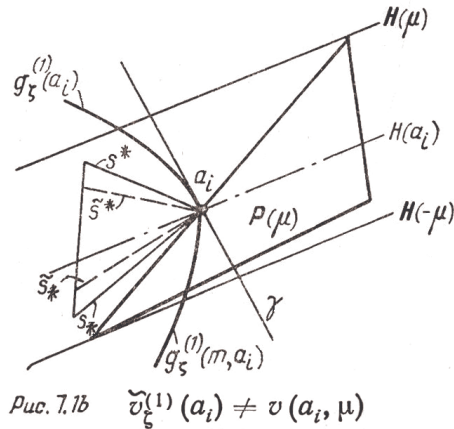
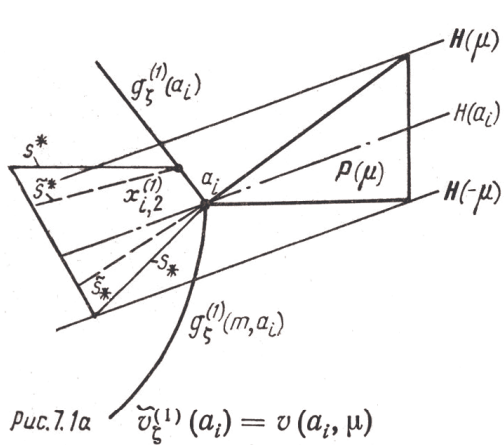
$$\varepsilon(1) = \max \{i: a_i \in g_\xi^{(1)}(m, y_\xi) \setminus \{y_\xi\}\} + 1,$$

$$\varepsilon(2) = \max \{i: c_i \in g_\xi^{(2)}(m, y_\xi) \setminus \{y_\xi\}\} + 1.$$

Обозначим через  $x_{\varepsilon(j),1}^{(j)}$ ,  $j=1, 2$ , произвольную точку дуги  $(\kappa^{(j)}y_\xi) \subset g_\xi^{(j)}(m, y_\xi)$  при  $y_\xi \in J(u_\xi^{(j)}(y_\xi))$ ,  $v_\xi^{(j)}(y_\xi) = v(y_\xi, u^{(j)}(y_\xi))$  и точку  $y_\xi$  в противном случае.

3. Пусть  $g_\xi^{(1)} = r_\xi^{(1)}$ ,  $R_\xi \neq \emptyset$ . Проведем из точки  $x_{\varepsilon(1),1}^{(1)}$  отрезок  $s_{\varepsilon(1),1}^{(1)}(u^{(1)}(y_\xi))$ , а из точки  $x_{\varepsilon(2),1}^{(2)}$  отрезок  $s_{\varepsilon(2),1}^{(2)}(u^{(2)}(y_\xi))$ . Если  $y_\xi \in J(u_\xi^{(j)}(y_\xi))$  и  $x_{\varepsilon(j),1}^{(j)} = y_\xi$ , где  $j=1, 2$ , то будем считать, что  $s_{\varepsilon(j),1}^{(j)(-)}$  лежит по ту же сторону от прямой  $\pi(x[v_\xi^{(j)}(y_\xi), u_\xi^{(j)} \times (y_\xi)], y_\xi)$ , что и дуга  $(\kappa^{(j)}y_\xi)$ . Пусть  $\beta$  — достаточно малая гладкая дуга, содержащая внутри себя дугу  $(\kappa^{(j)}y_\xi)$ . Предположим, что отрицательная сторона дуги  $\beta$  естественным образом определяется отрицательной стороной дуги  $(\kappa^{(j)}y_\xi)$ . Если  $y_\xi \in J(u_\xi^{(j)}(y_\xi))$ , то условимся, что  $s_{\varepsilon(j),1}^{(j)}$  примыкает в точке  $y_\xi$  к дуге  $\beta$  с отрицательной стороны под ненулевым углом (рис. 7.3, 7.4; на этих рисунках через  $s_*$  обозначен отрезок  $s_{\varepsilon(2),1}^{(2)}(-\mu)$ , через  $s^*$  на рис. 7.3 обозначен отрезок  $s_{\varepsilon(1),1}^{(1)}(-\mu)$ , а на рис. 7.4 — отрезок  $s_{\varepsilon(1),1}^{(1)}(\mu)$ ). Конкретизируем расположение отрезков  $s_{\varepsilon(1),1}^{(1)}, s_{\varepsilon(2),1}^{(2)}$ .

\* Здесь и далее  $\kappa^{(1)}, \kappa^{(2)}$  — точки, описанные при определении векторов  $\tilde{v}_\xi^{(j)}(y), v_\xi^{(j)}(y)$ ,  $j=1, 2$  (см. стр. 181).



3.1.  $y_z \in J(\alpha)$ ,  $u_z^{(1)}(y_z) = u_z^{(2)}(y_z) = \alpha$ . Условимся, что если  $x_{\varepsilon}^{(j)}(j, 1) = y_z$ , то при  $\alpha = (-1)^k \mu$   $s_{\varepsilon}^{(j)}(j, 1) >^{(k,i)} H(y_z)$ ,  $j = 1, 2$  (на рис. 7.5  $x_{\varepsilon}^{(1)}(1, 1) \neq y_z$ ,  $x_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1) = y_z$ , символом  $s_*$  обозначен отрезок  $s_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1)(-\mu)$ ).

3.2.  $y_z \in J(\alpha)$ ,  $u_z^{(1)}(y_z) = u_z^{(2)}(y_z) = \alpha$ . Тогда из определения множества  $G^{(1)}$  и кривой  $g^{(2)}$  следует, что  $y_z \in (J \cup Q(-\alpha)) \setminus (H \times \times (\alpha) \cup J(\alpha))$ . Условимся, что при  $\alpha = (-1)^k \mu$   $s_{\varepsilon}^{(j)}(j, 1) >^{(k)} \pi_2(y_z)$ ,  $j = 1, 2$ , и  $s_{\varepsilon}^{(1)}(1, 1) >^{(k)} H(y_z)$  (рис. 7.3).

3.3.  $y_z \in Q \setminus J(\alpha)$ ,  $u_z^{(1)}(y_z) \neq u_z^{(2)}(y_z)$ ,  $u_z^{(1)}(y_z) = \alpha$ . Тогда  $y_z$  принадлежит полупрямой  $(h_2(\alpha) l_1(\alpha)) \subset H(\alpha)$ . Условимся, что при  $\alpha = (-1)^k \mu$   $s_{\varepsilon}^{(1)}(1, 1) <^{(k)} \pi_2(y_z)$  и, если  $x_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1) = y_z$ , то  $s_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1) >^{(k)} H(y_z)$ .

3.4.  $y_z \in J(u_z^{(1)}(y_z))$ ,  $u_z^{(1)}(y_z) \neq u_z^{(2)}(y_z)$ . Тогда  $u_z^{(1)}(y_z) = -\mu$ ,  $y_z = h_2(-\mu)$ ,  $v_z^{(1)}(y_z) = v(y_z, -\mu)$ . Примем  $s_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1) < H(y_z)$ .

3.5.  $y_z \in X \setminus Q$ ,  $u_z^{(1)}(y_z) \neq u_z^{(2)}(y_z)$ . Тогда  $y_z \in X(u_z^{(1)}(y_z))$  и  $f^{(2)}(y_z) > f^{(1)}(y_z)$ . Условимся, что при  $u_z^{(1)}(y_z) = (-1)^k \mu$   $s_{\varepsilon}^{(j)}(j, 1) <^{(k)} \pi_2(y_z)$ ,  $j = 1, 2$ . Кроме того, будем считать, что отрезки  $s_{\varepsilon}^{(1)}(1, 1)$ ,  $s_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1)$  лежат по разные стороны относительно достаточно малой дуги на кривой  $g^{(2)}$ , содержащей  $y_z$  (рис. 7.4).

В случаях 3.1, 3.2, 3.4 положим  $\sigma_{\varepsilon}^{(1)} = v(y_z, u_z^{(1)}(y_z))$ . В случае 3.3 пусть  $\sigma_{\varepsilon}^{(1)} = v(y_z, u_z^{(2)}(y_z))$ , а в случае 3.5  $\sigma_{\varepsilon}^{(1)} = \tilde{v}^{(1)}(y_z)$ . Во всех случаях примем  $\sigma_{\varepsilon}^{(2)} = \sigma_{\varepsilon}^{(1)}$ .

4. Пусть  $g_z^{(1)} \neq r_z^{(1)}$ ,  $u_z^{(2)}(y_z) = \alpha$ . Проведем из точки  $x_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1)$  дугу  $s_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1)(\alpha)$ , а из точки  $x_{\varepsilon}^{(1)}(1, 1) = y_z$  дугу  $s_{\varepsilon}^{(1)}(1, 1)(-\alpha)$ . Условимся, что при  $\alpha = \mu$  ( $\alpha = -\mu$ )  $s_{\varepsilon}^{(1)}(1, 1) < H(y_z)$  ( $s_{\varepsilon}^{(1)}(1, 1) > H(y_z)$ ) и если  $x_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1) = y_z$  (рис. 7.6; через  $s_*$  на нем обозначена дуга  $s_{\varepsilon}^{(1)}(1, 1)(-\mu)$ , через  $s_*$  — дуга  $s_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1)(\mu)$ ), то дуга  $s_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1)$  лежит выше (ниже) дуги  $s_{\varepsilon}^{(1)}(1, 1)$ . Кроме того, если  $x_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1) = y_z \in J(\alpha)$ , то будем считать, что  $s_{\varepsilon}^{(2)}(2, 1)$  лежит по ту же сторону от прямой  $\pi(x[v_z^{(2)}(y_z), \alpha], y_z)$ , что и дуга  $(\kappa^{(2)}y_z)$ . Если  $y_z \in Q$ , положим  $\sigma_{\varepsilon}^{(1)} = \sigma_{\varepsilon}^{(2)} = v(y_z, \alpha)$ . Если  $y_z \in X \setminus Q$ , то пусть  $\sigma_{\varepsilon}^{(1)} = \sigma_{\varepsilon}^{(2)} = v_*$ , где  $v_*$  — произвольный вектор из  $V$ .

5. Допустим, что  $R_{\nu} \neq \emptyset$ . Примем

$$l(1) = \max \{i: a_i \in g_z^{(1)}(m, y_{\nu}) \setminus \{y_{\nu}\}\} + 1,$$

$$l(2) = \max \{i: c_i \in g_z^{(2)}(m, y_{\nu}) \setminus \{y_{\nu}\}\} + 1.$$

Пусть  $u^{(2)}(y_{\nu}) = \alpha$ . Проведем из точки  $x_{i(1)}^{(1)} = x_{i(2)}^{(2)} = y_{\nu}$  дуги  $s_{i(1)}^{(1)}(1, 1)(-\alpha)$ ,  $s_{i(2)}^{(2)}(2, 1)(\alpha)$ . Условимся, что при  $\alpha = \mu$  ( $\alpha = -\mu$ ) дуга  $s_{i(1)}^{(1)}(1, 1)$  лежит ниже (выше) дуги  $s_{i(2)}^{(2)}(2, 1)$ . Положим  $\sigma_{i(1)}^{(1)} = \sigma_{i(2)}^{(1)} =$

$=v(y_\nu, \alpha)$ , если  $y_\nu \in Q$ , и пусть  $\sigma_{l(1)}^{(1)} = \sigma_{l(2)}^{(2)} = v_*$ , где  $v_*$  — произвольный вектор из  $V$ , если  $y_\nu \in X \setminus Q$ .

6. Предположим, что при некотором  $r > 0$  полукруг  $O^* = O \times \times (m, r) \cup \{x: x_1 < 0\}$  не пересекается с  $A_\xi$  (рис. 7.7). Пусть  $x_{1,2}^{(1)} = x_{1,2}^{(2)} = m$  и

$$s_{1,2}^{(1)}(-\mu) = O^* \cap \{x: x_1 = 0, x_2 \geq 0\},$$

$$s_{1,2}^{(2)}(\mu) = O^* \cap \{x: x_1 = 0, x_2 \leq 0\}.$$

На рис. 7.7 отрезок  $s_{1,2}^{(1)}(-\mu)$  обозначен через  $s_*$ , отрезок  $s_{1,2}^{(2)}(\mu)$  — через  $s^*$ .

Положим  $\sigma_1^{(1)} = \sigma_1^{(2)} = v_*$ , где  $v_*$  — произвольный вектор из  $V$ .

Все описанные выше дуги без контакта строились парами. Соединим конечные точки дуг, входящих в пару, простой кривой  $\chi$ , лежащей в  $X \setminus A_\xi$  (если это возможно, то просто отрезком) (см. рис. 7.1—7.7). В случае 1, соответственно 2, 5, обозначим через  $S_i^{(1)}$ , соответственно  $S_i^{(2)}$ ,  $S_{l(1)}^{(1)} = S_{l(2)}^{(2)}$ , замкнутое множество в  $X \setminus A_\xi$ , ограниченное кривой, составленной из дуг без контакта, входящих в пару, кривой  $\chi$  и кривой на границе множества  $A_\xi$ , соединяющей начальные точки дуг без контакта. В случаях 3.1—3.5, 4, соответственно в случае 6, аналогичное множество обозначим  $S_{\xi(1)}^{(1)} = S_{\xi(2)}^{(2)}$ , соответственно  $S_1^{(1)} = S_2^{(2)}$ .

Положим  $u_{n,1}^{(j)} = u_{\xi}^{(j)}(x_{n,1}^{(j)})$ ,  $u_{n,2}^{(j)} = \tilde{u}_{\xi}^{(j)}(x_{n,2}^{(j)})$ ,  $j=1, 2, n \geq 1$ . По определению дуга  $s_{n,k}^{(j)}$ ,  $k=1, 2$ , есть дуга без контакта относительно  $f^{(j)}(x, u_{n,k}^{(j)})$ . Обозначим через  $\tilde{s}_{n,k}^{(j)}$  дугу без контакта относительно  $f^{(j)}(x, u_{n,k}^{(j)})$ , проведенную в  $S_n^{(j)}$  из точки  $x_{n,k}^{(j)}$  достаточно близко от дуги  $s_{n,k}^{(j)}$  и не имеющую с последней других общих точек, кроме  $x_{n,k}^{(j)}$  (рис. 7.1, а, б; символом  $\tilde{s}_*$  на них обозначен отрезок  $\tilde{s}_{i,1}^{(1)}(-\mu)$ , символом  $\tilde{s}^*$  — отрезок  $\tilde{s}_{i,2}^{(1)}(\mu)$ ).

Если пересечение  $\hat{g}_{\xi}^{(j)} = g_{\xi}^{(j)} \cap \text{Fr} A_\xi$ ,  $j=1, 2$ , состоит из более чем одной точки, то  $\hat{g}_{\xi}^{(j)}$  — непрерывная кривая с началом  $m$ , и если она бесконечна, то  $\hat{g}_{\xi}^{(j)} = g_{\xi}^{(j)}$ . Допустим, что  $\hat{g}_{\xi}^{(j)}$  бесконечна, а  $n^{(j)} = \sup \{n: x_{n,2}^{(j)} \in g_{\xi}^{(j)}\} < \infty$ . Выберем на  $g_{\xi}^{(j)}(x_{n^{(j)},2}^{(j)}) \setminus \{x_{n^{(j)},2}^{(j)}\}$  расходящуюся последовательность точек  $\{z_n^{(j)}\}$ ,  $n = n^{(j)} + 1, n^{(j)} + 2, \dots$ , так, что при любом  $n$   $g_{\xi}^{(j)}(z_{n+1}^{(j)}) \subset g_{\xi}^{(j)}(z_n^{(j)})$ . Из каждой точки  $z_n$  проведем 3 отрезка без контакта:  $s_n^{(j)(1)}(\alpha)$ ,  $s_n^{(j)(2)}(\alpha)$ ,  $s_n^{(j)(3)}(\alpha)$ , где  $\alpha = u_{\xi}^{(j)}(z_n^{(j)})$  (если идти от  $m$  вблизи отрицательной стороны кривой  $g_{\xi}^{(j)}$ , то первым встречается отрезок  $s_n^{(j)(1)}(\alpha)$  (рис. 7.8)). Положим  $x_{n,1}^{(j)} = x_{n,2}^{(j)} = z_n^{(j)}$ ,  $s_{n,1}^{(j)} = s_{n,2}^{(j)} = s_n^{(j)(2)}$ ,  $\tilde{s}_{n,1}^{(j)} = s_n^{(j)(3)}$ ,  $\tilde{s}_{n,2}^{(j)} = s_n^{(j)(1)}$ ,  $u_{n,1}^{(j)} = u_{n,2}^{(j)} = \alpha$ .

Пусть  $\tilde{y}_{n,2}^{(j)}$ ,  $j=1, 2, n \geq 1$ , — точка дуги  $\tilde{s}_{n,2}^{(j)(-)}$ , достаточно близкая к  $x_{n,2}^{(j)}$ . Обозначим через  $\tilde{y}_{n+1,1}^{(j)}$  точку первого выхода кривой  $p^{(j)}(\tilde{y}_{n,2}^{(j)}, u_{n,2}^{(j)})$  на дугу  $\tilde{s}_{n+1,1}^{(j)}$ , а через  $p^{(j)}(\tilde{y}_{n,2}^{(j)}, \tilde{y}_{n+1,1}^{(j)}, u_{n,2}^{(j)})$  дугу последней кривой от  $\tilde{y}_{n,2}^{(j)}$  до  $\tilde{y}_{n+1,1}^{(j)}$ . Точки пересечения  $p^{(j)}(\tilde{y}_{n,2}^{(j)}, y_{n+1,1}^{(j)}, u_{n,2}^{(j)})$  с  $s_{n,2}^{(j)}$  и  $s_{n+1,1}^{(j)}$  обозначим соответственно через  $y_{n,2}^{(j)}$  и  $y_{n+1,1}^{(j)}$ . Пусть  $I_n^{(j)}(\tilde{I}_n^{(j)})$  — замкнутый криволинейный четырехугольник, сторонами которого являются дуги  $[y_{n,2}^{(j)}, x_{n,2}^{(j)}] \subset s_{n,2}^{(j)}$  ( $[\tilde{y}_{n,2}^{(j)}, x_{n,2}^{(j)}] \subset \tilde{s}_{n,2}^{(j)}$ ),  $[y_{n+1,1}^{(j)}, x_{n+1,1}^{(j)}] \subset s_{n+1,1}^{(j)}$  ( $[\tilde{y}_{n+1,1}^{(j)}, x_{n+1,1}^{(j)}] \subset \tilde{s}_{n+1,1}^{(j)}$ ),  $p^{(j)}(y_{n,2}^{(j)}, y_{n+1,1}^{(j)}, u_{n,2}^{(j)})$  ( $p^{(j)}(\tilde{y}_{n,2}^{(j)}, \tilde{y}_{n+1,1}^{(j)}, u_{n,2}^{(j)})$ ),  $g_{\xi}^{(j)}(x_{n,2}^{(j)}, x_{n+1,1}^{(j)})$  (рис. 7.9).

Перейдем к определению дискретной схемы  $\{v^*[x], \Delta^*[x]\}$ .

Вначале введем ее на множестве  $R_n^{(j)} = \tilde{I}_n^{(j)} \cup (y_{n,2}^{(j)}, x_{n,2}^{(j)}) \cup (y_{n+1,1}^{(j)}, x_{n+1,1}^{(j)})$ ,  $j=1, 2, n \geq 1$ .

Пусть  $x$  — произвольная точка из  $\tilde{R}_n^{(j)} = \tilde{I}_n^{(j)} \cup (\tilde{y}_{n,2}^{(j)}, x_{n,2}^{(j)}) \cup \cup (\tilde{y}_{n+1,1}^{(j)}, x_{n+1,1}^{(j)})$ . Подберем точку  $\tilde{y}$  на дуге  $(\tilde{y}_{n,2}^{(j)}, x_{n,2}^{(j)})$  так, чтобы кривая  $p^{(j)}(\tilde{y}, u_{n,2}^{(j)})$  проходила через  $x$  до первого выхода на дугу  $(\tilde{y}_{n+1,1}^{(j)}, x_{n+1,1}^{(j)})$ . Точку первого выхода на дугу  $(\tilde{y}_{n+1,1}^{(j)}, x_{n+1,1}^{(j)})$  обозначим  $\tilde{z}$ . Пусть вектор  $f^{(j)}(x, \alpha)$ , где  $\alpha$  равно либо  $\mu$ , либо  $-\mu$ , касается кривой  $p^{(j)}(\tilde{y}, \tilde{z}, u_{n,2}^{(j)})$  в точке  $x$  (если  $f^{(j)}(x, \mu) = f^{(j)}(x, -\mu)$ , то за  $\alpha$  примем любой из векторов  $\mu, -\mu$ ). Примем  $v_n^{(j)}(x) = v^{(j)}(x, \alpha)$ .

Расстояние между точкой  $x \in \tilde{R}_n^{(j)}$  и множеством  $P(x) = \{y: y \in \in \tilde{R}_n^{(j)}, Ay + U - v_n^{(j)}(x) \ni 0\}$  больше некоторого положительного числа, не зависящего от  $x$ . Положим

$$\Delta_1 = \inf_{x \in \tilde{R}_n^{(j)}} \Delta(x, P(x), v_n^{(j)}(x)).$$

Пусть  $\vartheta(x)$ ,  $x \in \tilde{R}_n^{(j)}$  — раствор вектограммы  $\omega(x) = \bigcup_{u \in U} Ax + u - v_n^{(j)}(x)$ . Функция  $\vartheta(x)$  непрерывна в  $\tilde{R}_n^{(j)}$  и ограничена сверху равномерно по  $x$  некоторым числом  $\vartheta < \pi$ . Положим  $\Theta = \pi - \vartheta$ . Под  $\varphi(x, \beta)$  будем понимать вектограмму из единичных векторов с раствором  $\vartheta(x) + \beta$ ,  $\beta < \Theta$ , содержащую в себе вектограмму  $\omega(x)$  и симметричную относительно последней.

Пусть  $y$  — произвольная точка из  $R_n^{(j)}$ . Символом  $\beta(y)$  обозначим точную верхнюю грань чисел  $\beta < \Theta$ , удовлетворяющих условию: множество  $K(y, \beta)$ , заметаемое траекториями системы

$$\frac{dx}{dt} \in \Phi(x, \beta), \quad x(0) = y, \quad t \geq 0,$$

где каждая траектория обрывается при первом попадании на границу множества  $\tilde{R}_n^{(j)}$ , не пересекается с кривой  $g_\xi^{(j)}(x_{n,2}^{(j)}, x_{n+1,1}^{(j)})$ . Фиксируем произвольную реализацию  $u(\cdot)$  и рассмотрим на отрезке  $[0, \Delta_1]$  движение  $x = x(t)$  системы (1.1) из некоторой точки  $z = x(0) \in K\left(y, \frac{\beta(y)}{2}\right)$  при реализации  $u(\cdot)$  и  $v \equiv v_n^{(j)}(z)$ . Под  $\gamma(y, z, u(\cdot))$  условимся понимать число  $\Delta_1$ , если при любом  $t \in [0, \Delta_1]$  вектор  $\frac{Ax(t) + u(t) - v_n^{(j)}(z)}{|Ax(t) + u(t) - v_n^{(j)}(z)|}$  остается строго внутри вектограммы  $\Phi\left(x(t), \frac{\beta(z)}{2}\right)$ , и первый момент совмещения его с краем вектограммы в противном случае. Пусть  $\Delta_2(y) = \inf_{z, u(\cdot)} \gamma(y, z, u(\cdot))$ . Здесь точная нижняя грань берется по всем  $z \in K\left(y, \frac{\beta(y)}{2}\right)$  и по всем реализациям  $u(\cdot)$ .

Пересечение  $C_n(x) = K\left(x, \frac{\beta(x)}{2}\right) \cap S_{n,2}^{(j)}$  не пусто при любом  $x \in R_n^{(j)}$ , пересечение  $C_{n+1}(x) = K\left(x, \frac{\beta(x)}{2}\right) \cap S_{n+1,1}^{(j)}$  может быть пустым. Пусть

$$\Delta_3(x) = \Omega(C_n(x), \tilde{s}_{n,2}^{(j)}),$$

$$\Delta_4(x) = \begin{cases} \Omega(C_{n+1}(x), \tilde{s}_{n+1,1}^{(j)}), & \text{если } C_{n+1}(x) \neq \emptyset \\ \Delta_3(x), & \text{если } C_{n+1}(x) = \emptyset, \end{cases}$$

$$\Delta_5 = \Omega(p^{(j)}(\tilde{y}_{n,2}^{(j)}, \tilde{y}_{n+1,1}^{(j)}, u_{n,2}^{(j)}), A_\xi).$$

При  $x \in R_n^{(j)}$  положим  $v^*[x] = v_n^{(j)}(x)$ ,  $\Delta^*[x] = \min\{\Delta_2(x), \Delta_3(x), \Delta_4(x), \Delta_5\}$ .

Пусть  $x \in S_n^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $1 \leq n \leq n^{(j)}$ . Примем  $v^*[x] = \sigma_n^{(j)}$ ,  $\Delta^*[x] = \Omega(x, \text{Fr}S_n^{(j)})$ .

Обозначим

$$Y = \bigcup_{j=1,2} \left( \left[ \bigcup_{1 \leq n \leq n^{(j)}} S_n^{(j)} \right] \cup \left[ \bigcup_{n \geq 1} R_n^{(j)} \right] \right).$$

В множестве  $X \setminus (Y \cup A_\xi)$  положим  $v^*[x] = v^*$ , где  $v^*$  — произвольный вектор из  $V$ , и  $\Delta^*[x] = \Omega(x, A_\xi)$ .

Таким образом, дискретная схема  $\{v^*[x], \Delta^*[x]\}$  определена на  $X \setminus A_\xi$ . В множестве  $A_\xi$  пусть  $v^*[x] \equiv v_*$ ,  $\Delta^*[x] \equiv \Delta_*$ , где  $v^*$  — любой вектор из  $V$ , а  $\Delta_* > 0$  — произвольное число. Можно проверить, что дискретная схема  $\{v^*[x], \Delta^*[x]\}$  допустима.

Пусть второй игрок применяет дискретную схему  $\{v^*[x]$ ,

$\Delta^*[x]\}$ . Непосредственно из ее определения следует, что при любой начальной позиции  $x_0 \in X \setminus A_\xi$  и при любой реализации  $u(\cdot)$  система (1.1) не может за конечное время перейти из точки  $x_0$  на множество  $\text{Fr}A_\xi \setminus \left[ \bigcup_{j=1,2} \left( \bigcup_{1 \leq n \leq n^{(j)}} S_n^{(j)} \right) \right]$ . Таким образом, для доказательства леммы 6.2 достаточно установить невозможность перехода на каждое из множеств  $\text{Fr}A_\xi \cap S_n^{(j)} = A_\xi \cap S_n^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $1 \leq n \leq n^{(j)}$ . Проведем подробно такое доказательство для множеств  $A_\xi \cap S_n^{(j)}$ , соответствующих случаям 1, 3.1.

1\*. Предположим, что множество  $S_n^{(j)}$  построено на основе отрезков без контакта для случая 1.

1. Пусть  $\tilde{v}_\xi^{(1)}(a_n) \neq v(a_n, \mu)$ ,  $\alpha = \tilde{u}_\xi^{(1)}(a_n)$ . Положим для определенности  $\alpha = \mu$ .

A). Пусть  $\sigma^*$  — отрезок, соединяющий точки  $\tilde{v}_\xi^{(1)}(a_n)$  и  $v(a_n, \mu)$ . Отрезок  $\sigma^*$  принадлежит одной из сторон многоугольника  $V$ , обозначим ее через  $\tilde{\gamma}$ . Нетрудно видеть, что прямая  $\gamma$  (рис. 7.1, b), на которой лежит полукасательная к  $g_\xi^{(1)}(a_n)$  в точке  $a_n$ , параллельна  $\tilde{\gamma}$ .

Обозначим через  $\Gamma$  ту из двух замкнутых полуплоскостей, определяемых  $\gamma$ , что содержит в себе множество  $S_n^{(j)}$ . Пусть  $p$  — вектор, ортогональный  $\gamma$  и направленный в полуплоскость  $X \setminus (\Gamma - a_n)$ . Через  $z_p$  обозначим проекцию вектора  $z$  на вектор  $p$ .

При любом  $u \in U$  выполняется включение  $Aa_n + u - \sigma^* \subset \Gamma - a_n$ , а при  $u = \mu$  — включение  $Aa_n + \mu - \sigma^* \subset \gamma - a_n$ . Поэтому для всех  $u \in U$ ,  $v \in \sigma^*$

$$(Aa_n + u - v)_p \leq (Aa_n + \mu - v)_p = 0. \quad (7.1)$$

Множество  $S_n^{(1)}$  по построению лежит в некотором остроугольном секторе с вершиной  $a_n$ , вложенном в  $\Gamma$ , но пересекающимся с прямой  $\gamma$  только в  $a_n$ . Следовательно, при всех  $x \in S_n^{(1)}$

$$|x - a_n| \leq (a_n - x)_p l, \quad (7.2)$$

где  $l > 0$  — константа, не зависящая от  $x$ .

Из неравенств (7.1), (7.2) при любых  $x \in S_n^{(1)}$ ,  $u \in U$ ,  $v \in \sigma^*$

$$\begin{aligned} (Ax + u - v)_p &= (A(x - a_n) + Aa_n + u - v)_p \leq \\ &\leq (A(x - a_n))_p \leq \|A\| |x - a_n| \leq (a_n - x)_p l. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что при любых  $x \in S_n^{(1)}$ ,  $u \in U$  проекция вектора  $Ax + u - v(a_n, \mu)$  на ось  $x_1$  удовлетворяет неравенству

$$(Ax + u - v(a_n, \mu))_1 \leq (a_n - x)_1 l^*, \quad (7.4)$$

где  $l^* > 0$  не зависит от  $x, u$ .



В). Пусть  $D(r) = O(a_n, r) \cap I_{n-1}^{(1)}$ . Покажем существование такого числа  $r^{(1)}$ , что если  $x(t_*) = x_*$  — произвольная точка из  $D(r^{(1)})$ , а  $t_*$  — момент  $\Delta$ -переключения, то на полуинтервале  $[t_*, t_* + \Delta^*[x_*])$  при любой реализации  $u(\cdot)$   $\dot{x}_1(t) < 0$ .

Символом  $H(v)$ ,  $v \in V$ , обозначим прямую полосы  $Q$ , определяемую уравнением  $(Ax)_1 - v_1 = 0$ .

Если  $r$  достаточно мало, то для любого  $x \in D(r)$   $H(v_n^{(1)}(x)) \geq H(a_n)$ . В самом деле, при  $a_n \in H(\mu)$  это следует из  $H(v_n^{(1)}(a_n, -\mu)) > H(a_n)$ , что, в свою очередь, вытекает из  $f_1^{(1)}(a_n, -\mu) > 0$ ,  $a_n \in P(-\mu)$ . Если  $a_n \notin H(\mu)$ , то при достаточно малом  $r$  для любого  $x \in O(a_n, r) \cap Q$   $v_n^{(1)}(x, -\mu) = v_n^{(1)}(a_n, -\mu)$  и значит  $H(v_n^{(1)}(x, -\mu)) = H(a_n)$ .

Так как  $s_{n,1}^{(1)(-)} < H(a_n)$ , то можно считать, что и  $\tilde{s}_{n,1}^{(1)(-)} < H(a_n)$ . Выберем  $r^{(1)}$  из условия:  $H(v_n^{(1)}(x)) \geq H(a_n)$  при любом  $x \in D(r^{(1)})$ . Поскольку для каждого  $x_* \in D(r^{(1)})$   $x_* < H(v_n^{(1)}(x_*))$ , то при любой реализации  $u(\cdot)$  составляющая  $\dot{x}_1(t)$ ,  $t \in [t_*, t_* + \Delta[x_*])$  скорости  $\dot{x}(t)$  отрицательна вплоть до первого выхода системы (1.1) на прямую  $H(v_n^{(1)}(x_*))$ . Но такой выход не может быть раньше момента попадания на отрезок  $\tilde{s}_{n,1}^{(1)}$ . Таким образом,  $\dot{x}_1(t) < 0$  на всем полуинтервале  $[t_*, t_* + \Delta[x_*])$ .

С). Пусть  $\tilde{x} = x[\tilde{v}^{(1)}(a_n, \mu)]$ . Нетрудно установить, что  $\tilde{x} < \pi_2(a_n)$  и что отрезок, соединяющий точки  $\tilde{x}$  и  $a_n$ , принадлежит  $J(\mu)$ . Пусть  $\Gamma$  — полуплоскость, лежащая выше прямой  $\pi(\tilde{x}, a_n)$ . Прямую  $\pi(\tilde{x}, a_n)$  не будем включать в  $\Gamma$ . Поскольку  $H(\tilde{v}^{(1)}(a_n)) < H(a_n)$  и  $g_\zeta^{(1)}(a_n, \kappa^{(1)}) \setminus \{a_n\} \subset (X(\mu) \cup J) \setminus J(\mu)$ , то  $g_\zeta^{(1)}(a_n, \kappa^{(1)}) \setminus \{a_n\} > \pi(\tilde{x}, a_n)$  и поэтому для всех положительных  $r < r^{(2)}$ , где  $r^{(2)}$  — достаточно мало,  $B(r) = O(a_n, r) \cap I_n^{(1)} \subset O(a_n, r) \cap \Gamma$ . Выберем положительное  $r^{(3)} < r^{(2)}$  так, чтобы  $v^{(1)}(x, \mu) = \tilde{v}^{(1)}(a_n)$  для любого  $x \in O(a_n, r^{(3)}) \cap \Gamma$ . Тогда  $v_n^{(1)}(x) = \tilde{v}^{(1)}(a_n)$  при любом  $x \in B(r^{(3)})$ . Заметим, что при каждом  $x \in S_{n,2}^{(1)(-)} \cap B(r^{(3)})$  вектор  $Ax + u - \tilde{v}^{(1)}(a_n)$  для любого  $u \in U$  направлен внутрь  $S_n^{(1)}$ .

Д). Предположим, что существуют точки  $x_0 \in X \setminus A_\zeta$  и реализация  $u^0(\cdot)$ , переводящая систему (1.1) из  $x_0$  в  $a_n = S_n^{(1)} \cap A_\zeta$  за конечное время. Момент попадания в точку  $a_n$  обозначим через  $v$ . Учитывая результат пункта С), заключаем, что на некотором отрезке  $[t^*, v]$  рассматриваемое движение  $x^0(t)$  должно целиком лежать в множестве  $D(r_*) \cup (S_n^{(1)} \cap O(a_n, r_*))$ , где  $r_* = \min\{r^{(1)}, r^{(3)}\}$ .

Пусть  $\hat{t} \in [t^*, v]$  — некоторый момент  $\Delta$ -переключения. Если бы при  $t \geq \hat{t}$  движение  $x^0(t)$  не выходило из множества  $(S_n^{(1)} \setminus S_{n,1}^{(1)(-)}) \cap O(a_n, r_*)$ , то в силу (7.3) оно не могло достичь точки  $a_n$  за конечное время. Аналогичный вывод следует из не-

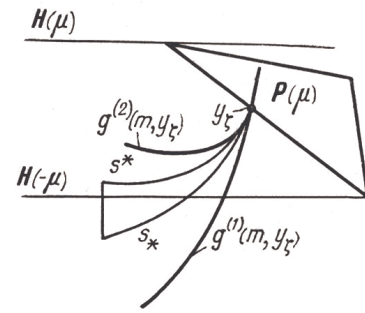


Рис. 7.6  $\tilde{v}_\zeta^{(2)}(y_\zeta) \neq v(y_\zeta, \mu)$

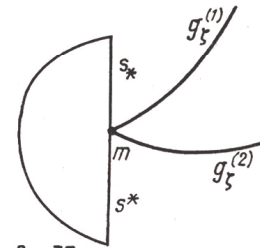


Рис. 7.7

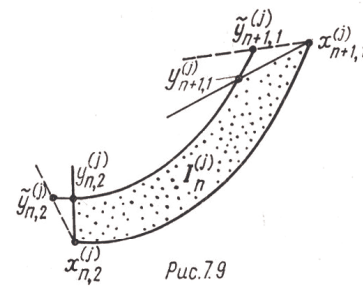


Рис. 7.9

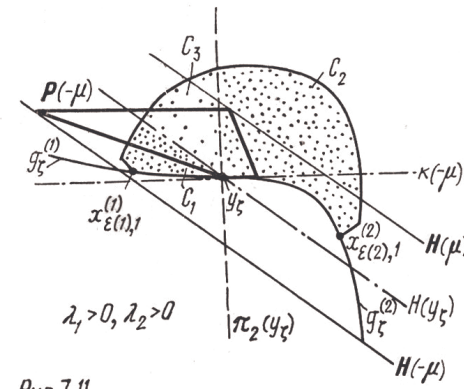


Рис. 7.11

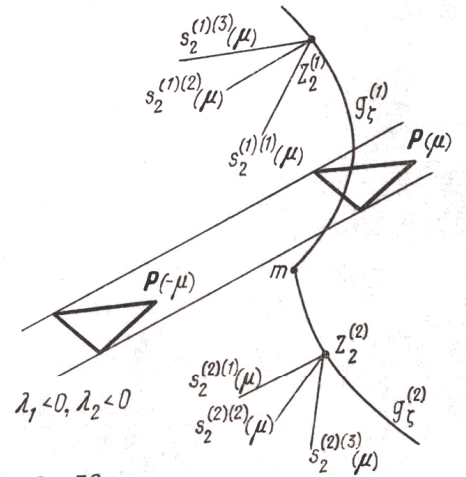


Рис. 7.8

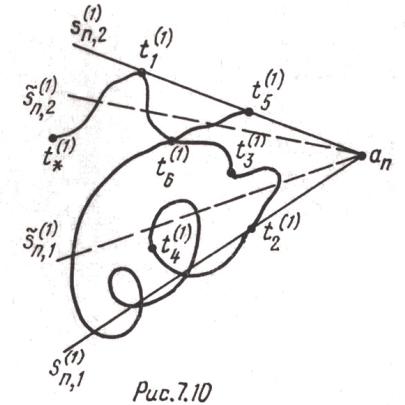


Рис. 7.10

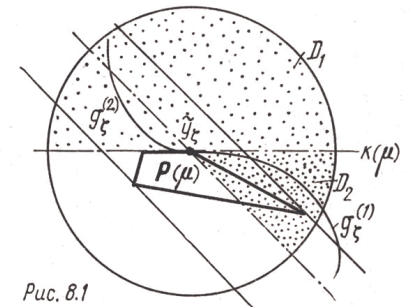


Рис. 8.1

равенства (7.4) и результата пункта B), если предположить, что при  $t \geq t^*$  движение  $x^0(t)$  не покидает множество  $[(S_n^{(1)} \setminus s_{n,2}^{(1)(-)}) \cap \cap O(a_n, r_*)] \cup D(r_*)$ . Следовательно, движение  $x^0(t)$  должно удовлетворять условию: существуют такие две возрастающие последовательности  $\{\Theta^{(k)}\}$  и  $\{\Theta_k\}$  моментов  $\Delta$ -переключения, сходящиеся к  $\nu$ , что при каждом  $k$   $x^0(\Theta^{(k)}) \in s_{n,2}^{(1)(-)}$  и  $x^0(\Theta_k) \in s_{n,1}^{(1)(-)}$ .

Рассмотрим движение  $x^0(t)$  на отрезке  $[t_*^{(1)}, \nu]$ , где  $t_*^{(1)} \geq t^*$  — произвольный момент, для которого реализующееся значение  $v^*[t_*^{(1)}]$  управления  $v$  равно  $v(a_n, \mu)$ . Выделим следующие моменты времени:  $t_1^{(1)}$  — ближайший к  $t_*^{(1)}$  справа момент  $\Delta$ -переключения на  $s_{n,2}^{(1)(-)}$ ,  $t_2^{(1)}$  — ближайший к  $t_1^{(1)}$  справа момент  $\Delta$ -переключения на  $s_{n,1}^{(1)(-)}$ ,  $t_3^{(1)}$  ( $t_4^{(1)}$ ) — ближайший к  $t_2^{(1)}$  слева (справа) момент  $\Delta$ -переключения в  $S_n^{(1)}$ ,  $t_5^{(1)}$  — ближайший к  $t_2^{(1)}$  справа момент  $\Delta$ -переключения на  $s_{n,2}^{(1)(-)}$ , удовлетворяющий условию  $x_1^0(t_5^{(1)}) > x_1^0(t_1^{(1)})$  (рис. 7.10).

Поскольку  $\tilde{s}_{n,1}^{(1)(-)} < H(a_n)$ , то при любом  $x$  из  $S_n^{(1)} \cap O(a_n, r_*)$ , лежащем ниже  $\tilde{s}_{n,1}^{(1)(-)}$ ,  $(Ax)_1 - v_1(a_n, \mu) < 0$ . Отсюда, учитывая результат пункта B), определение дискретной схемы  $\{v^*[x], \Delta^*[x]\}$  и неравенство  $x_1^0(t_5^{(1)}) > x_1^0(t_1^{(1)})$ , выводим существование таких моментов  $t_6^{(1)} \in (t_1^{(1)}, t_2^{(1)})$  и  $t_7^{(1)} \in (t_4^{(1)}, t_5^{(1)})$ , что  $x^0(t_6^{(1)}) = x^0(t_7^{(1)})$  и  $v^*[t_7^{(1)}] = v(a_n, \mu)$ . По построению на полуинтервале  $[t_*^{(1)}, t_6^{(1)})$   $v^*[t] \in \sigma^*$ .

Взяв вместо  $t_*^{(1)}$  момент  $t_*^{(2)} = t_7^{(1)}$ , аналогичным образом определим моменты  $t_6^{(2)}, t_7^{(2)}$ . Положив  $t_*^{(3)} = t_7^{(2)}$ , найдем  $t_6^{(3)}, t_7^{(3)}$  и т. д. В пределе получим такие две последовательности  $\{t_6^{(k)}\}$  и  $\{t_7^{(k)}\}$ ,  $k=1, 2, \dots$ , что

$$1) \text{ при любом } k \quad x^0(t_6^{(k)}) = x^0(t_7^{(k)}),$$

2) для каждого  $t$ , принадлежащего  $[t_*^{(k)}, \nu]$  и не попадающего ни в один из полуинтервалов  $[t_6^{(k)}, t_7^{(k)})$ ,  $k=1, 2, \dots$ ,  $v^*[t] \in \sigma^*$ .

Пусть  $\nu_* = \nu - \sum_{k=1}^{\infty} (t_7^{(k)} - t_6^{(k)})$ . Выбрасывая из движения  $x^0(t)$  участки, соответствующие полуинтервалам  $[t_6^{(k)}, t_7^{(k)})$ ,  $k=1, 2, \dots$ , и склеивая один за другим оставшиеся, получим движение  $x_*(t)$  системы (1.1) на отрезке  $[t_*^{(1)}, \nu_*]$  в силу функции  $u_*(t)$ , набранной из кусков реализации  $u^0(\cdot)$ , и функции  $v_*(t)$ , принадлежащей при любом  $t \in [t_*^{(1)}, \nu_*]$  отрезку  $\sigma^*$ . Движение  $x_*(t)$  начинается в точке  $x^0(t_*^{(1)})$ , заканчивается в точке  $a_n$  и на всем отрезке  $[t_*^{(1)}, \nu_*]$  лежит в множестве  $S_n^{(1)} \setminus s_{n,1}^{(1)(-)}$ . Но это невозможно в силу (7.3). Следовательно, неверно предположение о существовании движения  $x^0(t)$ .

2. Пусть  $\tilde{v}_\xi^{(1)}(a_n) = v(a_n, \alpha)$ ,  $\alpha = \tilde{u}_\xi^{(1)}(a_n)$ . В силу 5.13 это возможно только при  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ . Поэтому (см. 5.2)  $n=2, \alpha = \mu$ .

A). Нетрудно установить, что  $g^{(1)}(a_2)$  есть полупрямая (лежащая на инвариантной прямой системы  $\dot{x} = Ax + \mu - v(a_2, \mu)$ ) с отрицательным угловым коэффициентом. Отсюда и из геометрического расположения множества  $S_2^{(1)}$  (рис. 7.1, а) вытекает, что при всех  $x \in S_2^{(1)}, u \in U$

$$\begin{aligned} (Ax + u - v(a_2, \mu))_1 &= (A(x - a_2))_1 + (Aa_2 - v(a_2, \mu))_1 = \\ &= (A(x - a_2))_1 \leq \|A\| |x - a_2| \leq \|A\| (a_2 - x)_1 l, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где  $l > 0$  — константа, не зависящая от  $x, u$ .

B). Пусть  $D(r) = O(a_2, r) \cap S_2^{(1)}$ . Существует такое  $r^{(1)} > 0$ , что если  $x(t_*) = x_*$  — произвольная точка из  $D(r^{(1)})$ , а  $t_*$  — момент  $\Delta$ -переключения, то на полуинтервале  $[t_*, t_* + \Delta[x_*]]$  при любой реализации  $u(\cdot)$   $\dot{x}_1(t) < 0$ . Доказательство этого утверждения аналогично доказательству в пункте B) раздела 1.

C). Если  $r > 0$  — достаточно мало, то для каждого  $x \in O(x_{2,2}^{(1)}, r) \cap s_{2,2}^{(1)(-)}$  и любого  $u \in U$  вектор  $Ax + u - v_2^{(1)}(x)$  ( $Ax + u - v \times (a_2, \mu)$ ) направлен внутрь множества  $S_2^{(1)}$ .

D). Предположим, что существуют точка  $x_0 = x(t_0) \in X \setminus A_\xi$  и реализация  $u(\cdot)$ , переводящая систему (1.1) из  $x_0$  на дугу  $g_\xi^{(1)}(a_2, x_{2,2}^{(1)}) = S_2^{(1)} \cap A_\xi$  в конечный момент  $\nu$ . Из утверждения C) и определения дискретной схемы  $\{v^*[x], \Delta^*[x]\}$  получаем, что на некотором отрезке  $[t_*, \nu]$ , где  $t_* \geq t_0$  — момент  $\Delta$ -переключения, рассматриваемое движение  $x^0(t)$  должно целиком лежать в множестве  $(S_2^{(1)} \setminus s_{2,2}^{(1)(-)}) \cap D(r^{(1)})$ . Очевидно, что  $x^0(\nu) \notin g_\xi^{(2)}(a_2, x_{2,2}^{(1)}) \setminus \{a_2\}$ . Равенство  $x^0(\nu) = a_2$  противоречит (7.5) и утверждению B). Таким образом, движение  $x^0(t)$  невозможно.

2\*. Пусть множество  $S_n^{(j)}$  построено на основе отрезков без контакта для случая 3.1. В силу утверждения 5.10 случай 3.1 возможен только при  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ . Предположим для определенности, что  $\gamma_\xi \in J(-\mu)$ .

Если  $x_{\varepsilon(1),1}^{(1)} \neq \gamma_\xi$  ( $x_{\varepsilon(2),1}^{(1)} \neq \gamma_\xi$ ), то из определения кривой  $g_\xi^{(1)}$  ( $g_\xi^{(2)}$ ) и точки  $x_{\varepsilon(1),1}^{(1)}$  ( $x_{\varepsilon(2),1}^{(1)}$ ) вытекает, что  $(x_{\varepsilon(1),1}^{(1)} \gamma_\xi) < H(\gamma_\xi)$  ( $(x_{\varepsilon(2),1}^{(1)} \gamma_\xi) > H(\gamma_\xi)$ ). Если  $x_{\varepsilon(2),1}^{(1)} = \gamma_\xi$ , то по определению  $s_{\varepsilon(2),1}^{(2)(-)} > H(\gamma_\xi)$ . Опираясь на эти свойства, разобьем множество  $S_n^{(j)}$  на три части (рис. 7.11):

$$C_1 = \{x: x \in S_n^{(j)}, x < \pi_2(\gamma_\xi), x < H(\gamma_\xi)\},$$

$$C_2 = \{x: x \in S_n^{(j)}, x > \pi_2(\gamma_\xi), x > H(\gamma_\xi)\},$$

$$C_3 = \{x: x \in S_n^{(j)}, x \leq \pi_2(\gamma_\xi), x \geq H(\gamma_\xi)\}.$$

Очевидно, что при всех  $x \in C_1$  ( $x \in C_2$ ),  $u \in U$

$$(Ax+u-v(y_\xi, -\mu))_1 < 0, \quad ((Ax+u-v(y_\xi, -\mu))_1 > 0). \quad (7.6)$$

Поскольку  $C_3 \setminus \{y_\xi\} > k(-\mu)$ , то при всех  $x \in C_3 \setminus \{y_\xi\}$ ,  $u \in U$

$$(Ax+u-v(y_\xi, -\mu))_2 > 0. \quad (7.7)$$

Из неравенств (7.6), (7.7) и определения дискретной схемы  $\{v^*[x], \Delta^*[x]\}$  получаем, что при любом  $x^* = x(t^*) \in S_n^{(j)}$ , где  $t^*$  — момент  $\Delta$ -переключения, и при любой реализации  $u(\cdot)$ , сохраняющей движение в  $\dot{S}_n^{(j)} \cup (S_n^{(j)} \cap A_\xi)$  (до первого выхода на  $S_n^{(j)} \cap A_\xi$ ), система (1.1) не может перейти из  $x^*$  на  $S_n^{(j)} \cap A_\xi$  за конечное время. Требуемое утверждение о невозможности перевода на  $S_n^{(j)} \cap A_\xi$  из любой точки  $x_0 \in X \setminus A_\xi$  и при любой реализации  $u(\cdot)$  вытекает теперь с учетом (7.6) и соотношений  $s_{\varepsilon(1),1}^{(1)} < H(y_\xi)$  при  $x_{\varepsilon(1),1}^{(1)} = y_\xi$ ,  $s_{\varepsilon(2),1}^{(2)} > \pi_2(y_\xi)$  при  $x_{\varepsilon(2),1}^{(2)} = y_\xi$  из следующего свойства: существует такое  $r^{(1)} > 0$  ( $r^{(2)} > 0$ ), что если  $x_* = x(t_*)$  — произвольная точка множества  $O(x_{\varepsilon(1),1}^{(1)}, r^{(1)}) \cap I_{\varepsilon(1)-1}^{(1)}$  ( $O(x_{\varepsilon(2),1}^{(2)}, r^{(2)}) \cap I_{\varepsilon(2)-1}^{(2)}$ ), а  $t_*$  — момент  $\Delta$ -переключения, то при каждой реализации  $u(\cdot)$  выполнено хотя бы одно из условий:

1) на полуинтервале  $[t_*, t_* + \Delta^*[x_*])$   $\dot{x}_1(t) < 0$  ( $\dot{x}_1(t) > 0$ ); 2) на интервале  $(t_*, t_* + \Delta^*[x_*])$  движение идет вне  $S_n^{(j)}$ .

Приведенные доказательства  $1^*$ ,  $2^*$  для множеств  $S_n^{(j)} \cap A_\xi$ , соответствующих случаям 1, 3.1, строились по следующей грубой схеме: 1) показывалось, что любое движение с началом в точке  $x(t^*) \in S_n^{(j)} \setminus A_\xi$ , не выходящее при  $t \geq t^*$  из  $S_n^{(j)}$ , не может попасть на  $S_n^{(j)} \cap A_\xi$  за конечное время; 2) отсюда на основе изучения ситуаций, возникающих при переходе границы множества  $S_n^{(j)}$ , делался вывод о невозможности попадания на  $S_n^{(j)} \cap A_\xi$  за конечное время из любой начальной позиции  $x_0 \in X \setminus A_\xi$ . Подобная схема работает и в остальных случаях.

II. Пусть кривая  $g_\xi^{(j)}$ ,  $j=1, 2$ , имеет предельный цикл  $T_\xi^{(j)}$ . Поскольку гладкие дуги кривой  $T_\xi^{(j)}$  описываются теми же уравнениями, что и соответствующие дуги кривой  $g_\xi^{(j)}$  (см. доказательство утверждений 5.21, 5.22) и правило склеивания гладких дуг также аналогично, то построение дискретной схемы второго игрока, не допускающей попадание фазовой точки за конечное время на множество  $A_\xi$  из любой начальной позиции внутри, если  $j=1$ , и вне, если  $j=2$ , множества, ограниченного кривой  $T_\xi^{(j)}$ , естественным образом вытекает из построения дискретной схемы  $\{v^*[x], \Delta^*[x]\}$ , описанной в пункте I. Следует лишь учесть, что если  $T_\xi^{(j)}$  — гладкая кривая, то для определения дискретной схемы следует, выбрав произвольную точку  $x_* \in T_\xi^{(j)}$ , построить три отрез-

ка без контакта с началом  $x_*$  так, как это делалось для точек  $z_n^{(j)}$ ,  $n > n^{(j)}$ , на кривой  $g_\xi^{(j)}$ .

Если  $g_\xi^{(j)}$ ,  $j=1, 2$ , — простая замкнутая кривая, то построение дискретной схемы второго игрока, уклоняющей движение от  $A_\xi$  из любой начальной позиции внутри, если  $j=1$ , и вне, если  $j=2$ , множества, ограниченного кривой  $g_\xi^{(j)}$ , также вытекает из результатов пункта I.

Доказательство закончено.

## 8. Доказательство лемм 5.3, 5.4, 5.5

Пусть запись  $Y \subset \Lambda_-(x)$  ( $Y \subset \Lambda_+(x)$ ) означает, что множество  $Y$  принадлежит некоторому замкнутому остроугольному сектору с вершиной  $x$ , расположенному слева (справа) от вертикальной прямой  $\pi_2(x)$  и пересекающемуся с ней только в точке  $x$ .

Доказательство леммы 5.3. Пусть  $\{v^0[x], \Delta^0[x]\}$  — некоторая допустимая дискретная схема второго игрока, совпадающая на множестве  $X \setminus A_\xi$  с дискретной схемой  $\{v^*[x], \Delta^*[x]\}$ , введенной в доказательстве леммы 5.2. Тогда, если  $x_* = x(t_*)$  — произвольная точка из  $X \setminus A_\xi$ , а  $t_*$  — момент  $\Delta$ -переключения, то при  $t \geq t_*$  система (1.1) не может за конечное время попасть на множество  $A_\xi$ . Таким образом, для доказательства леммы 5.3 достаточно так определить дискретную схему  $\{v^0[x], \Delta^0[x]\}$  на  $A_\xi \setminus \tilde{A}_\xi$ , чтобы при любом  $x_0 = x(t_0) \in A_\xi \setminus \tilde{A}_\xi$  и при любой реализации  $u(\cdot)$  фазовая точка либо не выходила из  $A_\xi \setminus \tilde{A}_\xi$  на бесконечном полуинтервале  $[t_0, \infty)$ , либо в некоторый момент  $\Delta$ -переключения принадлежала  $X \setminus A_\xi$ .

По определению множеств  $A_\xi, \tilde{A}_\xi$

$$A_\xi \setminus \tilde{A}_\xi = (A_\xi \setminus \Phi_\xi) \cup (g_\xi^{(1)}(a_\xi) \setminus \{a_\xi\}) \cup g_\xi^{(2)}(q_\xi) \cup \tilde{T}_\xi^{(1)} \cup T_\xi^{(2)}.$$

$1^*$ . Обозначим

$$\Gamma = \{q_i : q_i \in g_\xi^{(2)} \setminus \{y_\xi\}, q_i \in F(\tilde{u}_\xi^{(2)}(q_i)), i \geq \theta_\xi^{(2)}\}.$$

Пусть  $q_i$  — произвольная точка из  $\Gamma$ . Предположим, что  $\tilde{u}_\xi^{(2)}(q_i) = -\mu$ .

Выберем число  $r_* > 0$  так, чтобы

$$g_\xi^{(2)}(q_i) \cap O(q_i, r_*) \subset \{x : x \in g_\xi^{(2)}(q_i), \tilde{v}_\xi^{(2)}(x) = \tilde{v}_\xi^{(2)}(q_i)\}$$

и равномерно по  $x \in \{x : x < H(-\mu)\} \cap O(q_i, r_*)$ ,  $u \in U$  скалярное произведение

$$\langle Ax+u-v(q_i, -\mu), \eta^{(2)}(x, \mu) \rangle > \text{const} > 0.$$

Положим  $v^0[q_i] = v(q_i, -\mu)$ ,  $\Delta^0[q_i] = \Omega(q_i, \text{Fr}O(q_i, r_*))$ .

Так как полукасательная к кривой  $g_{\xi}^{(2)}(m, q_i)$  в точке  $q_i$  не вертикальна, то

$$\{x: x \in A_{\xi} \cap O(q_i, r_*)\}, x \leq H(-\mu), x \leq \pi_2(q_i) \subset \Lambda_-(q_i).$$

Отсюда, поскольку  $(Ax+u-v^0[q_i])_1 > 0$  при  $x > H(-\mu)$ ,  $u \in U$ , получаем, что для всех  $x \in D = A_{\xi} \cap O(q_i, r_*)$ ,  $u \in U$

$$\begin{aligned} (Ax+u-v^0[q_i])_1 &= (Ax)_1 - v_1(q_i, -\mu) = \\ &= (A(x-q_i))_1 \geq \|A\|(q_i-x)l, \end{aligned}$$

где  $l < 0$  не зависит от  $x, u$ . Следовательно, при  $v \equiv v^0[q_i]$  система (1.1) на отрезке  $[t_*, t_* + \Delta^0[q_i]]$  не может перейти из точки  $x(t_*) = q_i$  в множество  $D \setminus \{q_i\}$ , какова бы ни была реализация  $u(\cdot)$ , сохраняющая движение в  $D$ . Учитывая определение числа  $r_*$ , соотношения  $O(q_i, r_*) \setminus D \subset X \setminus A_{\xi}$  и  $\tilde{v}_{\xi}^{(2)}(q_i) = v(q_i, -\mu)$ , приходим, таким образом, к выводу: если  $x(t_*) = q_i$ ,  $v \equiv v^0[q_i]$ , то либо  $x(t) = q_i$  на всем отрезке  $[t_*, t_* + \Delta^0[q_i]]$ , либо  $x(t_* + \Delta^0[q_i]) \in X \setminus A_{\xi}$ .

Аналогичный вывод справедлив для  $\tilde{u}_{\xi}^{(2)}(q_i) = \mu$  при  $v^0[q_i] = v(q_i, \mu)$  и соответствующем определении числа  $\Delta^0[q_i]$ .

Пусть  $x$  — произвольная точка из  $g^{(2)}(q_{\xi}) \setminus (\Gamma \cup \{\tilde{y}_{\xi}\})$ . Примем  $j = \max\{i: q_i \in \Gamma, x \in g^{(2)}(q_i), i \geq \theta_{\xi}^{(2)}\}$ . На кривой  $g^{(2)}(q_i, x)$  выделим максимальную дугу  $(zx)$ , для любой точки  $y$  которой  $u_{\xi}^{(2)}(y) = u_{\xi}^{(2)}(x)$ ,  $v_{\xi}^{(2)}(y) = v_{\xi}^{(2)}(x)$ . Положим  $v^0[x] = v_{\xi}^{(2)}(x)$ . Число  $\Delta^0[x] \leq \Omega(x, z)$  выберем так, чтобы при  $v \equiv v^0[x]$  система (1.1), находясь в момент  $t_*$  в точке  $x$ , не могла, в случае выхода из  $A_{\xi}$ , вернуться в  $A_{\xi}$  на отрезке  $[t_*, t_* + \Delta^0[x]]$ . Возможность такого выбора вытекает из того, что для каждого  $y \in (zx)$  растров вектограммы  $Ay + U - v_0[x]$  меньше  $\pi$  и  $\langle Ay + u - v^0[x], \eta^{(2)}(y, u_{\xi}^{(2)}(y)) \rangle \geq 0$ , каково бы ни было  $u \in U$ , причем при  $u = u_{\xi}^{(2)}(x)$  осуществляется равенство.

Пусть дискретная схема  $\{v^0[x], \Delta^0[x]\}$  задана на кривой  $g^{(2)}(q_{\xi}) \setminus \{\tilde{y}_{\xi}\}$  так, как описано в этом пункте. Тогда при любом  $x_0 \in g^{(2)}(q_{\xi}) \setminus \{\tilde{y}_{\xi}\}$  фазовая точка в зависимости от реализации  $u(\cdot)$  либо остается в течение бесконечного времени на  $g^{(2)}(q_{\xi}) \setminus \{\tilde{y}_{\xi}\}$  (застревая в точках  $q_i \in \Gamma$ ), либо в некоторый момент  $\Delta$ -переключения принадлежит  $X \setminus A_{\xi}$ .

2\*. В силу 5.13 случай  $a_{\xi} \neq \emptyset$  реализуется только при  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . При этом  $a_{\xi} = a_2$  и  $g_{\xi}^{(1)}(a_{\xi})$  лежит на инвариантной прямой системы  $\dot{x} = Ax + \mu - v(a_{\xi}, \mu)$ .

Для каждого  $x \in g^{(1)}(a_{\xi}) \setminus \{a_{\xi}\}$  положим  $v^0[x] = v(a_{\xi}, \mu)$ . Число  $\Delta^0[x] \leq \Omega(x, a_{\xi})$  выберем так, чтобы при  $v \equiv v^0[x]$  система (1.1), находясь в момент  $t_*$  в точке  $x$ , не могла в случае выхода из  $A_{\xi}$ , вернуться в  $A_{\xi}$  на отрезке  $[t_*, t_* + \Delta^0[x]]$ . Пусть  $x_0 \in g^{(1)} \times (a_{\xi}) \setminus \{a_{\xi}\}$ . При указанном определении дискретной схемы система (1.1) в зависимости от реализации  $u(\cdot)$  либо удерживается на  $g^{(1)}(a_{\xi}) \setminus \{a_{\xi}\}$  и тогда она не может прийти за конечное время

до точки  $a_{\xi}$ , либо в некоторый момент  $\Delta$ -переключения оказывается в  $X \setminus A_{\xi}$ .

3\*. Пусть  $\tilde{y}_{\xi} \in J(u_{\xi}^{(1)}(\tilde{y}_{\xi}))$ . В силу 5.10 это возможно только при  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ . Предположим, что  $u_{\xi}^{(1)}(y_{\xi}) = \mu$ .

Выберем число  $r_* > 0$  так, чтобы

$$(g_{\xi}^{(1)} \setminus \{\tilde{y}_{\xi}\}) \cap O(\tilde{y}_{\xi}, r_*) \cap H(\tilde{y}_{\xi}) = \emptyset.$$

Положим  $v^0[\tilde{y}_{\xi}] = v(\tilde{y}_{\xi}, \mu)$ ,  $\Delta^0[\tilde{y}_{\xi}] = \Omega(\tilde{y}_{\xi}, \text{Fr}O(\tilde{y}_{\xi}, r_*))$ . Поскольку для всех  $x \in X$ ,  $u \in U$

$$(Ax+u-v^0[\tilde{y}_{\xi}])_2 \leq (Ax+\mu-v^0[\tilde{y}_{\xi}])_2 = \lambda_2(x-\tilde{y}_{\xi})_2, \quad (8.1)$$

то переход системы (1.1) из  $\tilde{y}_{\xi}$  в множество  $D_1 = O(\tilde{y}_{\xi}, r_*) \cap \{x: x > \pi_1(\tilde{y}_{\xi})\}$  при  $v \equiv v^0[\tilde{y}_{\xi}]$  невозможен. Пусть  $D_2 = \{x: x \in O \times (\tilde{y}_{\xi}, r_*)\}$ ,  $x \geq H(\tilde{y}_{\xi})$ ,  $x \leq \pi_1(\tilde{y}_{\xi})\}$  (рис. 8.1). Предположим, что для некоторого  $t^* \in [t_*, t_* + \Delta^0[\tilde{y}_{\xi}]]$   $x(t^*) = y^* \in D_2 \setminus \{\tilde{y}_{\xi}\}$ , в то время как  $x(t_*) = \tilde{y}_{\xi}$  и  $v \equiv v^0[\tilde{y}_{\xi}]$ . Так как  $(Ax+u-v^0[\tilde{y}_{\xi}])_1 < 0$ ,  $(Ax+u-v^0[\tilde{y}_{\xi}])_2 < 0$  при  $x \in \{x: x \in H(\tilde{y}_{\xi}), x < \pi_1(\tilde{y}_{\xi})\}$ ,  $u \in U$ , то учитывая (8.1), заключаем, что на отрезке  $[t_*, t^*]$  движение целиком должно проходить в  $D_2$ . Последнее противоречит условию  $D_2 \subset \subset \Lambda_-(\tilde{y}_{\xi})$ .

Таким образом, при  $v \equiv v^0[\tilde{y}_{\xi}]$  и  $x(t_*) = \tilde{y}_{\xi}$  либо на всем отрезке  $[t_*, t_* + \Delta^0[\tilde{y}_{\xi}]]$   $x(t) = \tilde{y}_{\xi}$ , либо  $x(t_* + \Delta^0[\tilde{y}_{\xi}]) \in O(\tilde{y}_{\xi}, r_*) \setminus (D_1 \cup D_2) \subset X \setminus A_{\xi}$ .

Аналогичный вывод справедлив для  $u_{\xi}^{(1)}(\tilde{y}_{\xi}) = -\mu$  при  $v^0[\tilde{y}_{\xi}] = v(\tilde{y}_{\xi}, -\mu)$ ,  $v^0[\tilde{y}_{\xi}] = \Omega(\tilde{y}_{\xi}, \text{Fr}O(\tilde{y}_{\xi}, r_*))$ .

4\*. Пусть  $A_{\xi} \setminus \Phi_{\xi} \neq \emptyset$ . Определим на  $A_{\xi} \setminus \Phi_{\xi}$  дискретную схему  $\{v^0[x], \Delta^0[x]\}$  так, чтобы при любой начальной позиции в  $A_{\xi} \setminus \Phi_{\xi}$  и при любой реализации  $u(\cdot)$ : 1) система (1.1) не могла попасть на множество  $\tilde{A}_{\xi} \subset \Phi_{\xi}$  иначе, как через точку  $m^*$ , 2) момент попадания в точку  $m^*$  являлся бы моментом  $\Delta$ -переключения. Тогда, учитывая определение точки  $m^*$  и результат пункта 1\*, получим, что  $A_{\xi} \setminus \Phi_{\xi} \subset B$ .

5\*. Пусть  $\tilde{T}_{\xi}^{(1)} \neq \emptyset$  ( $T_{\xi}^{(2)} \neq \emptyset$ ). Определим дискретную схему  $\{v^0[x], \Delta^0[x]\}$  на кривой  $\tilde{T}_{\xi}^{(1)}$  ( $T_{\xi}^{(2)}$ ) так, чтобы при любом  $x_0 \in \tilde{T}_{\xi}^{(1)}$  ( $x_0 \in T_{\xi}^{(2)}$ ) и при любой реализации  $u(\cdot)$  система (1.1) либо оставалась на  $\tilde{T}_{\xi}^{(1)}$  ( $T_{\xi}^{(2)}$ ) в течение бесконечного времени, либо в некоторый момент  $\Delta$ -переключения принадлежала внутренности (внешности) множества, ограниченного кривой  $\tilde{T}_{\xi}^{(1)}$  ( $T_{\xi}^{(2)}$ ), т. е. принадлежала  $X \setminus A_{\xi}$ . Если на  $\tilde{T}_{\xi}^{(1)}$  есть точка излома  $x_*$ , то по определению  $\tilde{T}_{\xi}^{(1)}$  она совпадает с одной из точек  $h_2(\mu)$ ,  $h_2(-\mu)$ . Пусть  $x_* \in h_2(\alpha)$ , где  $\alpha = \mu, -\mu$ . Тогда  $v^0[x_*] = \alpha$ . Доказательство закончено.

Пусть  $C(\alpha) = \{x: x \in X(\alpha), f^{(1)}(x) < f^{(2)}(x)\}$ . Очевидно, что  $C(\alpha) = X(\alpha) \setminus E(\alpha)$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ .

Доказательство леммы 5.4. Предположим, что  $R_\beta \cap L \neq \emptyset$ .

Двигаясь по кривой  $g_\xi^{(2)}$  от точки  $m$ , перенумеруем все точки из  $R_\beta \cap L$ . А именно, первую точку обозначим  $m_2$ , вторую  $m_3$  и т. д. Условимся, что  $m_1 = m$ .

Пусть  $j = \max\{i: m_i \in A_\xi\} + 1$ . Если максимум не существует, примем  $j = \infty$ . В силу утверждения 5.9 случай  $j > 3$  возможен лишь при комплексных корнях  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Обозначим через  $A_{i\beta}$ ,  $1 \leq i < j-1$ , замкнутое множество, ограниченное кривой, составленной из дуг  $g_\xi^{(1)}(m_i, m_{i+1})$ ,  $g_\xi^{(2)}(m_i, m_{i+1})$  (рис. 8.2, 8.3). Положим  $A_{j-1\beta} = A_\xi \setminus \left( \bigcup_{1 \leq i < j-1} A_{i\beta} \right)$ .

Доказательство проведем по шагам при помощи 4 утверждений.

1. Пусть в некоторый момент  $t_*$  система (1.1) находится в точке  $m_i$ ,  $1 < i < j$  (соответственно в точке  $y_\xi \neq \tilde{y}_\xi$  при  $g_\xi^{(1)} = r_\xi^{(1)}$ ). Тогда по любым  $v_* \in V$ ,  $\Delta > 0$  можно подобрать положительное  $\delta < \Delta$  и измеримую функцию  $u_*(t)$  со значениями в  $U$ ,  $t \in [t_*, t_* + \delta)$  так, что движение системы (1.1) в силу управлений  $u_*(t)$ ,  $v(t) \equiv v_*$  на интервале  $(t_*, t_* + \delta)$  будет идти в множестве  $A_{i-1\beta} \setminus \{m_i\}$  (соответственно в множестве  $A_{j-1\beta} \setminus \{y_\xi\}$ ).

Доказательство. 1) Пусть  $x(t_*) = y_\xi \neq \tilde{y}_\xi$  при  $g_\xi^{(1)} = r_\xi^{(1)}$ . Предположим вначале, что  $u_\xi^{(1)}(y_\xi) \neq u_\xi^{(2)}(y_\xi)$ . Тогда  $y_\xi \in C(\alpha) \setminus J$ , где  $\alpha = u_\xi^{(1)}(y_\xi)$ . Если  $y_\xi(z) \in \text{Fr}C(\alpha)$ , то векторы  $-f^{(1)}(y_\xi)$ ,  $-f^{(2)}(y_\xi)$  направлены внутрь  $C(\alpha)$  (рис. 8.4).

Пусть  $D(r) = O(y_\xi, r) \cap C(\alpha)$ . Выберем  $r_1 > 0$  так, чтобы  $D(r_1) \subset C(\alpha) \setminus J$ . На произведении  $D(r_1) \times V$  определим функцию  $u[x, v]$ : если вектор  $f(x, \alpha, v)$  лежит вне замкнутого остроугольного сектора, образованного направлениями векторов  $f^{(1)}(x)$ ,  $f^{(2)}(x)$ , то  $u[x, v]$  есть такое  $u \in U$ , что  $f(x, u, v) = f^{(2)}(x)$ ; в противном случае  $u[x, v] = \alpha$ .

При любом фиксированном  $v_* \in V$  функция  $d(x) = Ax + u[x, v_*] - v_*$  непрерывна в  $D(r_1)$ . Поэтому (учитывая, что в случае  $y_\xi \in \text{Fr}C(\alpha)$  вектор  $Ay_\xi + u[y_\xi, v_*] - v_*$  направлен внутрь  $D(r_1)$ ) система  $\dot{x} = Ax + u[x, v_*] - v_*$  с начальным условием  $x(t_*) = y_\xi$  имеет при  $t \geq t_*$  по меньшей мере одно решение  $x_*(t)$ . В силу определения функции  $u[x, v_*]$  решение  $x_*(t)$  на достаточно малом интервале  $(t_*, t_* + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , будет идти в множестве  $A_{j-1\beta} \setminus \{y_\xi\}$ . Измеримая функция  $u_*(t) = u[x_*(t), v_*]$ ,  $t \in [t_*, t_* + \delta)$ ,  $\delta < \Delta$ , является искомой.

Если  $u_\xi^{(1)}(y_\xi) = u_\xi^{(2)}(y_\xi)$ , то достаточно положить  $u_*(t) \equiv u_\xi^{(1)}(y_\xi)$ , а  $\delta < \Delta$  взять достаточно малым.

2). Пусть  $x(t_*) = m_i$ ,  $1 < i < j$ . По определению,  $m_i \in L(\alpha) \subset \text{Fr}C(\alpha)$ ,

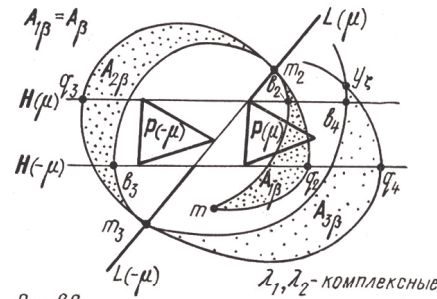


Рис. 8.2

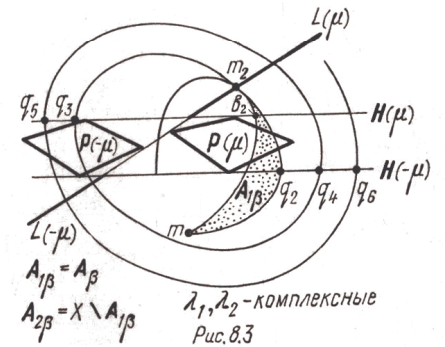


Рис. 8.3

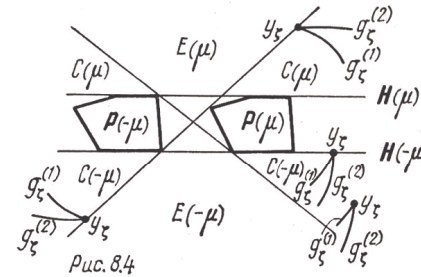


Рис. 8.4

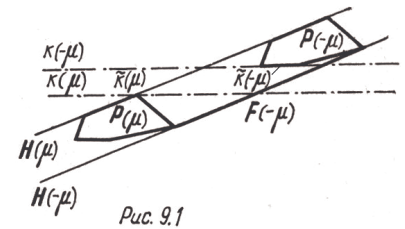


Рис. 9.1

где  $\alpha = u_{\zeta}^{(1)}(m_i)$ , причем вектор  $-f^{(1)}(m_i) = -f^{(2)}(m_i)$  направлен внутрь  $C(\alpha)$ . Построение функции  $u_*(t)$  аналогично тому, что было проделано в первом пункте при  $u_{\zeta}^{(1)}(y_{\zeta}) \neq u_{\zeta}^{(2)}(y_{\zeta})$ . Доказательство утверждения 1 закончено.

Используя вместо кривых  $g^{(1)}, g^{(2)}$  кривые  $g_i^{(1)} = g^{(1)}(m_i)$ ,  $g_i^{(2)} = g^{(2)}(m_i)$ ,  $1 < i < j$ , определим подобно кривым  $g_{\beta}^{(1)}, g_{\beta}^{(2)}$ ,  $g_{\zeta}^{(2)}$  кривые  $g_{i\beta}^{(1)}, g_{i\beta}^{(2)}, g_{i\zeta}^{(2)}$  и подобно точкам  $y_{\beta}, \tilde{y}_{\beta}, q_{\beta}, q_{\zeta}$  точки  $y_{i\beta}, \tilde{y}_{i\beta}, q_{i\beta}, q_{i\zeta}$ . Пусть  $g_{i\beta}^{(2)} = g_{\beta}^{(2)}$ ,  $g_{i\zeta}^{(2)} = g_{\zeta}^{(2)}$ ,  $y_{i\beta} = y_{\beta}$ ,  $q_{i\zeta} = q_{\zeta}$ . Положим

$$E_{i\beta} = (g_{i\beta}^{(2)} \setminus g_{i\beta}^{(2)}(q_{i\beta})) \setminus \{\tilde{y}_{i\beta}\},$$

$$\tilde{A}_{i\beta} = \overset{\circ}{A}_{i\beta} \cup (E_{i\beta} \cap \text{Fr } A_{i\beta}), \quad 1 < i < j.$$

2. Пусть  $1 < i < j$  ( $i = j - 1 < \infty$ ). Существует допустимая дискретная схема первого игрока, переводящая систему (1.1) из произвольной начальной позиции  $x_0 \in \tilde{A}_{i\beta}$  за конечное время, ограниченное сверху по реализациям  $v(\cdot)$ , в точку  $m_i$  (на множестве  $\bigcup_{1 \leq k < i} A_{i\beta}$ ).

Доказательство этого утверждения подобно доказательству леммы 5.1. Следует учесть утверждения 5.9, 5.13.

3. Пусть  $g_{i\beta}^{(2)} \cap g_{i\zeta}^{(2)}(q_{i\zeta}) \neq \emptyset$ , где  $1 \leq i < j$ . Пусть в некоторый момент  $t_*$  система (1.1) находится в точке  $x_* \in g_{i\beta}^{(2)} \setminus g_{i\zeta}^{(2)}(q_{i\zeta})$ . Тогда по любым  $v_* \in V$ ,  $\Delta > 0$  можно подобрать положительное  $\delta < \Delta$  и измеримую функцию  $u_*(t)$  со значениями в  $U$ ,  $t \in [t_*, t_* + \delta)$ , так, что движение системы (1.1) в силу управлений  $u_*(t)$ ,  $v(t) \equiv v_*$  либо на всем полуинтервале  $[t_*, t_* + \delta)$  будет идти по кривой  $g_{i\beta}^{(2)}(m_i, x_*)$  к точке  $m_i$ , причем  $|\dot{x}(t)| > \text{const} > 0$  равномерно по  $t, x_*, \Delta, v_*$ , либо в некоторый момент из интервала  $(t_*, t_* + \delta)$  окажется в  $\overset{\circ}{A}_{i\beta}$ .

Доказательство очевидно, если считать, что  $x_* \in \overline{(P(\alpha) \cap H \times (-\alpha)) \setminus J}$ , где  $\alpha = u_{\zeta}^{(2)}(x_*)$ . В противном случае следует использовать схему доказательства утверждения 1 для  $y_{\zeta} \neq \emptyset$ ,  $y_{\zeta} \neq \tilde{y}_{\zeta}$ ,  $u_{\zeta}^{(1)}(y_{\zeta}) \neq u_{\zeta}^{(2)}(y_{\zeta})$ .

4. Пусть в некоторый момент  $t_*$  система (1.1) находится: 1) в точке  $x_*$  излома кривой  $\hat{T}_{\zeta}^{(1)}$ ; 2) в точке  $x_*$  кривой  $\hat{T}_{\zeta}^{(1)}$ , не являющейся точкой излома. Тогда по любым  $v_* \in V$ ,  $\Delta > 0$  можно подобрать такие  $0 < \delta < \Delta$ ,  $u_* \in U$ , что движение системы (1.1) в силу управлений  $u(t) \equiv u_*$ ,  $v(t) \equiv v_*$  в случае 1) на интервале  $(t_*, t_* + \delta)$  будет идти в множестве  $\overset{\circ}{A}_{\zeta}$ , в случае 2) либо на всем полуинтервале  $[t_*, t_* + \delta)$  будет идти по кривой  $\hat{T}_{\zeta}^{(1)}$  в направлении вращения часовой стрелки, причем  $|\dot{x}(t)| > \text{const} > 0$  равномерно

по  $t, x_*, \Delta, v_*$ , либо в некоторый момент из интервала  $(t_*, t_* + \delta)$  окажется в  $\overset{\circ}{A}_{\zeta}$ .

В пояснении нуждается только часть утверждения, относящаяся к случаю 1). По определению кривая  $\hat{T}_{\zeta}^{(1)}$  имеет одну или две точки излома. При первой возможности точка излома лежит на одной из кривых  $[e(\mu)h_2(\mu), [e(-\mu)h_2(-\mu)]$ , при второй одна точка излома находится на кривой  $[e(\mu)h_2(\mu)]$ , вторая — на  $[e(-\mu)h_2(-\mu)]$ . Пусть  $x_* \in [e(\alpha)h_2(\alpha)]$ , где  $\alpha = \mu, -\mu$ . Правило выбора вектора  $u_*$  по  $v_*$  следующее: если  $v_* \in V^{(1)}(x_*, -\alpha)$ , то  $u_* = \alpha$ , если  $v_* \in V^{(1)}(x_*, -\alpha)$ , то  $u_* = -\alpha$ . Число  $\delta < \Delta$  следует взять достаточно малым.

Доказательство леммы 5.4 при  $R_{\beta} \cap L \neq \emptyset$  вытекает из утверждений 1—4 и леммы 5.1.

Если  $R_{\beta} \cap L = \emptyset$ , то схема доказательства леммы 5.4 та же, что при  $R_{\beta} \cap L \neq \emptyset$ . Следует лишь положить  $m_i = \emptyset$ ,  $i > 1$ . Доказательство закончено.

Доказательство леммы 5.5. По определению множеств  $A_{\zeta}, \tilde{A}_{\beta}$

$$A_{\zeta} \setminus \tilde{A}_{\beta} = (A_{\zeta} \setminus A_{\beta}) \cup \{\tilde{y}_{\beta}\} \cup g_{\beta}^{(1)}(a_{\beta}) \cup g_{\beta}^{(2)}(q_{\beta}) \cup T_{\beta}^{(1)} \cup T_{\beta}^{(2)}.$$

С учетом леммы 5.3 достаточно показать, что

$$(A_{\zeta} \setminus A_{\beta}) \cup (\{\tilde{y}_{\beta}\} \setminus \{\tilde{y}_{\zeta}\}) \cup (g_{\beta}^{(2)}(q_{\beta}) \setminus g_{\zeta}^{(2)}(q_{\zeta})) \cup \cup (T_{\beta}^{(1)} \setminus \tilde{T}_{\zeta}^{(1)}) \subset X \setminus A.$$

1\*. Пусть  $\tilde{y}_{\beta} \neq \emptyset$ ,  $\tilde{y}_{\beta} \neq \tilde{y}_{\zeta}$ . Тогда  $\tilde{y}_{\beta} \in \overline{C(-\alpha)} \setminus J$ , где  $\alpha = u_{\zeta}^{(2)}(\tilde{y}_{\beta})$ . Если  $\tilde{y}_{\beta} \in \text{Fr } C(-\alpha)$ , то вектор  $-f^{(2)}(\tilde{y}_{\beta})$  направлен внутрь  $C(-\alpha)$ . Введем функцию

$$v[u] = \begin{cases} v_{\zeta}^{(2)}(\tilde{y}_{\beta}), & \text{если } u \neq \alpha, \\ v^{(1)}(\tilde{y}_{\beta}, -\alpha), & \text{если } u = \alpha, \tilde{y}_{\beta} \in \overline{P(\alpha)}, \\ v(\tilde{y}_{\beta}, \alpha), & \text{если } u = \alpha, \tilde{y}_{\beta} \in P(\alpha). \end{cases}$$

Фиксируем произвольный вектор  $u_* \in U$  и рассмотрим движение  $x_*(t)$  системы  $\dot{x} = Ax + u_* - v[u_*]$  с началом в точке  $x(t_*) = \tilde{y}_{\beta}$ . Если  $u_* = \alpha$ ,  $\tilde{y}_{\beta} \in P(\alpha)$ , то  $x_*(t) \equiv \tilde{y}_{\beta}$ . Пусть условие  $u_* = \alpha$ ,  $\tilde{y}_{\beta} \in P(\alpha)$  нарушено. Если  $f(\tilde{y}_{\beta}, u_*, v[u_*])$  лежит вне замкнутого остроугольного сектора  $K(\tilde{y}_{\beta})$ , образованного направлениями векторов  $f^{(1)}(\tilde{y}_{\beta}), f^{(2)}(\tilde{y}_{\beta})$ , то очевидно, что на некотором достаточно малом интервале  $(t_*, t_* + \Delta)$ ,  $\Delta > 0$ , движение  $x_*(t)$  проходит вне множества  $A_{\beta}$ . Покажем, что при  $f(\tilde{y}_{\beta}, u_*, v[u_*]) \in K(\tilde{y}_{\beta})$  имеет место подобное свойство. Действительно, в этом случае  $u_* \neq \alpha$ ,

$\tilde{y}_\beta \in H(-\alpha)$ ,  $v[u_*] = v_\zeta^{(2)}(\tilde{y}_\beta)$ ,  $f(\tilde{y}_\beta, u_*, v[u_*]) = f^{(2)}(\tilde{y}_\beta)$ . Выберем  $r_* > 0$  из условия: при любом  $x \in D = O(\tilde{y}_\beta, r_*) \cap C(-\alpha)$

$$f(x, u_*, v[u_*]) > f^{(2)}(x). \quad (8.3)$$

Поскольку вектор  $A\tilde{y}_\beta + u_* - v[u_*]$  направлен внутрь  $D$ , то на достаточно малом интервале  $(t_*, t_* + \Delta)$ ,  $\Delta > 0$ , движение  $x_*(t)$  будет идти в  $D$  и в силу (8.3) — вне множества  $A_\beta$ .

Если  $\tilde{y}_\beta \in L(-\alpha)$ , то  $A_\beta = A_\zeta$  и значит доказано, с учетом леммы 5.2, что  $\tilde{y}_\beta \in X \setminus A$ . Пусть  $\tilde{y}_\beta \in L(-\alpha)$ . Тогда  $f^{(1)}(\tilde{y}_\beta) = f^{(2)}(\tilde{y}_\beta)$ . Поэтому движение  $x_*(t)$  на достаточно малом интервале  $(t_*, t_* + \Delta)$  проходит не только вне  $A_\beta$ , но и вне  $A_\zeta$ . Следовательно, и в этом случае  $\tilde{y}_\beta \in X \setminus A$ .

2\*. Пусть  $q_\beta \neq q_\zeta$ . Тогда  $q_\beta \in (P(\alpha) \cap H(-\alpha)) \setminus J \subset C(-\alpha) \setminus J$ , где  $\alpha = u_\zeta^{(2)}(q_\beta)$ . Включение  $q_\beta \in X \setminus A$  доказывается совершенно так же, как включение  $\tilde{y}_\beta \in X \setminus A$  в пункте 1\* при  $\tilde{y}_\beta \in P(\alpha)$ . Включение  $g_\beta^{(2)}(q_\beta) \setminus g_\zeta^{(2)}(q_\zeta) \subset X \setminus A$  следует из  $q_\beta \in X \setminus A$ .

3\*. Пусть  $T_\beta^{(1)} \setminus \hat{T}_\zeta^{(1)} \neq \emptyset$ . Тогда  $T_\beta^{(1)} = \hat{T}_\zeta^{(1)}$ . Если в некоторый момент  $t_*$   $x(t_*) \in \hat{T}_\zeta^{(1)}$ , то по любым  $u_* \in U$  и  $\delta_* > 0$  можно подобрать такие  $v_* \in V$  и  $0 < \Delta_* < \delta_*$ , что движение системы (1.1) в силу  $u \equiv u_*$  и  $v \equiv v_*$  на полуинтервале  $[t_*, t_* + \Delta_*)$  будет идти либо по кривой  $\hat{T}_\zeta^{(1)}$ , либо сойдет в множество, заключенное внутри этой кривой, т.е. в  $X \setminus A_\zeta$ . Отсюда с учетом леммы 5.2  $\hat{T}_\zeta^{(1)} \subset X \setminus A_\zeta$ .

4\*. Пусть  $A_\zeta \setminus A_\beta \neq \emptyset$ . Тогда по любой начальной позиции в  $A_\zeta \setminus A_\beta$  и по любой допустимой дискретной схеме первого игрока можно так подобрать реализацию  $v(\cdot)$ , что система (1.1) не сможет попасть в множество  $A_\beta \setminus \{\tilde{y}_\beta\}$  иначе, как через точку  $\tilde{y}_\beta$ . Отсюда с учетом результата пункта 1\* и леммы 5.3 следует, что  $A_\zeta \setminus A_\beta \subset X \setminus A$ . Доказательство закончено.

## 9. Решение задач 1, 2 в случае $\rho^{(1)} > \rho^{(2)}$ при $\lambda_1 \leq 0$ , $\lambda_2 > 0$ и при $\lambda_1 = 0$ , $\lambda_2 \leq 0$

1\*. Предположим, что  $\lambda_1 \leq 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ . Если  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , то множество  $P(\mu)$  лежит в полосе  $Q$  строго слева от множества  $P(-\mu)$ . Прямая  $k(\alpha)$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ , является опорной к  $P(\alpha)$ , причем  $P(\mu) \leq k(\mu)$ , а  $P(-\mu) \geq k(-\mu)$ . Полупрямая  $k^*(\alpha)$  ( $k_*(\alpha)$ ) расположена на  $k(\alpha)$  справа (слева) от отрезка  $\tilde{k}(\alpha)$  (рис. 9.1).

При  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  вектор  $Ax$  зависит только от  $x_2$ . Поэтому прямая  $k(\alpha)$ ,  $\alpha = \mu, -\mu$ , параллельна полосе  $Q$  и совпадает с одним из множеств  $k(\alpha)$ ,  $k_*(\alpha)$ ,  $k^*(\alpha)$  (каким именно, зависит от конкретного случая). Если  $P(\mu) \neq \emptyset$  ( $P(-\mu) \neq \emptyset$ ), то  $P(\mu) \leq k(\mu)$  ( $P(-\mu) \geq k(-\mu)$ ).

Для определения множеств  $A, B$  необходимо прежде всего построить кривые  $g_\varphi^{(1)}, g_\varphi^{(2)}$ ,  $\varphi = \beta, \zeta$ . Сформулируем несколько простых утверждений, облегчающих такое построение.

9.1. Если  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , то  $Z(\mu) = J(\mu) \cap \{x: x \leq \pi_2(C_*(\mu))\}$ . Если  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  и  $P(\mu) \neq \emptyset$ , то  $Z(\mu) = \emptyset$  при  $k_*(\mu) = \emptyset$  и  $Z(\mu) = Y(\mu)$  при  $k_*(\mu) \neq \emptyset$ .

9.2. Если  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  и прямая  $k(\mu) = k_*(\mu)$  лежит в полосе  $Q$ , то  $P(\mu) \neq \emptyset$ .

9.3. Пусть  $m \geq k(-\mu)$  ( $m \geq k(\mu)$ ). Тогда  $\omega^{(1)}(m) \subset H(-\mu)$  ( $\omega^{(2)}(m) \subset H(-\mu)$ ).

9.4. Пусть  $m \in k(-\mu)$  ( $m \in k(\mu)$ ). Тогда  $\omega^{(1)}(m) \cap \hat{k}^*(-\mu) = \emptyset$  ( $\omega^{(2)}(m) \cap k^*(\mu) = \emptyset$ ). Если  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  и  $v^{(2)} > 1$ , то точка  $q_2$  не может лежать на прямой  $H(-\mu)$  справа от точки  $k(\mu) \cap H(-\mu)$ .

9.5. Пусть  $v^{(2)} > 1$  и  $q_2 < k(-\mu)$ . Тогда  $\omega^{(2)}(q_2) \cap \hat{k}_*(-\mu) = \emptyset$ .

9.6. Пусть  $v^{(1)} > 1$ . Тогда  $b_2 \leq k(\mu)$ , кривая  $\omega^{(1)}(b_2)$  выходит в полуплоскость  $X(\mu)$  и не возвращается на прямую  $H(\mu)$ . Если  $b_2 < k(\mu)$ , то  $\omega^{(1)}(b_2) \cap k(\mu) = \emptyset$ .

9.7. Пусть  $v^{(2)} > 1$ . Если кривая  $\omega^{(2)}(q_2)$  выходит в полуплоскость  $X(\mu)$ , то она не возвращается на прямую  $H(\mu)$ .

9.8.  $v^{(i)} \leq 2$ ,  $i = 1, 2$ .

9.9. Множество  $R_\beta \cap L(\mu)$  либо пусто, либо состоит из одной точки, множество  $R_\beta \cap L(-\mu)$  пусто.

Введем вспомогательные множества  $A_\varphi$ ,  $\varphi = \beta, \zeta$ .

Если  $R_\varphi \neq \emptyset$ , положим  $A_\varphi = N_\varphi$ . Если  $R_\varphi = \emptyset$ , то за  $A_\varphi$  примем наименьшее замкнутое множество, содержащее все точки  $x$ , каждую из которых можно соединить простой кривой с точкой  $m$  так, чтобы: 1) на кривой имелась дуга, лежащая внутри криволинейного треугольника  $\omega$ , 2) кривая не переходила путем пересечения  $g_\varphi^{(1)}(g_\varphi^{(2)})$  с отрицательной стороны кривой  $g_\varphi^{(1)}(g_\varphi^{(2)})$  на ее положительную сторону, 3) кривая не переходила из полуплоскости  $X \setminus \overline{K}(\mu)$  ( $X \setminus \overline{K}(-\mu)$ ) на прямую  $k(\mu)$  ( $k(-\mu)$ ).

Пусть  $m^* \neq \emptyset$ . Определим  $\Phi_\zeta$  как замкнутое множество, ограниченное кривой, составленной из дуг  $g_\zeta^{(1)}(m, m^*)$ ,  $g_\zeta^{(2)}(m, m^*)$ . Если  $m^* = \emptyset$ , примем  $\Phi_\zeta = A_\zeta$ .

Положим

$$\hat{E}_\varphi = \begin{cases} E_\varphi \cap K(-\mu), & \text{если } m < k(-\mu), \\ E_\varphi, & \text{если } m \geq k(-\mu); \quad \varphi = \beta, \zeta. \end{cases}$$

$$\tilde{A}_\beta = \hat{A}_\beta \cup (\hat{E}_\beta \cap \text{Fr } A_\beta),$$

$$\tilde{A}_\zeta = \hat{\Phi}_\zeta \cup (\hat{E}_\zeta \cap \text{Fr } \Phi_\zeta).$$

Решение задач 1, 2 при  $\lambda_1 \leq 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  следующее:  $A = \tilde{A}_\beta$ ,  $B = X \setminus \tilde{A}_\zeta$ . Доказательство этого факта проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 5.1. На рис. 9.2—9.4 даны

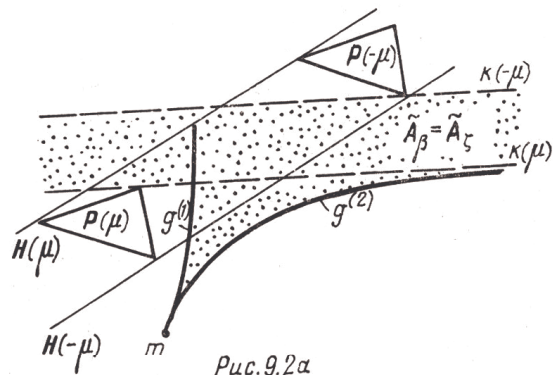


Рис. 9.2а

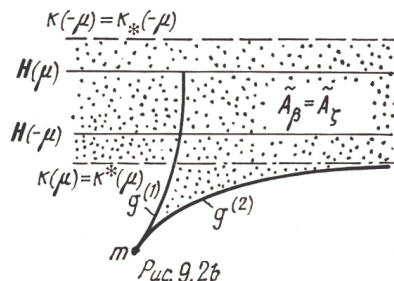


Рис. 9.2б

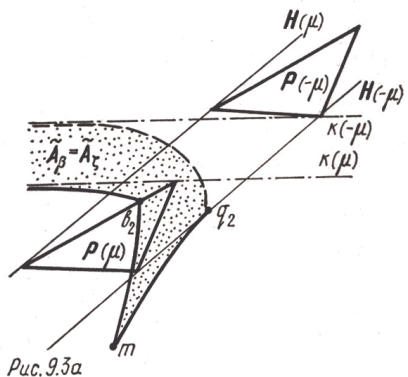


Рис. 9.3а

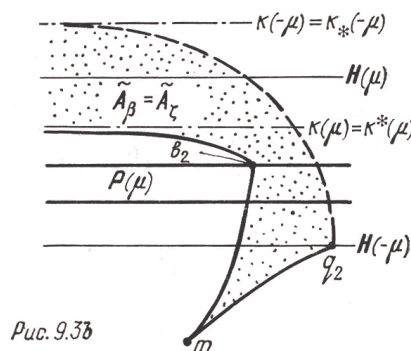


Рис. 9.3б

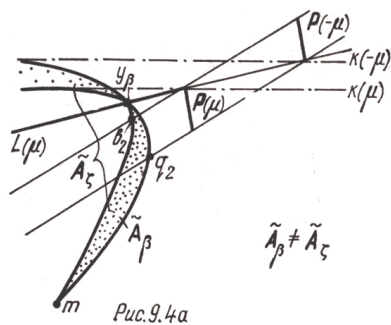


Рис. 9.4а

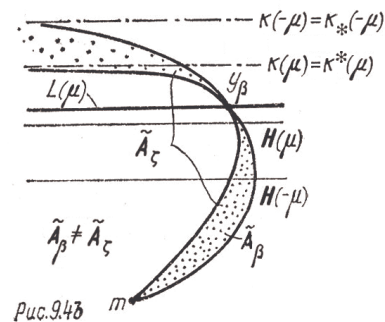


Рис. 9.4б

примеры множеств  $\tilde{A}_\beta, \tilde{A}_\zeta$ . Кривые, лежащие на  $\text{Fr } \tilde{A}_\beta$  ( $\text{Fr } \tilde{A}_\zeta$ ), но не входящие в  $\tilde{A}_\beta$  ( $\tilde{A}_\zeta$ ), отмечены пунктиром. Рисунки с индексом «а» соответствуют  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ , с индексом «б» —  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \leq 0$ .

На рис. 9.2б  $k(-\mu) = k_*(-\mu), k(\mu) = k^*(\mu)$ , на рис. 9.3б, 9.4б  $k(-\mu) = k_*(-\mu), k(\mu) = k^*(\mu)$ .

2\*. Предположим, что  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \leq 0$ . Сформулируем утверждения, облегчающие построение кривых  $g_\varphi^{(1)}, g_\varphi^{(2)}$ ,  $\varphi = \beta, \zeta$ .

9.10. Пусть  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$  и  $P(\mu) \neq \emptyset$ . Если при любом  $v \in V$   $(v - \mu)_2 \leq 0$ , то  $Z(\mu) = \emptyset$ . В противном случае  $Z(\mu) = Y(\mu)$ .

9.11. Пусть  $v^{(1)} > 1$  ( $v^{(2)} > 1$ ). Тогда кривая  $w^{(1)}(b_2)$  ( $w^{(2)}(q_2)$ ) выходит в полуплоскость  $X(\mu)$  и не возвращается на прямую  $H(\mu)$ .

9.12.  $v^{(i)} \leq 2, i = 1, 2$ .

9.13. Множество  $R_\beta \cap L(\mu)$  либо пусто, либо состоит из одной точки, множество  $R_\beta \cap L(-\mu)$  пусто.

Определим множества  $A_\beta, A_\zeta$  так же, как и в пункте 1\*, но с тем отличием, что при  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$  условие 3) опустим, а при  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$  заменим условием: если  $Y(\mu) \neq \emptyset$ , то кривая, соединяющая  $x$  с  $m$ , не должна переходить на прямую  $Y(\mu)$  из полуплоскости, лежащей ниже этой прямой. Так же, как и в пункте 1\*, определим множество  $\Phi_\zeta$ . Положим

$$\tilde{A}_\beta = A_\beta \cup (E_\beta \cap \text{Fr } A_\beta),$$

$$\tilde{A}_\zeta = \Phi_\zeta \cup (E_\zeta \cap \text{Fr } \Phi_\zeta).$$

Решение задач 1, 2 при  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \leq 0$  следующее:  $A = \tilde{A}_\beta, B = X \setminus \tilde{A}_\zeta$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Болтянский. Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1969.
2. В. С. Пацко. Условия уклонения в линейной дифференциальной игре второго порядка. Прикладная матем. и механ. 1972, 36, 3.
3. Н. Н. Красовский. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
4. Л. С. Понтрягин. О линейных дифференциальных играх. I. Докл. АН СССР, 1967, 174, 6.
5. Л. С. Понтрягин. Линейная дифференциальная игра убегания. Труды мат. ин-та им. Стеклова. 1971, 112.
6. В. С. Пацко. Условия уклонения от точки в дифференциальной игре второго порядка. Прикладная матем. и механ. 1972, 36, 6.
7. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., «Наука», 1966.