РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 67, Вып. 3, 2003

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Л.В.Камнева

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛЬНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ В ТЕРМИНАХ СИНГУЛЯРНЫХ ТОЧЕК

МОСКВА

УДК 62–50

© 2003 г. Л. В. Камнева

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛЬНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ В ТЕРМИНАХ СИНГУЛЯРНЫХ ТОЧЕК

Рассматриваются дифференциальные игры, в которых платой является время достижения заданного терминального множества (игры быстродействия). В областях гладкости функция цены игры необходимо является классическим решением уравнения Беллмана–Айзекса. В сингулярных точках, где смыкаются гладкие ветви решения, должны быть выполнены более сложные условия в терминах производных по направлению. Найден класс игр и описаны два типа особенностей, таких, что упомянутые условия автоматически следуют из геометрических свойств особенностей. Это класс игр с автономной разделенной динамикой и множеством управления одного из игроков в виде линейного отрезка. Доказывается соответствующая теорема. Результат применяется для построения функции цены игры, имеющей три типа особых поверхностей – рассеивающую, экивокальную и поверхность переключения.

Для дифференциальных игр быстродействия известны [1, 2] достаточные условия на произвольную функцию, при выполнении которых она будет функцией цены рассматриваемой дифференциальной игры. Если функция цены игры является гладкой, то задача ее поиска сводится к решению задачи Коши для соответствующего уравнения в частных производных первого порядка (уравнения Беллмана–Айзекса) [3]. При некоторых дополнительных условиях для построения решения задачи Коши используется метод классических характеристик [4]. Однако функция цены является гладкой в исключительно редких случаях. Тем не менее, возможно применение метода характеристик при построении кусочно-гладкой функции цены. Метод построения, предложенный Айзексом [3], заключается в последовательном нахождении гладких ветвей решения методом классических характеристик.

Основная трудность применения метода Айзекса состоит в обнаружении поверхностей стыковки (сингулярных поверхностей) гладких ветвей решения. Были рассмотрены [3] различные типы сингулярных поверхностей и некоторые способы их построения, но в целом отсутствует строгое обоснование того факта, что полученная кусочно-гладкая функция будет функцией цены дифференциальной игры. С современной точки зрения, для этого на сингулярных поверхностях конструируемой функции следует проверить условия стабильности [2, 5].

Результатом данной работы является определение некоторых типов сингулярных точек и доказательство выполнения в них условий стабильности. В качестве примера применения этого результата строится функция цены в игровой задаче о брахистохроне.

1. Игровая задача быстродействия, функция цены, условия стабильности. Пусть движение управляемой системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \upsilon(t)), \quad t \geq 0 \tag{1.1}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – фазовое состояние системы в момент времени t, $u(t) \in P$ и $\upsilon(t) \in Q$ – управления первого и второго игроков, $P \subset R^m$ и $Q \subset R^l$ – компактные множества.

Предположим, что функция $f(x, u, v)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x, u, v) - f(y, u, v)\| \le L\|x - y\|, \quad x, y \in R^n, \quad u \in P, \quad v \in Q$$

где L – постоянное число. Кроме того, пусть выполнено условие Айзекса (условие седловой точки в маленькой игре [1])

$$H(x, p) := \min_{u \in P}\max_{v \in Q}\langle p, f(x, u, v)\rangle = \max_{v \in Q}\min_{u \in P}\langle p, f(x, u, v)\rangle, \quad x, p \in R^n \tag{1.2}$$

Позиционными стратегиями [1] первого и второго игроков назовем произвольные функции U: $R^n \to P$ и V: $R^n \to Q$. Стратегии U, V порождают пучки $X_1(x_0, U)$, $X_2(x_0, V)$ конструктивных [1, 6] движений, выходящих из позиции x_0 при $t = 0$.

Конструктивным движением $x(\cdot) \in X_1(x_0, U)$ называется функция $x(t)$, для которой на любом отрезке $[0, \vartheta]$ найдется последовательность ломаных Эйлера $x^{(k)}(t)$, определяемых условиями

$$\dot{x}^{(k)}(t) = f(x^{(k)}(t), U(x^{(k)}(\tau_i^{(k)})), v^{(k)}(t))$$

$$t \in [\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)}), \quad x^{(k)}(0) = x_0, \quad \tau_0^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

равномерно сходящаяся к $x(t)$ и такая, что $\sup_i(\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) \to 0$ при $k \to \infty$. Здесь интервалы $[\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)})$ $(i = 1, 2, \ldots)$ разбивают полуось $t \ge 0$, $v_k(\cdot)$ – измеримая функция со значениями в множестве Q. Аналогично определяются элементы множества $X_2(x_0, V)$.

Цель первого игрока – быстрейшее сближение точки $x(t)$ с заданным замкнутым терминальным множеством $M \subset R^n$. Второй игрок стремится либо исключить встречу с M, либо максимизировать время до встречи. Таким образом, оптимизируемый функционал для игровой задачи быстродействия имеет вид

$$J(x(\cdot)) := \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad x(t) \notin M \quad \text{для любого} \quad t \ge 0 \\ \min\{t \ge 0\colon x(t) \in M\} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Если в точке $x_0 \in R^n$ выполнено равенство

$$\inf_U \sup J(X_1(x_0, U)) = \sup_V \inf J(X_2(x_0, V)) =: T^0(x_0) \tag{1.3}$$

то значение $T^0(x_0) \in [0, \infty]$ называется *ценой игры* в точке x_0. При указанных условиях на функцию $f(x, u, v)$ для любого $x \in R^n$ существует [1, 5] цена игры. Функция T^0: $R^n \to [0, \infty]$ называется функцией цены игры.

С функцией цены тесно связаны понятия u- и v-стабильных функций [1, 2]. Рассмотрим непрерывную функцию T: $R^n \to R$, такую, что $M = \{x \in R^n : T(x) = 0\}$ и для любого $x \in R^n$ существует предел

$$\partial_\eta T(x) = \lim_{\delta \to +0} \frac{T(x + \delta\eta) - T(x)}{\delta}$$

Функция $T(x)$ называется *u-стабильной* (*v-стабильной*), если для любого $x \in R^n \backslash M$ выполнено условие

$$\begin{gathered} \sup_{v \in Q} \inf\{\partial_\eta T(x) : \eta \in \operatorname{co} f(x, P, v)\} \le -1 \\ (\inf_{u \in P} \sup\{\partial_\eta T(x) : \eta \in \operatorname{co} f(x, u, Q)\} \ge -1) \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь

$$f(x, P, v) := \{f(x, u, v) : u \in P\}, \quad f(x, u, Q) := \{f(x, u, v) : v \in Q\}$$

co $\{f\}$ – выпуклая оболочка векторов $\{f\}$.

Условия (1.4) представляют собой условия стабильности функции $T(x)$ в точке $x \in R^n \backslash M$. В области дифференцируемости функции $T(x)$ неравенства (1.4) обращаются в уравнение Беллмана–Айзекса [3]

$$H(x, DT(x)) = -1 \tag{1.5}$$

Выполнение неравенств (1.4) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $T(x)$ была функцией цены дифференциальной игры быстродействия [2].

Если отсутствует хорошее описание функции $T(x)$, то непосредственная проверка условий (1.4) затруднительна. Однако оказывается, что в ряде случае выполнение условий стабильности в точке полностью зависит от структуры функции $T(x)$ в окрестности этой точки. Определим некоторые типы таких точек и докажем выполнение в них условий стабильности.

2. Простейшие сингулярные точки. Пусть функция $T(x)$ задана и непрерывна в области $\Omega \subset R^n$. Введем ряд определений, перенося на случай функции $T(x)$ понятия, приведенные ранее [7] для функции цены игры.

Определение 1. Область $G \subset \Omega$ называется *регулярной* областью функции $T(x)$, если

1) $T \in C^2(G)$ и $H(x, DT(x)) = -1$, $x \in G$;

2) $H \in C^2(G \times Y)$, где Y – некоторая окрестность множества $\{DT(x): x \in G\}$.

Если точка x^* принадлежит регулярной области, то в некоторой окрестности произвольно выбранного момента времени t^* существует и единственно решение $(x(t), p(t))$ характеристической системы

$$\dot{x} = H_p(x, p), \quad \dot{p} = -H_x(x, p) \tag{2.1}$$

уравнения (1.5), удовлетворяющее условиям

$$x(t^*) = x^*, \quad p(t^*) = DT(x^*)$$

и такое, что $p(t) = DT(x(t))$ [4]. Из последнего равенства следует, что через любую точку регулярной области проходит единственное решение $x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = H_p(x, DT(x))$$

называемое характеристикой уравнения Беллмана–Айзекса (1.5). Таким образом, в любой регулярной области определено поле характеристик.

Условие Айзекса (1.2) обеспечивает существование функций $U_T(x)$ и $V_T(x)$ таких, что

$$H(x, DT(x)) = \langle DT(x), f(x, U_T(x), V_T(x))\rangle$$

В регулярной области G имеем

$$H_p(x, DT(x)) = f(x, U_T(x), V_T(x))$$

и функция $x \to H_p(x, DT(x))$ принадлежит классу $C^1(G)$. Следовательно, позиционные стратегии $U_T(x)$, $V_T(x)$, определенные в области G, порождают движения, идущие вдоль характеристик. Функции $U_T(x)$ и $V_T(x)$ ограничены и, значит, имеют конечные частичные пределы для любого $x \in \partial G$.

Определение 2. Точка $x \in \Omega$, для которой существует регулярная область $G \subset \Omega$, содержащая x, называется *регулярной* точкой, иначе точка называется *сингулярной*.

Поверхности, состоящие из сингулярных точек, будем называть сингулярными поверхностями.

Определение 3. Сингулярную точку $x^* \in \Omega$ назовем *простейшей*, если

1) существует окрестность $G \subset \Omega$ точки x^*, такая, что $G = G^+ \cup \Gamma \cup G^-$, где Γ – гладкая гиперповерхность, $G^\pm$ – регулярные области;

2) функция $DT(x)$, $x \in G^\pm$, имеет непрерывное продолжение на гиперповерхность Γ.

Пусть $\Sigma(T)$ – множество простейших сингулярных точек функции $T(x)$. Для точки $x^* \in \Sigma(T)$ будем использовать следующие обозначения: $G^\pm$ – регулярные области (из определения простейшей сингулярной точки), разделенные гиперповерхностью Γ; $T^\pm(x)$ – сужения функции $T(x)$ на области $G^\pm$; $U_T^\pm(x)$, $V_T^\pm(x)$ – позиционные стратегии игроков, порождающие движения вдоль характеристик в областях $G^\pm$. Кроме того, пусть

$$p^\pm := \lim DT^\pm(x), \quad u^\pm := \lim U_T^\pm(x), \quad \upsilon^\pm := \lim V_T^\pm(x)$$

при $x \to x^*$, $x \in G^\pm$ и

$$f^\pm := f(x^*, u^\pm, \upsilon^\pm)$$

Символы $\lim U_T^\pm(x)$, $\lim V_T^\pm(x)$ обозначают произвольные частичные пределы функций $U_T^\pm(x)$, $V_T^\pm(x)$ при $x \to x^*$, $x \in G^\pm$.

В силу непрерывности функции $H(x, p)$ имеем

$$\langle p^\pm, f^\pm \rangle = H(x^*, p^\pm) = -1$$

Отметим некоторые свойства простейших сингулярных точек.

Если $p^+ = p^-$, то функция $T(x)$ дифференцируема в точке x^* (но не обязательно в окрестности этой точки), причем $H(x^*, DT(x^*)) = -1$.

В случае $p^+ \neq p^-$ функции $T^\pm(x)$, определенные на $G^\pm$, непрерывно продолжимы [7] на всю область G так, что $T^\pm \in C^1(G)$. При этом гиперповерхность Γ, разделяющая области $G^\pm$, представима в виде

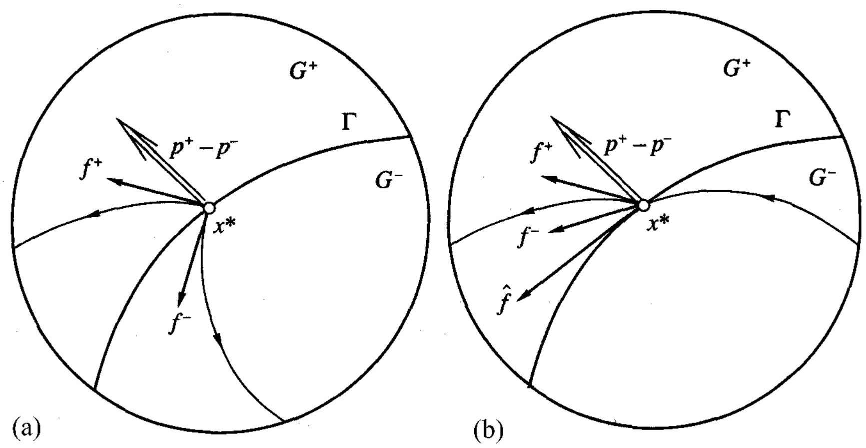
$$\Gamma = \{x \in G: T^+(x) = T^-(x)\}$$

Поскольку гиперповерхность Γ можно рассматривать как поверхность уровня функции $T^+(x) - T^-(x)$, то вектор $p^+ - p^-$ ортогонален Γ в точке x^*. Кроме того, в области G верно представление

$$T(x) = \max\{T^+(x), T^-(x)\} \quad (\min\{T^+(x), T^-(x)\})$$

если вектор $p^+ - p^-$ направлен из G^- в G^+ (из G^+ в G^-). Следовательно, для любого вектора $\eta \in R^n$ существует производная $\partial_\eta T(x^*)$ по направлению η, причем $\partial_\eta T(x^*) = \max\langle p^\pm, \eta \rangle$ $(\min\langle p^\pm, \eta \rangle)$, если вектор $p^+ - p^-$ направлен из G^- в G^+ (из G^+ в G^-).

3. Рассеивающие и экивокальные сингулярные точки. В теории дифференциальных игр для функции цены $T^0(x)$ известны [3, 7] различные типы сингулярных поверхностей (СП), в точках которых оптимальные движения имеют те или иные особенности. Классификация основана на анализе поведения оптимальных траекторий в окрестности СП и учете возможности особых оптимальных движений, идущих вдоль самой СП.



Фиг. 1

Распространим понятия рассеивающей и эквивокальной [3, 7] СП на случай функции $T(x)$. Для этого сначала определим соответствующие типы простейших сингулярных точек и поясним геометрический смысл данных определений.

Определение 4. Точка $x^* \in \Sigma(T)$ называется *рассеивающей* (РТ), если

$$p^+ \neq p^-, \quad \langle f^+, p^+ - p^- \rangle > 0, \quad \langle f^-, p^+ - p^- \rangle < 0$$

Простейшая сингулярная точка x^* будет РТ, если характеристики из смежных регулярных областей G^+ и G^- покидают ее под ненулевым углом к разделяющей гиперповерхности Г (фиг. 1, *а*).

Определение 5. Точка $x^* \in \Sigma(T)$ называется *эквивокальной* (ЭТ) (относительно второго игрока), если

$$p^+ \neq p^-, \quad \langle f^+, p^+ - p^- \rangle > 0, \quad \langle f^-, p^+ - p^- \rangle \geq 0$$

и, кроме того, существует вектор управления $\hat{u}(x^*) \in P$, такой, что

$$\langle p^+, \hat{f} \rangle = \langle p^-, \hat{f} \rangle = -1$$

Здесь $\hat{f} := f(x^*, \hat{u}(x^*), \upsilon^-)$ $(f(x^*, \hat{u}(x^*), \upsilon^+))$, когда вектор $p^+ - p^-$ направлен из G^- в G^+ (из G^+ в G^-).

В ЭТ приходит характеристика из регулярной области G^-, и покидает (под ненулевым углом к Г) характеристика, определенная в регулярной области G^+; кроме того, существует управление первого игрока, обеспечивающее равную -1 скорость движения вдоль поверхности Г в случае, когда второй игрок использует предельное управление, соответствующее области G^- (фиг. 1, *б*).

Назовем гладкую гиперповерхность рассеивающей или эквивокальной, если она образована соответственно РТ и ЭТ.

4. Достаточные условия стабильности. Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть $f(x, u, \upsilon) = \varphi(x, u) + \psi(x, \upsilon)$ и множество $\psi(x, Q) := \{\psi(x, \upsilon) : \upsilon \in Q\}$ – линейный отрезок в R^n. Если точка $x^* \in \Sigma(T)$ – РТ или ЭТ, причем $\psi(x^*, \upsilon^+) \neq \psi(x^*, \upsilon^-)$, то в ней выполнены условия стабильности (1.4).

Доказательство. Рассмотрим точку $x^* \in \Sigma(T)$ и предположим, что вектор $p^+ - p^-$ направлен из G^- в G^+.

Учитывая выражение для производной по направлению в простейшей сингулярной точке и разделенную динамику системы (1.1), перепишем условия стабильности (1.4) в точке x^* в следующем виде:

1) для любого вектора $v \in Q$ существует вектор $\varphi_v \in \mathrm{co}\,\varphi(x^*, P)$, такой, что $\langle p^\pm, \varphi_v + \psi(x^*, v)\rangle \le -1$ (u-стабильность);

2) для любого вектора $u \in P$ существует вектор $\psi_u \in \psi(x^*, Q)$, такой, что

$$\max\{\langle p^+, \varphi(x^*, u) + \psi_u\rangle, \langle p^-, \varphi(x^*, u) + \psi_u\rangle\} \ge -1$$

(v-стабильность).

Пусть

$$\mathbf{Q}(x, p) := \operatorname*{argmax}_{v \in Q} \langle p, \psi(x, v)\rangle$$

Так как $\psi(x, Q)$ – отрезок в R^n, то множество $\psi(x, \mathbf{Q}(x, p))$ либо одноэлементно и содержит один из концов отрезка $\psi(x, Q)$, либо совпадает со всем отрезком $\psi(x, Q)$. По определению имеем $V_T^\pm(x) \in \mathbf{Q}(x, DT(x))$. Поскольку $G^\pm$ – регулярные области, то $\psi(x, V_T^\pm(x)) \in C^1(G^\pm)$. Следовательно, $\psi(x, V_T^\pm(x))$ – один из концов отрезка $\psi(x, Q)$ для любого $x \in G^\pm$.

Введем обозначения

$$\varphi^\pm := \varphi(x^*, u^\pm), \quad \psi^\pm := \psi(x^*, v^\pm)$$

Из определения векторов $v^\pm$ и условия $\psi^+ \ne \psi^-$ получаем, что $\psi^\pm$ – различные концы отрезка $\psi(x^*, Q)$. Таким образом, можно записать представление

$$\psi(x^*, Q) = \{\lambda\psi^+ + (1-\lambda)\psi^- : \lambda \in [0, 1]\}$$

Докажем выполнение условия 1 в точке x^*.

Для произвольного $v \in Q$ найдем число $\lambda_v \in [0, 1]$, такое, что

$$\psi(x^*, v) = \lambda_v\psi^+ + (1-\lambda_v)\psi^-$$

Пусть x^* – РТ. Положим

$$\varphi_v := \lambda_v\varphi^+ + (1-\lambda_v)\varphi^-$$

Поскольку $\varphi^\pm \in \varphi(x^*, P)$, то $\varphi_v \in \mathrm{co}\,\varphi(x^*, P)$. Имеем

$$\langle p^\pm, \varphi_v + \psi(x^*, v)\rangle = \lambda_v\langle p^\pm, \varphi^+ + \psi^+\rangle + (1-\lambda_v)\langle p^\pm, \varphi^- + \psi^-\rangle \tag{4.1}$$

По определению РТ

$$\langle f^+, p^+ - p^-\rangle > 0, \quad \langle f^-, p^+ - p^-\rangle < 0$$

Следовательно,

$$\langle p^-, f^+\rangle < \langle p^+, f^+\rangle = -1, \quad \langle p^+, f^-\rangle < \langle p^-, f^-\rangle = -1 \tag{4.2}$$

Так как $f^\pm = \varphi^\pm + \psi^\pm$, то из (4.1) и (4.2) получаем

$$\langle p^\pm, \varphi_v + \psi(x^*, v)\rangle \le -1 \tag{4.3}$$

Для РТ u-стабильность доказана.

2*

Пусть x^* – ЭТ. Положим

$$\varphi_\upsilon := \lambda_\upsilon\varphi^+ + (1-\lambda_\upsilon)\hat{\varphi}, \quad \hat{\varphi} := \varphi(x^*, \hat{u}(x^*))$$

Здесь $\hat{u}(x^*)$ – особое управление первого игрока из определения ЭТ. Так как φ^+, $\hat{\varphi} \in (x^*, P)$, то $\varphi_\upsilon \in \mathrm{co}\varphi(x^*, P)$. Кроме того, верно равенство, аналогичное (4.1) при замене φ^- на $\hat{\varphi}$.

По определению ЭТ

$$\langle f^+, p^+ - p^-\rangle > 0, \quad \langle p^-, \hat{f}\rangle = \langle p^+, \hat{f}\rangle = -1$$

Имеем

$$\langle p^-, f^+\rangle < \langle p^+, f^+\rangle = -1, \quad f^+ = \varphi^+ + \psi^+, \quad \hat{f} = \hat{\varphi} + \psi^-$$

Следовательно, верно неравенство (4.3). Для ЭТ u-стабильность доказана.

Выполнение условия 2 в точке x^* следует из неравенства

$$\langle p^\pm, \varphi(x^*, u) + \psi^\pm\rangle \geq \langle p^\pm, \varphi^\pm + \psi^\pm\rangle = -1$$

если положить

$$\psi_u := \psi^\pm$$

Заметим, что предположение о направлении вектора $p^+ - p^-$ из G^- в G^+ обеспечивает выполнение условия υ-стабильности для РТ и ЭТ без тех ограничений на динамику системы (1.1), которые указаны в условии теоремы. Аналогично, если вектор $p^+ - p^-$ направлен из G^+ в G^-, то условия теоремы не используются при доказательстве u-стабильности в РТ и ЭТ.

Приведенная теорема позволяет в ряде случаев обоснованно применить методику Айзекса [3] для поиска функции цены игры с помощью полей характеристик и сконструированных сингулярных поверхностей.

5. Игровая задача о брахистохроне. В качестве примера применим теорему к игровой задаче о брахистохроне, в которой возникают сингулярные линии указанных типов.

Игровая задача о брахистохроне рассматривалась Айзексом [3], его решение было уточнено и дополнено [8]. Исследуемая в данной работе игровая задача отличается от задачи в постановке Айзекса видом терминального множества и вектограммой $\psi(x, Q)$ второго игрока.

Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальную игру быстродействия

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \sqrt{x_2}\cos u, \quad \dot{x}_2 = \sqrt{x_2}\sin u + w\upsilon \\ &u \in P = [0, 2\pi], \quad \upsilon \in Q = [-1, 1], \quad t \geq 0, \quad x_0 \in R_+^2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

где R_+^2 – верхняя полуплоскость.

Первый (второй) игрок минимизирует (максимизирует) время достижения терминального множества $M = [-d, 0] \times [0, h]$. Здесь $d, h > 0$. От величины $w > 0$ зависят возможности второго игрока. Если $w = 0$, получаем динамику классической задачи о брахистохроне [9].

Сначала, используя методику Айзекса, определим функцию T: $R_+^2 \to [0, \infty]$. Затем, применяя теорему о достаточных условиях стабильности, покажем, что функция $T(x)$ будет функцией цены в игровой задаче о брахистохроне.

Так как правая часть системы (5.1) не зависит от x_1, игра симметрична относительно вертикальной прямой $x_1 = -d/2$. Далее все построения будем проводить для полуплоскости $x_1 \geq -d/2$.

Результаты расчетов иллюстрируются для разных значений h при $w = 2$.

Уравнение Беллмана–Айзекса. Любая функция в регулярной области полностью определяется как решение некоторой краевой задачи для уравнения Беллмана–Айзекса (1.5). Это решение может быть найдено методом классических характеристик. Поэтому первым этапом конструирования функции $T(x)$ будет интегрирование характеристической системы (2.1).

Выпишем уравнение (1.5) для рассматриваемой игровой задачи о брахистохроне. Имеем

$$H(x, p) = \min_{u \in [0, 2\pi]} \max_{v \in [-1, 1]} [p_1\sqrt{x_2}\cos u + p_2(\sqrt{x_2}\sin u + wv)] \tag{5.2}$$

Экстремальные управления u^0 и v^0, доставляющие минимум и максимум в (5.2), определяются формулами

$$\cos u^0 = -p_1/\|p\|, \quad \sin u^0 = -p_2/\|p\|, \quad \|p\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

$$v^0 \in \mathbf{Q}(x, p) = \begin{cases} \operatorname{sign} p_2, & \text{если} \quad p_2 \neq 0 \\ [-1, 1], & \text{если} \quad p_2 = 0 \end{cases}$$

Следовательно, $H(x, p) = -\sqrt{x_2}\|p\| + w|p_2|$, и уравнение (1.5) для функции $T(x)$ принимает вид

$$-\sqrt{x_2}\|DT\| + w|\partial T/\partial x_2| = -1 \tag{5.3}$$

Здесь $DT = (\partial T/\partial x_1, \partial T/\partial x_2)$ – вектор частных производных функции $T(x)$.

Характеристическая система. При условиях $p_2 \neq 0$, $x_2 > 0$ запишем характеристическую систему для уравнения (5.3) в обратном времени

$$x_1' = \sqrt{x_2}\frac{p_1}{\|p\|}, \quad p_1' = 0, \quad x_2' = \sqrt{x_2}\frac{p_2}{\|p\|} - w\mu_2, \quad p_2' = -\frac{\|p\|}{2\sqrt{x_2}} \tag{5.4}$$

Здесь

$$z' = dz/d\tau, \quad \tau = \text{const} - t, \quad \mu_2 = \operatorname{sign} p_2$$

Пусть начальные условия для характеристической системы даны в виде

$$x(0, s) = \xi(s), \quad p(0, s) = \zeta(s), \quad s \in S \tag{5.5}$$

где функция $\xi(s)$ параметрически задает гладкую кривую

$$\Gamma = \{x = \xi(s) : s \in S\}$$

Фазовая кривая $x(\tau, s)$ (при фиксированном значении s) является характеристикой. При изменении параметра s получаем семейство характеристик, выходящих из точек кривой Γ.

Проинтегрируем систему (5.4). Так как $p_1' = 0$, то в дальнейшем символом p_1 будем обозначать постоянную, определяемую из начальных условий системы (5.4).

Рассмотрим два случая. Пусть сначала $p_1 = 0$. Первое и третье уравнения системы (5.4) принимают вид

$$x_1' = 0, \quad x_2' = (\sqrt{x_2} - w)\mu_2.$$

Они дают первые интегралы

$$x_1 = C_1, \quad \mu_2\tau - 2(\sqrt{x_2} + w\ln(\sqrt{x_2} - w)) = C_2 \tag{5.6}$$

Уравнение (5.3) представляет собой еще один первый интеграл

$$(w - \sqrt{x_2})\mu_2 p_2 = -1$$

В этом случае характеристики являются вертикальными прямыми. Учитывая начальные условия (5.5), уравнения (5.6) можно переписать в виде

$$x_1 = \xi_1(s), \quad \mu_2\tau = 2(\sqrt{x_2} + w\ln(\sqrt{x_2} - w)) + C_2(s)$$

Функция $C_2(s)$ определяется путем подстановки в левую часть второго из уравнений (5.6) начальных условий (5.5). Если функция $\xi_1(s)$ обратима, то второе уравнение явно задает функцию $\tau = T(x)$ в области, покрываемой вертикальными характеристиками.

Пусть теперь $p_1 \neq 0$. Уравнение (5.3) представляет собой первый интеграл

$$-\sqrt{x_2}\|p\| + w|p_2| + 1 = 0$$

характеристической системы и задает зависимость между значениями x_2 и p_2. Используя эту зависимость, разбиваем уравнения (5.4) на систему

$$x_1' = \frac{x_2 p_1(w^2 - x_2)}{-x_2 + \sigma w R(x_2, p_1)}, \quad x_2' = \frac{\mu_2 \sigma R(x_2, p_1)(x_2 - w^2)}{-x_2 + \sigma w R(x_2, p_1)} \tag{5.7}$$

где

$$\sigma := \operatorname{sign}(w p_1^2 - |p_2|), \quad R(x_2, p_1) := \sqrt{x_2(1 + p_1^2(w^2 - x_2))}$$

и уравнение

$$p_2' = -\|p\|^2/(2w|p_2| + 2) \tag{5.8}$$

В областях постоянства значения σ находим первый интеграл системы (5.7)

$$x_1 + \mu_1\mu_2\sigma[\lambda(p_1)\arcsin\sqrt{x_2/\lambda(p_1)} - \sqrt{x_2(\lambda(p_1) - x_2)}] = D_1$$

а значит, и системы (5.4). Здесь

$$\mu_i := \operatorname{sign} p_i, \quad i = 1, 2, \quad \lambda(p_1) := w^2 + 1/p_1^2$$

D_1 – постоянная.

Интегрирование уравнения (5.8) определяет еще один первый интеграл системы (5.4)

$$\tau + w\mu_2 \ln\|p\|^2 + p_1^{-1}\operatorname{arctg}(p_2/p_1) = D_2$$

где D_2 – постоянная.

Начальные условия (5.5) задают значения постоянных D_1 и D_2 в зависимости от значения $s \in S$, что позволяет записать систему уравнений

$$\begin{gathered} -\sqrt{x_2}\|p\| + w\mu_2 p_2 + 1 = 0 \\ x_1 + \mu_1\mu_2\sigma[\lambda(p_1)\arcsin\sqrt{x_2/\lambda(p_1)} - \sqrt{x_2(\lambda(p_1) - x_2)}] = D_1(s) \\ \tau + w\mu_2\ln\|p\|^2 + p_1^{-1}\operatorname{arctg}(p_2/p_1) = D_2(s) \\ p_1 = \zeta_1(s) \end{gathered} \tag{5.9}$$

которая представляет собой алгебраическую систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных p_1, p_2, s и τ. Она неявно определяет функцию $\tau = T(x)$ в области, покрываемой характеристиками.

Характеристическая система (5.4) полностью проинтегрирована.

Сложности в дальнейшем аналитическом исследовании задачи возникают из-за невозможности явного задания функции $T(x)$.

Построение первичных семейств характеристик при $h > w^2$. Рассмотрим случай $h > w^2$. Найдем допустимую зону $\Gamma_0 \subset \partial M$ [3] (с учетом отмеченной ранее симметрии задачи). Имеем

$$\Gamma_0 = \{x_1 = 0, 0 < x_2 \le h\} \cup \{-d/2 \le x_1 \le 0, x_2 = h\}$$

Положим $T(x) = 0$ на Γ_0. Будем строить первичные семейства характеристик, выходящие из горизонтального и вертикального участков множества Γ_0, а также из точки $(0, h)$.

Характеристики, выпущенные с горизонтального участка множества Γ_0 при $\mu_2 = +1$, являются вертикальными прямыми и определяют функцию

$$T(x) := 2\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{h} + w\ln((\sqrt{x_2} - w)/(\sqrt{h} - w))\right) \tag{5.10}$$

в точках вертикальной полосы $\{(x_1, x_2): -d/2 \le x_1 \le 0, x_2 \ge h\}$.

Далее строим два гладких семейства характеристик: первое – из правого вертикального участка множества Γ_0 при $\mu_2 = -1$ и второе – из точки $(0, h)$ при $\mu_2 = +1$. Указанные значения μ_2 выбраны из эвристических соображений.

Полученные семейства частично накладываются друг на друга и определяют функции $T_1(x)$ и $T_2(x)$ в некоторых областях Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Первое семейство характеристик ограничено снизу гладкой линией $\mathcal{B}$, состоящей из полупроницаемой кривой [3], задаваемой уравнением

$$x_1 = B_*(x_2) := w^2 \arcsin\frac{\sqrt{x_2}}{w} - \sqrt{x_2(w^2 - x_2)}, \quad x_2 \in [0, w^2]$$

и луча $\{(x_1, x_2): x_1 \ge \pi w^2/2, x_2 = w^2\}$. Линия $\mathcal{B}$ будет барьером [3].

Второе семейство ограничено снизу линией $\tilde{\mathcal{S}}$, определяемой условием $p_2 = +0$ при движении вдоль характеристик.

На фиг. 2 приведены численные построения первичных семейств характеристик, выходящих в обратном времени из допустимой зоны Γ_0, для значений параметров $h = 9$, $w = 2$. Цифрами *1* и *2* обозначены первое и второе семейства характеристик.

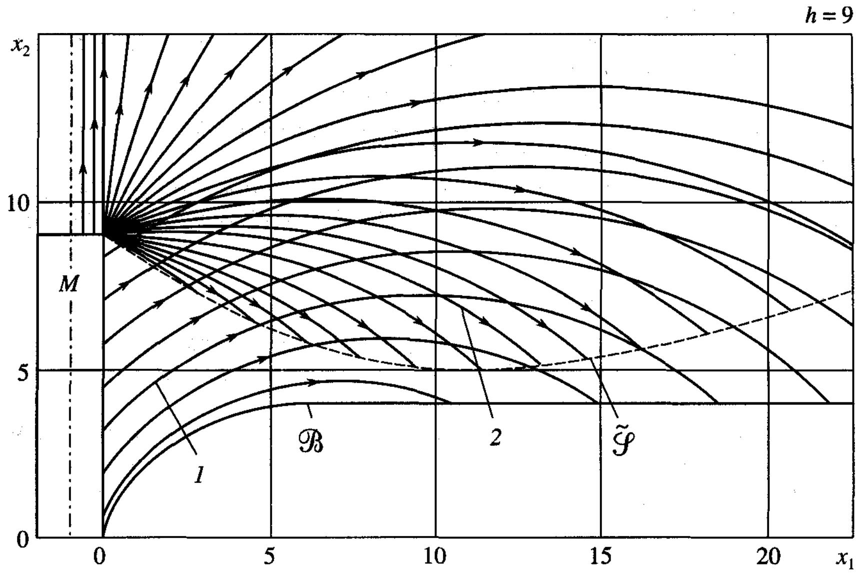
Построение сингулярной линии при $h > w^2$. На основе первичных семейств характеристик построим сингулярную линию, разделяющую область выше барьера $\mathcal{B}$ на два множества. Выше сингулярной линии конструируемая функция $T(x)$ будет совпадать с функцией $T_2(x)$, ниже – частично с функцией $T_1(x)$, частично будет определяться вторичным семейством характеристик, выходящим из точек сингулярной линии.

Пусть

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{x \in \Omega_1 \cap \Omega_2: T_1(x) = T_2(x)\}$$

При $h > w^2 + \Delta_w$, где Δ_w – некоторое положительное число, линия $\tilde{\mathcal{D}}$ касается одной из характеристик (критической) первого семейства. При значениях h, близких к w^2, происходит касание линии $\tilde{\mathcal{D}}$ и барьера $\mathcal{B}$. В обоих случаях обозначим точку касания через $a = (a_1, a_2)$. Положим

$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{D}}: x_1 \le a_1\}$$



Фиг. 2

Части характеристик обоих семейств после пересечения с линией $\mathcal{D}$ отбросим.

Если $a \notin \mathcal{B}$, то линию $\mathcal{D}$ продолжим линией $\mathcal{E}$, движение по которой (в обратном времени) задано уравнениями

$$x_1' = -\sqrt{x_2}\cos\hat{u}(x_1, x_2), \quad x_2' = -\sqrt{x_2}\sin\hat{u}(x_1, x_2) + w$$

$$\hat{u}(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}\frac{p_2}{p_1} + \arccos\frac{wp_2 - 1}{\sqrt{x_2}\|p\|}, \quad p_i(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, 2$$

Управление $\hat{u}(x)$ находим из равенства

$$p_1(x)\sqrt{x_2}\cos\hat{u}(x) + p_2(x)(\sqrt{x_2}\sin\hat{u}(x) - w) = -1$$

Если $a \in \mathcal{B}$, то линию $\mathcal{E}$ выпустим из некоторой точки $a^* = (a_1^*, a_2^*)$, определяемой условием касания вектора

$$(\sqrt{a_1^*}\cos\hat{u}(a^*), \sqrt{a_2^*}\sin\hat{u}(a^*) - w)$$

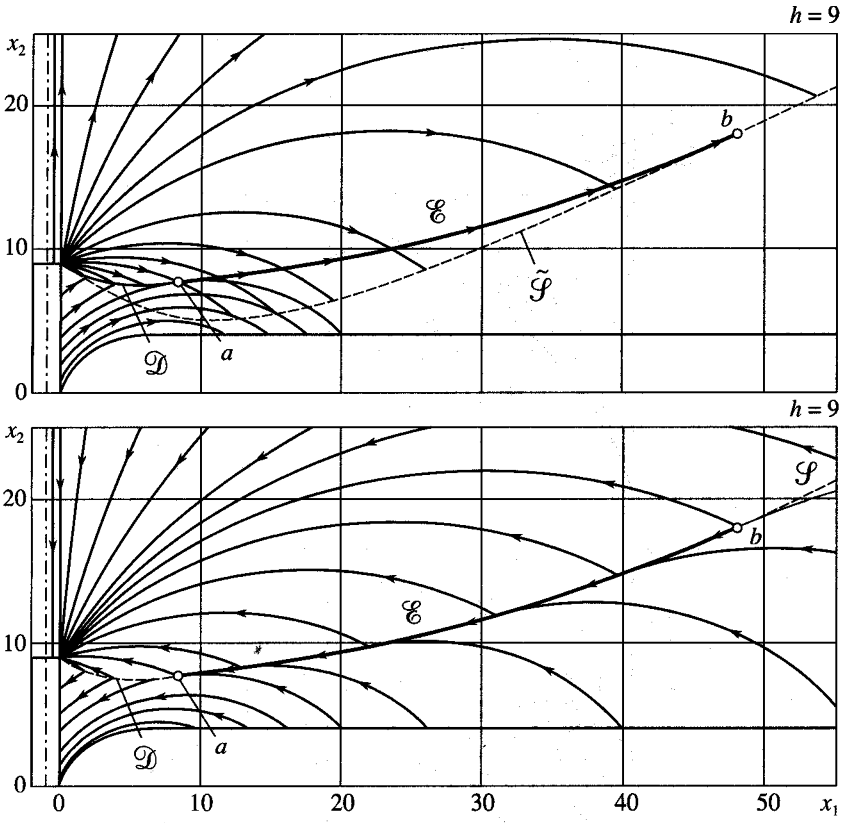
и кривой $\mathcal{B}$ в точке a^*.

Линия $\mathcal{E}$ продолжима до точки $b = (b_1, b_2)$, в которой происходит касание с линией $\tilde{\mathcal{S}}$. Пусть

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{S}}: x_1 \geq b_1\}$$

Части характеристик второго семейства после пересечения с линией $\mathcal{E}$ отбрасываем.

В верхней части фиг. 3 даны результаты численных построений (в обратном времени) линий $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ для значений параметров $h = 9$, $w = 2$. Части характеристик после пересечения с $\mathcal{D}$ не изображены.



Фиг. 3

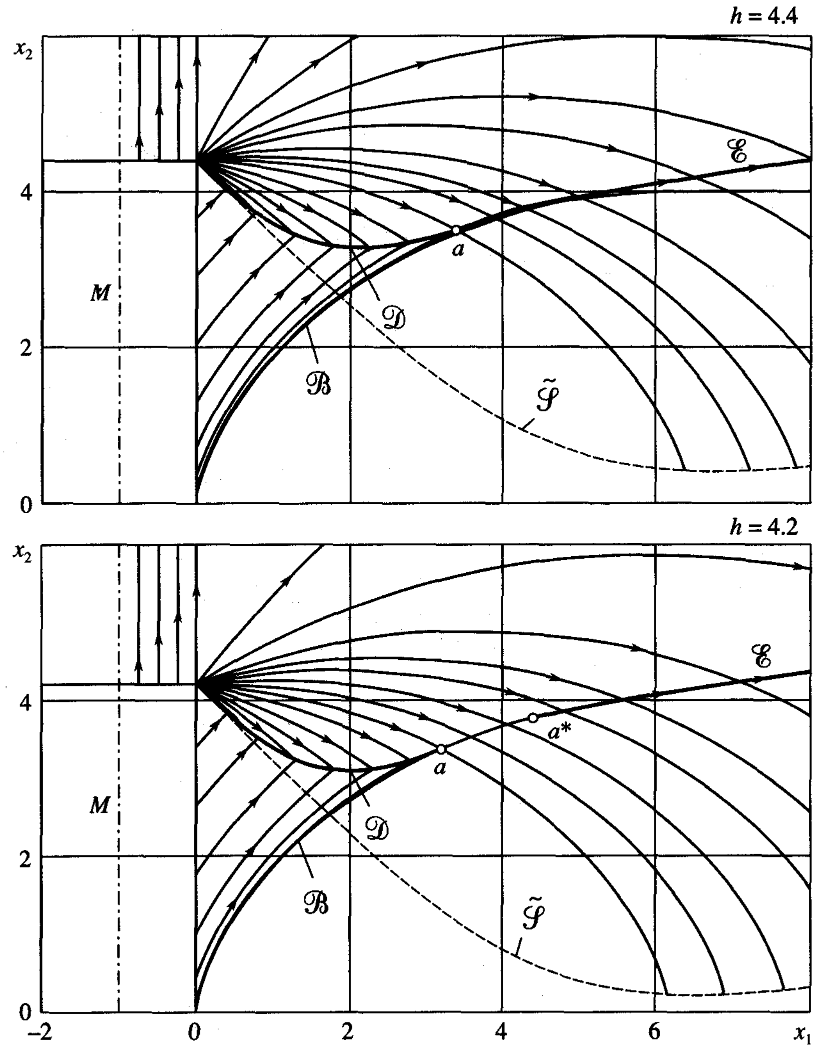
На линиях $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}$ задаем начальные условия для системы характеристик (5.4) при $\mu_2 = -1$, исходя из условий непрерывности, свойств экивокальности на $\mathscr{E}$ и дифференцируемости на $\mathscr{S}$. Выпускаем вторичное семейство характеристик, которое не продолжимо ниже прямой $x_2 = w^2$ и полностью покрывает область между барьером $\mathscr{B}$ и линией $\mathscr{E}\mathscr{S}$.

В нижней части фиг. 3 показаны численные построения всех семейств характеристик в прямом времени при $h = 9$, $w = 2$ и линия $\mathscr{D}\mathscr{E}\mathscr{S}$ (случай $h > w^2 + \Delta_w$). Участки $\mathscr{D}$ и $\mathscr{S}$ изображены штриховой линией.

На фиг. 4 более детально показан случай близкого расположения линий $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ и линии $\mathscr{B}$ для значений параметров $h = 4.4$, $w = 2$ (верхняя часть фиг. 4), а также случай пересечения (по касательной) линии $\mathscr{D}$ с барьером $\mathscr{B}$ и построения линии $\mathscr{E}$ из точки $a^* \in \mathscr{B}$ для $h = 4.2$, $w = 2$ (нижняя часть фиг. 4).

Функция цены игры при $h > w^2$. Правая часть системы (5.1) не удовлетворяет условию Липшица по переменной x. Однако в рамках рассматриваемой задачи определение функции цены с помощью пучков конструктивных движений и соотношения (1.3) остается прежним.

Определим функцию $T(x)$ следующим образом: в точках вертикальной полосы $\{(x_1, x_2): -d/2 \le x_1 \le 0, x_2 \ge h\}$ функция $T(x)$ задана формулой (5.10); $T(x) = T_2(x)$ выше линий $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}$; ниже линии $\mathscr{D}$ и ниже критической характеристики (если она есть) положим $T(x) = T_1(x)$; в оставшейся области функция $T(x)$ определена вторичным се-



Фиг. 4

мейством характеристик. На барьере $\mathscr{B}$ определим функцию $T(x)$ по непрерывности. В области ниже барьерной линии положим $T(x) = \infty$.

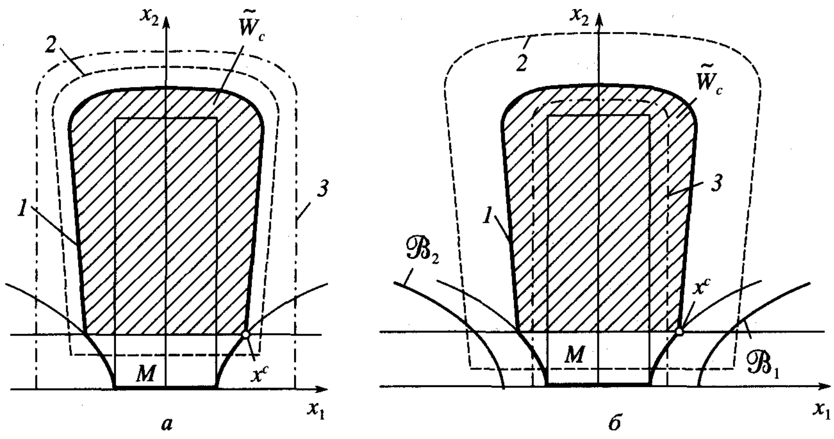
По построению линия $\mathscr{D}$ является рассеивающей линией для функции $T(x)$, линия $\mathscr{E}$ – эквивокальной линией. Линия $\mathscr{S}$ называется линией переключения. Она состоит из простейших сингулярных точек, для которых выполнено равенство $p^+(x) = p^-(x)$.

На множестве $x_1 < -d/2$, $x_2 \geq 0$ функция $T(x)$ задается симметрично относительно прямой $x_1 = -d/2$.

Гладкие ветви функции $T(x)$ являются решениями уравнения (5.3), а рассеивающий и эквивокальный характер склейки обеспечивает, согласно доказанной теореме, выполнение условий стабильности (1.4) в точках негладкости.

Введем обозначение

$$\Omega := \{x \in R^2_+ : T(x) < \infty\}$$



Фиг. 5

Используя свойства стабильности функции $T(x)$ во внутренних точках множества Ω, покажем, что при $h > w^2$ построенная функция $T(x)$ будет функцией цены в игровой задаче о брахистохроне.

В классе позиционных стратегий всегда выполнено [1] неравенство

$$\inf_U \sup J(X_1(x, U)) \geq \sup_V \inf J(X_2(x, V)), \quad x \in R_+^2$$

На множестве $R_+^2 \backslash \Omega$ второй игрок имеет уклоняющую стратегию $V(x) = -1$. Стало быть,

$$\sup_V \inf J(X_2(x, V)) = \infty$$

и поэтому равенство (1.3) выполнено для точек $x \in R_+^2 \backslash \Omega$.

На множестве $\Omega \backslash M$ достаточно доказать, что

$$\inf_U \sup J(X_1(x, U)) \leq T(x) \leq \sup_V \inf J(X_2(x, V)) \qquad (5.11)$$

1°. Для произвольного $c > 0$ найдем точку $x^c = (x_1^c, x_2^c) \in \mathcal{B}$, задаваемую условием $T(x^c) = c$. Пусть

$$W_c := \{x \in R_+^2 \colon T(x) \leq c\}, \quad \tilde W_c := \{x \in W_c \colon x_2 \geq x_2^c\}$$

На множестве R_+^2 определим функцию

$$T_c(x) = \begin{cases} T(x) - c, & \text{если} \quad x \in \Omega \backslash W_c \\ 0, & \text{если} \quad x \in \tilde W_c \\ \infty, & \text{если} \quad x \in (R_+^2 \backslash \Omega) \cup (W_c \backslash \tilde W_c) \end{cases}$$

На фиг. 5 цифрой 1 обозначена граница множества W_c, множество $\tilde W_c$ заштриховано.

Пусть

$$\tilde\Omega := \{x \in R_+^2 \colon T_c(x) < \infty\}$$

Из любой точки множества $\tilde{\Omega}$ первый игрок гарантирует попадание на множество $\tilde{W}_c$ за конечное время. Функция $T_c(x)$ является u- и υ-стабильной в любой внутренней точке множества $\tilde{\Omega}\backslash\tilde{W}_c$, поскольку такой является функция $T(x)$. Кроме того, правая часть системы (5.1) удовлетворяет условию Липшица по x выше прямой $x_2 = x_2^c/2$. Используя перечисленные факты, устанавливаем, что $T_c(x)$ – функция цены в игровой задаче быстродействия с целевым множеством $\tilde{W}_c$ и пространством игры, расположенным выше прямой $x_2 = x_2^c/2$.

2°. Рассмотрим задачу сближения с множеством M из точки $x_* \in \Omega \backslash M$.

Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\delta_1 > 0$ положим $\delta = \delta_1/2$ и найдем число $c > 0$, такое, что открытая δ-окрестность $\tilde{W}_c^\delta$ множества $\tilde{W}_c$ содержится в открытой δ_1-окрестности M_{δ_1} множества M. На фиг. 5, *а* цифрой 2 обозначена граница множества $\tilde{W}_c^\delta$, цифрой *3* – граница множества M_{δ_1}.

Поскольку $T_c(x)$ – функция цены для задачи быстродействия с целевым множеством $\tilde{W}_c$, то существует [6] стратегия $\tilde{U}_\varepsilon$ первого игрока, которая гарантирует сближение с множеством $\tilde{W}_c^\delta$ за время $T_c(x_*) + \varepsilon$ в дискретной схеме управления с шагом $\Delta \le \tilde{\Delta}(\delta)$. Здесь $\tilde{\Delta}(\delta)$ – положительное число, такое, что $\tilde{\Delta}(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Так как $\tilde{W}_c^\delta \subset M_{\delta_1}$ и $T_c(x_*) < T(x_*)$, то стратегия $\tilde{U}_\varepsilon$ гарантирует также сближение с множеством M_{δ_1} за время $T(x_*) + \varepsilon$ в дискретной схеме управления с шагом $\Delta \le \tilde{\Delta}(\delta)$.

Пусть $\delta_1 \to 0$. Используя компактность пучка $X_1(x_*, \tilde{U}_\varepsilon)$ конструктивных движений [1], получаем

$$\sup J(X_1(x_*, \tilde{U}_\varepsilon)) \le T(x_*) + \varepsilon$$

Отсюда следует левое неравенство в (5.11).

3°. Рассмотрим задачу уклонения от множества M из точки $x_* \in \Omega\backslash M$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $c = \varepsilon/2$. Введем обозначение

$$t_* := T_c(x_*) - \varepsilon/2$$

Поскольку $T_c(x)$ – функция цены для задачи быстродействия с целевым множеством $\tilde{W}_c$, то существуют [6] стратегия $\tilde{V}_\varepsilon$ и числа $\delta > 0$, $\tilde{\Delta} > 0$, такие, что стратегия $\tilde{V}_\varepsilon$ гарантирует уклонение от замкнутой δ-окрестности $\tilde{W}_c^\delta$ множества $\tilde{W}_c$ до момента t_* в дискретной схеме управления с шагом $\Delta \le \tilde{\Delta}$. На фиг. 5, *б* цифрой *2* обозначена граница множества $\tilde{W}_c^\delta$.

Заметим, что при формировании экстремальных управлений [6] второго игрока, определяющего стратегию $\tilde{V}_\varepsilon$, можно ограничиться значениями ± 1.

Пусть $\mathcal{B}_1$ – линия, полученная сдвигом барьера $\mathcal{B}$ вправо параллельно горизонтальной оси так, что точка пересечения прямой $x_2 = x_2^c$ и линии $\mathcal{B}_1$ принадлежит множеству $\tilde{W}_c^\delta$. Символом $\mathcal{B}_2$ обозначим линию, симметричную линии $\mathcal{B}_1$ относительно вертикальной прямой $x_1 = -d/2$. Линии $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ показаны на фиг. 5, *б*. При помощи управления $v = -1$ второй игрок оставляет движение в области ниже линии $\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2)$.

На основе стратегии $\tilde{V}_\varepsilon$ определим стратегию V_ε следующим образом. Положим $V_\varepsilon(x) = -1$ в точках строго ниже линии $\mathcal{B}_1$ и $V_\varepsilon(x) = \tilde{V}_\varepsilon(x)$ в остальных точках полуплоскости $x_1 \geq -d/2$. Симметрично зададим стратегию V_ε на полуплоскости $x_1 \leq -d/2$.

Выберем число $\delta_1 > 0$ так, чтобы δ_1-окрестность M_{δ_1} множества M не пересекалась с линией $\mathcal{B}_1$. Граница множества M_{δ_1} обозначена цифрой 3 на фиг. 5, *б*. Покажем, что стратегия V_ε обеспечивает уклонение от множества M_{δ_1} до момента t_* в дискретной схеме управления с шагом $\Delta \leq \tilde{\Delta}$.

Зададим разбиение полуоси $t \geq 0$ интервалами $[t_i, t_{i+1})$ и найдем число N такое, что $t_* \in [t_N, t_{N+1})$. Рассмотрим произвольное движение $x(t)$, порождаемое стратегией V_ε в дискретной схеме управления.

Пусть существует момент времени t_j, $0 \leq j \leq N$, для которого точка $x(t_j)$ лежит строго ниже линии $\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2)$ и $x(t) \notin M_{\delta_1}$ при $t \leq t_j$. Тогда в силу определения стратегии V_ε точка $x(t)$ останется ниже линии $\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2)$ для любого $t > t_j$ и не попадет на M_{δ_1} в течение бесконечного промежутка времени.

Пусть теперь для всех моментов t_i, $0 \leq i \leq N$, точка $x(t_i)$ находится не ниже линий $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$. Следовательно, в каждый момент t_i управление второго игрока выбирается согласно стратегии $\tilde{V}_\varepsilon$. В этом случае траектория $x(t)$ не может пересекать прямую $x_2 = x_2^c$ до момента t_*.

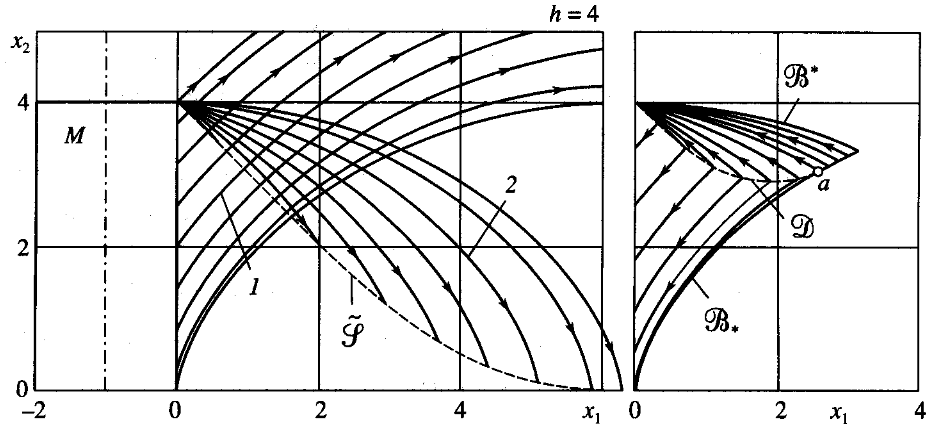
Предположим противное. Выберем первый момент $\bar{t} \leq t_*$, для которого точка $x(\bar{t})$ принадлежит прямой $x_2 = x_2^c$. Пусть число j таково, что $\bar{t} \in (t_j, t_{j+1})$, $0 \leq j \leq N$. Поскольку стратегия $\tilde{V}_\varepsilon$ уклоняет от замкнутого множества $\tilde{W}_c^\delta$ до момента t_*, то точка $x(\bar{t})$ лежит либо строго ниже линии $\mathcal{B}_1$, либо строго ниже линии $\mathcal{B}_2$. На интервале $[t_j, t_{j+1})$ имеем $V_\varepsilon(x(t)) = 1$, ибо в противном случае, т.е. при $V_\varepsilon(x(t)) = -1$, точка $x(t_{j+1})$ лежала бы ниже линии $\mathcal{B}_1$ или ниже линии $\mathcal{B}_2$.

Так как $\sqrt{x_2(\bar{t})} < w$, то

$$\dot{x}_2(\bar{t}) = \sqrt{x_2(\bar{t})}\sin u + w > 0$$

Поэтому на интервале $[t_j, \bar{t})$ движение идет ниже прямой $x_2 = x_2^c$. Поскольку точка $x(t_j)$ находится не ниже линий $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$, то найдется момент $\tilde{t} \leq t_j$, такой, что $x(\tilde{t}) \in \tilde{W}_c^\delta$. Получили противоречие с определением стратегии $\tilde{V}_\varepsilon$. Следовательно, движение $x(t)$ не может пересекать прямую $x_2 = x_2^c$ до момента t_*.

Таким образом, движение $x(t)$ проходит выше прямой $x_2 = x_2^c$ до момента t_*. Так как в каждый момент t_i, $0 \leq i \leq N$, управление второго игрока выбирается в силу



Фиг. 6

стратегии $\tilde{V}_\varepsilon$, то $x(t) \notin \tilde{W}_c^\delta$ при $t \le t_*$. Следовательно, движение $x(t)$ не попадает на множество M_{δ_1} до момента t_*.

Так как $c = \varepsilon/2$, то $t_* = T(x_*) - \varepsilon$. Получаем, что стратегия V_ε уклоняет от множества M_{δ_1} до момента $T(x_*) - \varepsilon$. Поэтому для пучка $X_2(x_*, V_\varepsilon)$ конструктивных движений выполнено неравенство

$$\inf J(X_2(x_*, V_\varepsilon)) \ge T(x_*) - \varepsilon$$

Отсюда следует правое неравенство в (5.11).

Функция цены игры при $h \le w^2$. В случае $h \le w^2$ положим $T(x) = T_2(x)$ выше линии $\mathfrak{D}$ и $T(x) = T_1(x)$ ниже линии $\mathfrak{D}$. Функции $T_1(x)$, $T_2(x)$ и линия $\mathfrak{D}$ строятся аналогично случаю $h > w^2$.

Поля характеристик для значений параметров $h = 4$, $w = 2$ показаны в левой части фиг. 6. Сингулярная линия $\mathfrak{D}$ целиком является рассеивающей (правая часть фиг. 6).

Барьерная линия состоит из части $\mathfrak{B}_*$ полупроницаемой кривой $x_1 = B_*(x_2)$, лежащей в полосе $0 \le x_2 \le x_2^h$, и части $\mathfrak{B}^*$ полупроницаемой кривой $x_1 = B^*(x_2, h) := -B_*(x_2) + B_*(h)$, лежащей в полосе $x_2^h \le x_2 \le w^2$. Здесь величина x_2^h определяется уравнением $B_*(x_2) = B^*(x_2, h)$. На линиях $\mathfrak{B}_*$ и $\mathfrak{B}^*$ функция $T(x)$ определяется по непрерывности. В остальных точках положим $T(x) = \infty$.

На множестве $x_1 < -d/2$, $x_2 \ge 0$ функция $T(x)$ задается симметрично относительно прямой $x_1 = -d/2$.

Рассеивающий характер склейки гладких ветвей функции $T(x)$ обеспечивает выполнение условий стабильности (1.4) в точках негладкости.

Аналогично случаю $h > w^2$ можно показать, что $T(x)$ – функция цены игры при $h \le w^2$.

Автор благодарит В.С. Пацко за постановку задачи и обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS YSF 00-183).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
3. *Isaacs R.* Differential Games. N.Y.: Wiley, 1965 = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
4. *Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik. Berlin: Springer, 1931 = *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1945. 620 с.
5. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Burkhäuser, 1995. 312 p.
6. *Гарнышева Г.Г., Субботин А.И.* Субоптимальные универсальные стратегии в игровой задаче быстродействия // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 707–713.
7. *Melikyan A.A.* Generalized Characteristics of the First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Burkhäuser, 1998. 310 p.
8. *Чигирь С.А.* Об игровой задаче о долихобрахистохроне // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1003–1013.
9. *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. М.; Л.: Гостехиздат, 1938. 192 с.

Екатеринбург
e-mail:kamneva@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
6. VI.2002