АКАДЕМИЯ НАУК СССР

УРАЛЬСКИЙ
НАУЧНЫЙ
ЦЕНТР

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ИГРОВЫХ СИСТЕМАХ

СВЕРДЛОВСК

АКАДЕМИЯ НАУК СССР · УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ИГРОВЫХ СИСТЕМАХ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

СВЕРДЛОВСК 1986

УДК 519.9

Синтез оптимального управления в игровых системах. Сб. науч. трудов. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986.

Применительно к задачам теории дифференциальных игр развивается экстремальная конструкция, изучаются свойства стабильных мостов и оптимальных стратегий, а также методы их приближенного построения. Исследуется связь метода динамического программирования с принципом максимума в задаче оптимального управления. Рассматриваются неантагонистические дифференциальные игры с иерархией процесса принятия решений.

Сборник рассчитан на специалистов в области теории оптимального управления и ее приложений.

Ответственные редакторы

доктор физико-математических наук **А. И. Субботин**,
кандидат физико-математических наук **А. Ф. Клейменов**

Рецензенты

доктор физико-математических наук **Ф. Л. Черноусько**,
кандидат физико-математических наук **А. А. Меликян**

$C \dfrac{20204-1363-52(84)}{055(02)7}$ 4—1986

АКАДЕМИЯ НАУК СССР · УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ИГРОВЫХ СИСТЕМАХ · 1986

М. А. ЗАРХ

АППРОКСИМАЦИЯ СТАБИЛЬНЫХ МОСТОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Исследуется дифференциальная игра двух лиц с фиксированным моментом окончания и целевым множеством [4, 9]. Предполагается, что матрица при фазовом векторе в уравнениях движения системы зависит от управляющего параметра второго игрока. При помощи оператора программного поглощения определяется система множеств и доказывается, что эта система — максимальный стабильный мост (множество позиционного поглощения). Затем устанавливается возможность нахождения сечений множества позиционного поглощения как предела последовательности пошаговых конструкций. Приводится оценка расстояния в метрике Хаусдорфа между точными и приближенными пошаговыми конструкциями. Доказывается сходимость последних к сечению множества позиционного поглощения. Вычислительным аспектом построения стабильных мостов посвящены работы [2, 6, 7, 8, 11].

1. Пусть движение фазового вектора $x \in R^m$ в дифференциальной игре двух лиц с фиксированным моментом окончания ϑ описывается системой уравнений

$$\dot{x} = A(v)x + u + v, \tag{1.1}$$

где u — управляющий параметр первого игрока, v — второго; $u \in P \subset R^m$, $v \in Q \subset R^m$; множество P — выпуклый компакт. Предположим, что для любых векторов $u \in P$ и $v \in Q$ выполняются неравенства

$$|u| \leqslant K_P, \quad |v| \leqslant K_Q, \quad \| A(v) \| \leqslant N. \tag{1.2}$$

Выделено выпуклое, замкнутое целевое множество M с непустой внутренностью. Цель первого игрока — привести при помощи позиционного способа управления фазовый вектор x в момент ϑ на множество M. Рассмотрим задачу о нахождении всех начальных позиций (t_0, x_0), $t_0 \leqslant \vartheta$, для которых первый игрок обеспечивает приведение движения на M в момент ϑ. Такие начальные позиции составляют множество позиционного поглощения [4].

2. Следуя [10], определим оператор $H_{t_1}^{t_2}$, ставящий в соответствие множеству $X \subset R^n$ множество $H_{t_1}^{t_2}(X)$ по правилу

$$H_{t_1}^{t_2}(X) = \{x_* \in R^m : \forall v \in Q \exists u(\cdot) : x(t_2, t_1, x_*, u(\cdot), v) \in X\}.$$

Здесь v — фиксированный вектор; $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ — измеримая вектор-функция; $x(t_2, t_1, x_*, u(\cdot), v)$ — положение фазового вектора системы (1.1) в момент t_2 при движении из позиции (t_1, x_*) под действием управлений v и $u(\cdot)$. Справедлива формула

$$H_{t_1}^{t_2}(X) = \bigcap_{v \in Q} \left\{ e^{-A(v)(t_2 - t_1)} X - \int_{t_1}^{t_2} e^{-A(v)(t_2 - \tau)} (P + v) \, d\tau \right\}. \quad (2.1)$$

Зафиксируем $t < \vartheta$. Пусть $\omega = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n\}$, $t = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = \vartheta$, — разбиение отрезка $[t, \vartheta]$. Положим

$$H_\omega(t) = H_{\tau_0}^{\tau_1}(H_{\tau_1}^{\tau_2}(\ldots(H_{\tau_{n-1}}^{\tau_n}(M))\ldots)), \quad (2.2)$$

$$W(t) = \bigcap_\omega H_\omega(t). \quad (2.3)$$

Пересечение в формуле (2.3) берется по всем разбиениям отрезка $[t, \vartheta]$. Перечислим некоторые известные [10] свойства множеств $H_\omega(t)$ и $W(t)$, вытекающие из их определения.

Свойство 1. Если множество M выпукло и замкнуто, то выпуклы и замкнуты множества $H_\omega(t)$ и $W(t)$.

Свойство 2. Если все точки разбиения ω_1 входят в разбиение ω_2, т. е. $\omega_1 \subset \omega_2$, то $H_{\omega_2}(t) \subset H_{\omega_1}(t)$.

Свойство 3. Пусть $t_* < \vartheta$ и $x_* \in W(t_*)$, тогда для любого момента t^*, $t_* < t^* \leqslant \vartheta$, любого вектора $v \in Q$ и любого разбиения ω отрезка $[t^*, \vartheta]$ найдется функция $u(t) \in P$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ такая, что $x(t^*, t_*, x_*, u(\cdot), v) \in H_\omega(t^*)$. В дальнейшем будет использована

Лемма 1. Если A_α — система непустых замкнутых множеств из компактного подмножества $\Omega \subset R^m$, для которых выполняется условие

$$\forall \alpha_1, \forall \alpha_2 \; \exists \alpha_3 : \; A_{\alpha_3} \subseteq A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}, \quad (2.4)$$

то $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$.

Справедливость леммы вытекает из того, что множества A_α являются центрированной системой в компактном пространстве Ω [1, с. 241].

Следствие 1. Для того чтобы множество $W(t)$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы для любого разбиения ω отрезка $[t, \vartheta]$ было непусто множество $H_\omega(t)$.

Необходимость вытекает из определения (2.3). Для доказательства достаточности покажем, что множества $H_\omega(t)$ удовлетворяют условиям леммы 1. Замкнутость отмечалась в свойстве 1. Если ω_1 и ω_2 — два разбиения отрезка $[t, \vartheta]$, то для разбиения

$\omega=\omega_1 \cup \omega_2$, в силу свойства 2, справедливо соотношение $H_\omega(t) \subseteq \subseteq H_{\omega_1}(t) \cap H_{\omega_2}(t)$. Поэтому, если все множества $H_\omega(t)$ непусты, то непусто $W(t)$.

В дальнейшем будем предполагать что для любого $t \in [t_0, \vartheta]$ множество $W(t)$ непусто.

Следствие 2. Система множеств $W(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, обладает свойством стабильности, т. е. для любых моментов времени t_*, t^*, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, для любой точки $x_* \in W(t_*)$ и произвольного постоянного управления $v \in Q$ найдется такое допустимое управление $u(\cdot)$, что $x(t^*, t_*, x_*, u(\cdot), v) \in W(t^*)$.

Доказательство. В силу свойства 3, для любого разбиения ω отрезка $[t^*, \vartheta]$ область достижимости $D_v = \bigcup\limits_{u(\cdot)} x(t^*, t_*, x_*, u(\cdot), v)$ имеет непустое пересечение с множеством $H_\omega(t^*)$. Из свойств 1, 2 следует, что множества $A_\omega = D_v \cap H_\omega(t^*)$ удовлетворяют всем условиям леммы 1. Поэтому

$$D_v \cap W(t^*) = D_v \cap \left(\bigcap_\omega H_\omega(t^*)\right) = \bigcap_\omega (D_v \cap H_\omega(t^*)) = \bigcap_\omega A_\omega \neq \varnothing.$$

Эта цепочка равенств выполняется для любого вектора $v \in Q$ и означает требуемый результат.

Нетрудно показать, что для произвольно выбранной начальной позиции (t_*, x_*), $x_* \notin W(t_*)$, существует позиционный способ управления второго игрока, который обеспечивает в момент ϑ уклонение от некоторой окрестности множества M. Таким образом, множество $W = \{(t, x) : x \in W(t)\}$ является максимальным стабильным мостом, а значит [4], множеством позиционного поглощения.

Следствие 3. Для любого момента $t \in [t_0, \vartheta]$ существует такая последовательность разбиений $\{\omega_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, что

$$W(t) = \lim_{k \to \infty} H_{\omega_k}(t). \tag{2.5}$$

Сначала установим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся разбиение ω и множество $H_\omega(t)$, для которого справедливо включение $H_\omega(t) \subset \subset W(t) + \varepsilon S$. Сделаем противоположное предположение: существует число $\varepsilon_* > 0$, для которого множества $B_\omega = H_\omega(t) \setminus (W(t) + + \varepsilon_* S)$ непусты. Легко проверяется, что множества B_ω удовлетворяют условиям леммы 1. Применив ее, найдем точку, которая одновременно и принадлежит множеству $W(t)$, и находится вне ε_*-окрестности этого множества. Полученное противоречие доказывает неверность предположения. Положим $\varepsilon_k = 1/k$. Для соответствующей последовательности разбиений $\{\omega_k\}$ очевидно выполняется соотношение (2.5).

3. Обратимся к вопросам, связанным с численным построением множеств $W(t)$. Введем некоторые определения и предположения. Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать скалярное произведение.

Для двух выпуклых замкнутых множеств X, Y из R^m расстояние Хаусдорфа определяется по формуле

$$h(X,\ Y)=\max_{|l|=1}|X(l)-Y(l)|.$$

Здесь $A(l)$ — опорная функция множества A.

Предположим, что существуют числа L, $r>0$ и вектор-функция $f(t)$, удовлетворяющие условиям

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant L|t_1-t_2|, \tag{3.1}$$

$$f(t)+r\cdot S\subset W(t) \tag{3.2}$$

для любых моментов t, t_1, $t_2\in[t_0,\ \vartheta]$. Кроме того, будем считать, что все множества, используемые в дальнейших рассуждениях, находятся в шаре радиуса R с центром в начале координат.

Замечание 1. Опорные функции множеств, принадлежащих шару RS, липщицевы с общей константой R.

Если $0\in\operatorname{int}X$, то положим

$$\varepsilon(X,\ Y)=\max_{l\neq 0}\left|1-\frac{Y(l)}{X(l)}\right|.$$

Замечание 2. Максимум в этом определении можно брать по единичным векторам l.

Из сделанных предположений следует, что если $W(t)\subset X$, то

$$r\varepsilon(X-f(t),\ Y-f(t))\leqslant h(X,\ Y)\leqslant R\varepsilon(X-f(t),\ Y-f(t)), \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{R}h(X,\ Y)\leqslant\varepsilon(X-f(t),\ Y-f(t))\leqslant\frac{1}{r}h(X,\ Y). \tag{3.4}$$

Величина ε, характеризующая расстояние между множествами X и Y, была использована в работах [6, 7, 8] для оценки расхождения между точной и приближенной альтернированными суммами в линейной дифференциальной игре [5, 9]. В отличие от расстояния h величина ε обладает следующим свойством.

Лемма 2. Если $0\in\operatorname{int}\bigcap_\alpha X_\alpha$ и для любого α справедливо неравенство $\varepsilon(X_\alpha,\ Y_\alpha)\leqslant\mu<1$, то $\varepsilon(\bigcap_\alpha X_\alpha\ \bigcap_\alpha Y_\alpha)\leqslant\mu$.

Доказательство. Из условия $0\in\operatorname{int}\bigcap_\alpha X_\alpha$ следует, что $X_\alpha(l)>0$, $l\neq 0$. Поэтому условие $\varepsilon(X_\alpha\ Y_\alpha)\leqslant\mu$ дает неравенства

$$(1-\mu)X_\alpha(l)\leqslant Y_\alpha(l)\leqslant(1+\mu)X_\alpha(l),$$

которые верны для любых индексов α и векторов $l\neq 0$. Эти соотношения можно записать в эквивалентной форме

$$(1-\mu)X_\alpha\subseteq Y_\alpha\subseteq(1+\mu)X_\alpha.$$

Пусть $X=\bigcap_\alpha X_\alpha$, $Y=\bigcap_\alpha Y_\alpha$. Тогда

$$(1-\mu)X\subseteq Y\subseteq(1+\mu)X.$$

Переписывая последние включения в терминах опорной функции, получим неравенства

$$(1-\mu)X(l)\leqslant Y(l)\leqslant(1+\mu)X(l),$$

которые дают необходимый результат.

Лемма 3. Существует такое число $\Delta > 0$, что для любых δ_1, $\delta_2 \in [0, \vartheta - t_0]$, $|\delta_1 - \delta_2| < \Delta$, $v \in Q$ имеет место неравенство

$$\| e^{-A^*(v)\delta_1} - e^{-A^*(v)\delta_2} \| \leqslant 2N |\delta_1 - \delta_2|. \tag{3.5}$$

Доказательство. Зафиксируем δ_1 и будем рассматривать близкие к δ_1 числа δ_2. Имеем

$$\| e^{-A^*(v)\delta_1} - e^{-A^*(v)\delta_2} \| = \| A^*(v)(\delta_2 - \delta_1) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} (A^*(v))^i (\delta_1^i - \delta_2^i) \| \leqslant N |\delta_2 - \delta_1| + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} N^i |\delta_1^i - \delta_2^i| =$$

$$= N |\delta_2 - \delta_1| \left(1 + \frac{1}{N} \left[\frac{1}{|\delta_2 - \delta_1|} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} N^i |\delta_1^i - \delta_2^i| \right] \right).$$

В силу свойств производных функции $\delta \to e^{N\delta}$, величина, заключенная в квадратные скобки, стремится к нулю при $\delta_2 \to \delta_1$, причем равномерно по $\delta_1 \in [0, \vartheta - t_0]$. Следовательно, для достаточно близких δ_1 и δ_2 она не превосходит числа N, а значит, справедливо неравенство (3.5).

Предложение 1. Пусть $\omega_i = \{t_0 = \tau_0^{(i)} < \tau_1^{(i)} < \ldots < \tau_{n_i}^{(i)} = \vartheta\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ — последовательность разбиений отрезка $[t_0, \vartheta]$, у которой

$$d_i = \max_{0 \leqslant k \leqslant n_i - 1} \left(\tau_{k+1}^{(i)} - \tau_k^{(i)} \right) \to 0$$

при $i \to \infty$. Тогда

$$W(t_0) = \lim_{i \to \infty} H_{\omega_i}(t_0). \tag{3.6}$$

Доказательство. Зафиксируем разбиение $\omega = \{t_0 = \tau_0 < < \tau_1 < \ldots < \tau_n = \vartheta\}$. Пусть $\breve{\tau}_k^{(i)}$ — ближайшая к τ_k точка из разбиения ω_i. Положим $\breve{\omega}_i = \{t_0 = \breve{\tau}_0^{(i)} \leqslant \breve{\tau}_1^{(i)} \leqslant \ldots \leqslant \breve{\tau}_n^{(i)} = \vartheta\}$. Заметим, что для достаточно больших i точки $\breve{\tau}_0^{(i)}, \breve{\tau}_1^{(i)}, \ldots, \breve{\tau}_n^{(i)}$ различны и $\breve{\omega}_i$ является разбиением. Пусть $\delta_k^1 = \tau_k - \tau_{k-1}$, $\delta_k^2 = \breve{\delta}_k^{(i)} - \breve{\tau}_{k-1}^{(i)}$, $k = \overline{1, n}$. Тогда

$$\delta_i = \max |\delta_k^2 - \delta_k^1| \to 0 \text{ при } i \to \infty. \tag{3.7}$$

Зафиксируем номер i и рекуррентным образом определим две последовательности множеств $X_0, X_1, \ldots, X_n, Y_0, Y_1 \ldots, Y_n$:

$$X_0 = Y_0 = M,$$

$$X_{k+1} = \bigcap_v X_{k+1}^v, \quad X_{k+1}^v = e^{-A(v)\delta_k^1} X_k - \int_0^{\delta_k^1} e^{-A(v)\tau}(P + v)\, d\tau, \tag{3.8}$$

$$Y_{k+1} = \bigcap_v Y_{k+1}^v, \quad Y_{k+1}^v = e^{-A(v)\delta_k^2} Y_k - \int_0^{\delta_k^2} e^{-A(v)\tau}(P + v)\, d\tau. \tag{3.9}$$

Учитывая (2.1) и (2.2), имеем $X_n = H_\omega(t_0)$, $Y_n = H_{\widehat{\omega}_i}(t_0)$. Оценим Хаусдорфово расстояние $h(X_{k+1}, Y_{k+1})$ в предположении, что $h(X_k, Y_k)$ известно. Найдем сначала равномерную по $v \in Q$ оценку величины $h(X^v_{k+1}, Y^v_{k+1})$. Для произвольного единичного l, в силу (3.8) и (3.9), получим

$$|X^v_{k+1}(l) - Y^v_{k+1}(l)| \leqslant \Big| \max_{x \in X_k} \langle e^{-A^*(v)\delta^1_k} l, x \rangle -$$

$$- \max_{y \in Y_k} \langle e^{-A^*(v)\delta^2_k} l, y \rangle | + | \int\limits_{\delta^1_k}^{\delta^2_k} (|\max_{u \in P} \langle e^{-A^*(v)\tau} l, u \rangle | +$$

$$+ | \langle e^{-A^*(v)\tau} l, v \rangle |) d\tau. \tag{3.10}$$

Под знаком интеграла во втором слагаемом неравенства (3.10) стоит ограниченная функция. Поэтому второе слагаемое можно оценить величиной $\lambda\delta_i$, где константа $\lambda > 0$ не зависит от i. Первое слагаемое в (3.10) оценивается суммой

$$\left| \max_{x \in X_k} \langle e^{-A^*(v)\delta^2_k} l, x \rangle - \max_{y \in Y_k} \langle e^{-A^*(v)\delta^2_k} l, y \rangle \right| +$$

$$+ \left| \max_{x \in X_k} \langle e^{-A^*(v)\delta^1_k} l, x \rangle - \max_{x \in X_k} \langle e^{-A^*(v)\delta^2_k} l, x \rangle \right|,$$

которая, в силу замечания 1 и леммы 3, для достаточно больших i не превосходит величины

$$e^{N(\vartheta - t_0)} h(X_k, Y_k) + 2NR\delta_i.$$

Заменив правую часть неравенства (3.10) на полученные оценки, запишем

$$h(X^v_{k+1}, Y^v_{k+1}) \leqslant e^{N(\vartheta - t_0)} h(X_k, Y_k) + (2NR + \lambda)\delta_i.$$

Поэтому, учитывая, что для любого $v \in Q$ имеет место вложение $W(\tau_{n-k}) \subseteq X^v_{k+1}$, согласно (3.4), имеем

$$\varepsilon(X^v_{k+1} - \tau_{n-k}, Y^v_{k+1} - \tau_{n-k}) \leqslant \frac{1}{r} \Big(e^{N(\vartheta - t_0)} h(X_k, Y_k) +$$

$$(2NR + \lambda)\delta_i \Big).$$

Применив лемму 2, получим

$$\varepsilon(X_{k+1} - \tau_{n-k}, Y_{k+1} - \tau_{n-k}) \leqslant \frac{1}{r} \Big(e^{N(\vartheta - t_0)} h(X_k, Y_k) +$$

$$+ (2NR + \lambda)\delta_i \Big).$$

Неравенство (3.3) влечет соотношение

$$h(X_{k+1}, Y_{k+1}) \leqslant \gamma_1 h(X_k, Y_k) + \gamma_2\delta_i, \tag{3.11}$$

где $\gamma_1 = Re^{N(\vartheta - t_0)}/r$, $\gamma_2 = R(2NR + \lambda)/r$. Приняв во внимание, что $h(X_0, Y_0)=0$, и осуществив в неравенствах (3.11) последовательную подстановку при $k=0, 1, \ldots, n-1$, получим

$$h(H_\omega(t_0), H_{\omega_i}(t_0)) \leqslant \varepsilon_i. \tag{3.12}$$

Здесь $\varepsilon_i = (\gamma_1^{n-1} + \gamma_1^{n-2} + \ldots + \gamma_1 + 1)\gamma_2\delta_i$. На основе неравенства (3.12), пользуясь известными рассуждениями (см., например, работу [6, с. 89]), получим соотношение (3.6), которое и требовалось установить. Доказательство закончено.

Пусть для каждого натурального n точки разбиения ω_n делят отрезок $[t_0, \vartheta]$ на n равных частей длины $\delta = (\vartheta - t_0)/n$. В дальнейшем будем считать, что последовательность множеств X_k, $k=\overline{0, n}$, определяется формулами (3.8), в которых для всех k примем $\delta_k^1 = \delta$. Рассмотрим приближающую $\{X_k\}$ последовательность множеств $\{\widehat{X}_k\}$, задаваемую формулами

$$\widehat{X}_0 = \widehat{M},\ X_{k+1} = \bigcap_v X_{k+1}^v,\ X_{k+1}^v = D_1^v(\delta) X_k - \int_0^\delta D_2^v(\tau)(P+v)\,d\tau, \tag{3.13}$$

где множество $\widehat{M}$ приближает M, матрицы $D_1^v(\xi)$, $D_2^v(\xi)$ зависят от ξ так, что существуют константы ν_1 и ν_2, для которых неравенства

$$\| D_1^v(\xi) - e^{-A(v)\xi} \| \leqslant \nu_1 \xi^2,\ \| D_2^v(\xi) - e^{-A(v)\xi} \| \leqslant \nu_2 \xi \tag{3.14}$$

верны при любых векторах $v \in Q$. Положим

$$\mu_1 = L + R + K_P + K_Q,\ \mu_2 = \frac{2}{r}(R\nu_1 + (K_P + K_Q)\nu_2). \tag{3.15}$$

Предложение 2. Имеет место предельное соотношение $h(X_n, \widehat{X}_n) \to 0$ при $n \to \infty$, $h(M, \widehat{M}) \to 0$. Справедлива оценка

$$h(X_n, \widehat{X}_n) \leqslant R(1-\mu_1\delta)^{-n}\left[\frac{1}{r} h(M, \widehat{M}) + \frac{\mu_2}{\mu_1}\delta\right]. \tag{3.16}$$

Доказательство. Для фиксированного номера n положим $\tau_k = \vartheta - k\delta$. Тогда, в силу (3.2),

$$f(\tau_k) + rS \subseteq W(\tau_k) \subseteq X_k,\ k = \overline{0, n}. \tag{3.17}$$

Пусть известна оценка величины $\varepsilon_k = \varepsilon(X_k - f(\tau_k), \widehat{X}_k - f(\tau_k))$. При фиксированном v оценим величину $\varepsilon_{k+1}^v = \varepsilon(X_{k+1}^v - f(\tau_{k+1}), \widehat{X}_{k+1}^v - f(\tau_{k+1}))$. Для любого единичного l имеем

$$X_{k+1}^v(l) = \max_{x \in X_k} \langle e^{-A^*(v)\delta} l, x \rangle + \int_0^\delta \max_{u \in P} \langle -e^{-A^*(v)\tau} l, u+v \rangle\,d\tau, \tag{3.18}$$

$$\widehat{X}_{k+1}^v(l) = \max_{x \in X_k} \langle (D_1^v(\delta))^* l, x \rangle + \int_0^\delta \max_{u \in P} \langle -(D_2^v(\tau))^* l, u+v \rangle\,d\tau. \tag{3.19}$$

Тогда очевидно

$$|X_{k+1}^{v}(l)-\widetilde{X}_{k+1}^{v}(l)|\leqslant|\max_{x\in X_k}\langle e^{-A^*(v)\delta}l,\ x\rangle-\max_{x\in\widetilde{X}_k}\langle e^{-A^*(v)\delta}l, x\rangle|+$$

$$+|\max_{x\in\widetilde{X}_k}\langle e^{-A^*(v)\delta}l,\ x\rangle-\max_{x\in\widehat{X}_k}\langle (D_1^v(\delta))^* l,\ x\rangle|+$$

$$+\int_0^{\delta}|\max_{u\in P}\langle -e^{-A^*(v)\tau}l,\ u+v\rangle-\max_{u\in P}\langle -(D_2^v(\tau))^* l,\ v+u\rangle|\,d\tau.$$

Отсюда с учетом замечания 1, неравенств (1.2), (3.14) и свойства $\| A^*-B^*\|=\| A-B\|$ следует

$$|X_{k+1}^{v}(l)-\widetilde{X}_{k+1}^{v}(l)|\leqslant|\max_{x\in X_k}\langle e^{-A^*(v)\delta}l,\ x\rangle-$$

$$-\max_{x\in\widetilde{X}_k}\langle e^{-A^*(v)\delta}l,\ x\rangle|+(R\nu_1+(K_P+K_Q)\nu_2)\delta^2. \tag{3.20}$$

Для достаточно малых δ, в силу соотношений (3.18), (1.2), (3.1), (3.17), имеем

$$|X_{k+1}^{v}(l)-\langle l,\ f(\tau_{k+1})\rangle|\geqslant\max_{x\in X_k}\langle e^{-A^*(v)\delta}l,\ x-f(\tau_k)\rangle+$$

$$e^{N\delta}(L+R+K_P+K_Q)\delta. \tag{3.21}$$

Из неравенств (3.20) и (3.21) видно, что

$$\left|\frac{X_{k+1}^{v}(l)-\widetilde{X}_{k+1}^{v}(l)}{X_{k+1}^{v}(l)-\langle l, f(\tau_{k+1})\rangle}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\max\limits_{x\in X_k}\langle e^{-A^*(v)\delta}l, x\rangle-\max\limits_{x\in\widetilde{X}_k}\langle e^{-A^*(v)\delta}l, x\rangle|+(R\nu_1+(K_P+K_Q)\nu_2)\delta^2}{\max\limits_{x\in X_k}\langle e^{-A^*(v)\delta}l, x-f(\tau_k)\rangle-e^{N\delta}(L+R+K_P+K_Q)\delta}.$$

Учитывая, что для малых δ выполняются неравенства

$$\frac{3r}{4}\leqslant\max_{x\in X_k}\langle e^{-A^*(v)\delta}l,\ x-f(\tau_k)\rangle\leqslant Re^{N\delta},$$

получим

$$\left|\frac{X_{k+1}^{v}(l)-\widetilde{X}_{k+1}^{v}(l)}{X_{k+1}^{v}(l)-\langle l, f(\tau_{k+1})\rangle}\right|\leqslant\frac{1}{1-(L+R+K_P+K_Q)\delta}\,\varepsilon_k+$$

$$+\frac{2}{r}(R\nu_1+(K_P+K_Q)\nu_2)\delta^2. \tag{3.22}$$

Неравенство (3.22) справедливо для любого единичного l. Поэтому, в силу замечания 2 и формул (3.15),

$$\varepsilon_{k+1}^{v}\leqslant\frac{1}{1-\mu_1\delta}\,\varepsilon_k+\mu_2\delta^2.$$

Условие (3.17) позволяет применить лемму 2 и получить

$$\varepsilon_{k+1}\leqslant\frac{1}{1-\mu_1\delta}\,\varepsilon_k+\mu_2\delta^2. \tag{3.23}$$

Неравенство (3.23) справедливо для $k=0, 1, \ldots, n-1$. Осуществив последовательную подстановку, придем к неравенству

$$\varepsilon_n \leqslant (1-\mu_1\delta)^{-n}\varepsilon_0 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\delta((1-\mu_1\delta)^{-n}-1)(1-\mu_1\delta) \leqslant$$
$$\leqslant (1-\mu_1\delta)^{-n}\left[\varepsilon_0 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\delta\right].$$

Напомним, что $\varepsilon_0 = \varepsilon(M - f(\vartheta), \breve{M} - f(\vartheta))$. Из неравенств (3.3), (3.4) следует (3.16). Заметим, что $(1-\mu_1\delta)^{-n} = (1-\mu_1(\vartheta - t_0)/n)^{-n} \to e^{\mu_1(\vartheta - t_0)}$ при $n\to\infty$. Поэтому $h(X_n, \hat{X}_n)\to 0$ при $n\to\infty$ и $h(M, \breve{M})\to 0$. Предложение 2 полностью доказано.

Из предложений 1 и 2 следует

Теорема. Если выполняются условия (3.14), то для множества, построенного по формулам (3.13), справедливо предельное соотношение

$$h(W(t_0), \breve{X}_n)\to 0 \text{ при } n\to\infty,\ h(M, \breve{M})\to 0. \tag{3.24}$$

4. Пример 1. В формулах (3.13) примем

$$D_1^v(\delta) = E - A(v)\delta,\ D_2^v(\tau) \equiv E. \tag{4.1}$$

Здесь E — единичная матрица. Рассуждая, как в лемме 3, можно доказать, что для матриц $D_1^v(\delta)$, $D_2^v(\tau)$, заданных формулами (4.1), при некоторых константах ν_1, ν_2 и любых достаточно малых δ выполняются неравенства (3.14). Следовательно, для множеств $\breve{X}_n$, найденных по формулам (3.13), (4.1), выполнено соотношение (3.24).

Пример 2. В формулах (3.13) положим

$$D_1^v(\delta) = (E + A(v)\delta)^{-1},\ D_2^v(\tau) \equiv D_1^v(\delta). \tag{4.2}$$

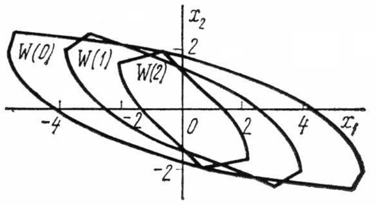
Чтобы доказать выполнение условий (3.14) для матриц $D_1^v(\delta)$, $D_2^v(\tau)$, заданных форм лами (4.2), оценим величины $d_1 = \|(E + A(v)\delta)^{-1} - (E - A(v)\delta)\|$ и $d_2 = \|(E + A(v)\delta)^{-1} - E\|$. Для произвольного $x\in R^m$, $|x|=1$, пусть $y = (E + A(v)\delta)^{-1}x$. Нетрудно показать существование такой положительной константы σ, что для любых векторов $v\in Q$ и достаточно малых δ выполняется неравенство $|y|\leqslant\sigma$. Имеем

$$|(E + A(v)\delta)^{-1}x - (E - A(v)\delta)x| = |y - (E - A(v)\delta)\times$$
$$\times(E + A(v)\delta)y| = |A^2(v)\delta^2 y| \leqslant N^2\sigma\delta^2,$$
$$|(E + A(v)\delta)^{-1}x - Ex| = |y - (E + A(v)\delta)y| \leqslant N\sigma\delta. \tag{4.3}$$

Следовательно, $d_1\leqslant N^2\sigma\delta^2$ и $d_2\leqslant N\sigma\delta$. Поэтому выполняются условия (3.14), а значит, и (3.24).

Замечание 3. Матрица $E + A\delta$ есть линейное по δ в окрестности нуля приближение матрицы $e^{A\delta}$, а матрица $E - A\delta$ — линейное приближение матрицы $(e^{A\delta})^{-1}$. Таким образом, формула (4.3) устанавливает оценку расхождения между матрицей линейного приближения к обратной и матрицей, обратной к линейному приближению $E + A\delta$.

В работе [3] описана стандартная программа, которая строит множества $\widehat{X}_n$ по формулам (3.13) с аппроксимацией (4.2). Приведем пример, просчитанный по этой программе.



Рассмотрим дифференциальную игру, заданную уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 + w, \quad \dot{x}_2 = -\alpha x_1 + u$$

и условиями $|u| \leqslant 1$, $|w| \leqslant 0.2$, $\alpha \in \{0.1,\ 0.2\}$. Параметром u распоряжается первый игрок, параметрами w и α — второй игрок. Целевое множество M — квадрат с вершинами (1,1), (—1,1), (—1, —1), (1, —1). Момент окончания игры равен $\vartheta = 3$. Для построения множеств $W(2)$, $W(1)$, $W(0)$ был выбран шаг $\delta = 0{,}05$. Множества $W(2)$ $W(1)$, $W(0)$ представлены на рисунке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
2. Боткин Н. Д. Оценка погрешности численных построений в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания.— Пробл. управления и теории информ., 1982, т. 11, № 4, с. 283—295.
3. Зарх М. А. Построение множества позиционного поглощения в дифференциальной игре второго порядка.— В кн.: Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. Свердловск, 1984, с. 103—126.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Никольский М. С. Построение кусочно-постоянного управления преследования в прямых методах Понтрягина.— Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1982, т. 22, № 4, с. 840—849.
6. Пономарев А. П., Розов Н. Х. Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина.— Вестн. МГУ. Вычисл. матем. и киберн., 1978, № 1, с. 82—90.
7. Пономарев А. П. Оценка погрешности численного метода построения альтернированного интеграла Понтрягина.— Вестн. МГУ. Вычисл. матем. и киберн., 1978, № 4, с. 37—43.
8. Пономарев А. П. Улучшенная оценка сходимости альтернированных сумм к альтернированному интегралу Понтрягина.— Матем. заметки, т. 35, вып. 1, 1984, с. 83—92.
9. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2.— Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4, с. 764—766.
10. Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И. О дифференциальных играх с фиксированным временем.— Кибернетика, 1970, № 2, с. 54—63.
11. Ушаков В. Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения — уклонения.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетик, 1980, № 4, с. 29—36.