РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТОМ 2

Екатеринбург
1992

Труды Института математики и механики. Том 2. Екатеринбург: УрО РАН. 1992. ISBN 5-7691-0379-5.

Исследуются абстрактное строение и свойства линейных представлений некоторых конечных групп. Рассматриваются вопросы приближения функций полиномами от двух переменных, сплайнами с нефиксированными узлами и рациональными дробями; изучаются экстремальные свойства алгебраических и тригонометрических полиномов; исследуется непрерывность метрической проекции и ε-проекции, а также существование чебышевских систем векторнозначных функций. Для некоторых классов дифференциальных игр предложены алгоритмы их численного решения. Исследуются вязкие решения уравнения Гамильтона-Якоби на многообразии. Изучаются некоторые задачи управления с неполной и неточной информацией. Ищутся решения в моделях с неоднозначно заданной информацией, строятся алгоритмы нахождения евклидова расстояния между выпуклыми оболочками.

Сборник представляет интерес для специалистов в области математики, механики и процессов управления.

ISBN 5-7691-0379-5.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 2 1992

УДК 517.97

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Н. Д. Боткин, Е. А. Рязанцева

В статье рассматривается алгоритм построения множества разрешимости для линейной дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания и выпуклым целевым множеством, связывающим m координат фазового вектора ($m = 4, 5, 6, 7...$). Основу алгоритма составляют операции над выпуклыми многогранниками в пространстве размерности m. Для выполнения этих операций используются методы работы с системами линейных неравенств, развитые С.Н.Черниковым.

Введение

В настоящее время в ИММ УрО РАН разрабатываются алгоритмы и программы численного решения дифференциальных игр [1]. Наиболее эффективные алгоритмы созданы для линейных задач с фиксированным моментом окончания и выпуклым целевым множеством, связывающим m координат фазового вектора. Имеются достаточно быстродействующие алгоритмы для размерности $m = 2, 3$ и предпринимаются попытки создания алгоритмов для размерности $m \geq 4$.

В настоящей работе рассматривается алгоритм, рассчитанный на величину размерности $m = 4, 5, 6, 7, \ldots$. Рассматриваемый алгоритм основан на методах работы с системами линейных неравенств, описанных в монографии [2]. Для задач управления подобные методы применялись, например, в [3].

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается линейная дифференциальная антагонистическая игра

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1.1}$$

с фиксированным моментом окончания ϑ. Здесь x – фазовый вектор системы, A, B, C – постоянные матрицы размерности $n \times n$, $n \times p$, $n \times q$ соответственно. На управляющие воздействия игроков u и v наложены следующие ограничения

$$u \in P, \quad v \in Q, \tag{1.2}$$

где P и Q – выпуклые многогранники в конечномерных пространствах $\mathbf{R}^p$ и $\mathbf{R}^q$ соответственно.

Цель первого игрока – привести m ($m \leq n$) выделенных компонент $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_m}$ фазового вектора в момент ϑ на выпуклое целевое множество $M \subset \mathbf{R}^m$, т.е. обеспечить включение

$$(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_m})^T \in M. \tag{1.3}$$

Исследуется задача о построении множества позиционного поглощения [1] для игры (1.1)–(1.3), т.е. множества всех начальных позиций (t_0, x_0), для каждой из которых первый игрок, используя позиционный способ управления, может обеспечить включение (1.3) вне зависимости от действий второго игрока. Обозначим это множество через W, а через $W(t)$ – сечение множества W в момент времени t:

$$W(t) = \{x \in \mathbf{R}^n : (t, x) \in W\}, \quad t \leq \vartheta.$$

Выделим в фундаментальной матрице $X(\vartheta, t) = \exp A(\vartheta - t)$ системы $\dot{x} = Ax$ строки с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и составим из них матрицу $X_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}(\vartheta, t)$. Произведем в системе (1.1) замену переменных $y(t) = X_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}(\vartheta, t)x(t)$. В результате замены получим эквивалентую дифференциальную игру

$$\dot{y} = B(t)u + v, \quad y \in \mathbf{R}^m, \tag{1.4}$$

с фиксированным моментом окончания ϑ. Здесь y – фазовый вектор системы, u, v – управляющие воздействия игроков, стесненные в каждый момент времени $t \leq \vartheta$ ограничениями

$$u \in P, \quad v \in Q(t), \tag{1.5}$$

где множество $Q(t)$ определяется соотношением

$$Q(t) = X_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}(\vartheta, t)CQ.$$

Матрица $B(t)$ вычисляется по формуле $B(t) = X_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}(\vartheta, t)B$.

В силу равенства $y(\vartheta) = (x_{\alpha_1}(\vartheta), x_{\alpha_2}(\vartheta), \ldots, x_{\alpha_m}(\vartheta))$ задача первого игрока состоит в обеспечении включения

$$y(\vartheta) \in M. \tag{1.6}$$

Обозначим через $\widetilde{W}$ множество позиционного поглощения для игры (1.4)–(1.6). Связь между множествами W и $\widetilde{W}$ определяется соотношением

$$W(t) = \{x \in \mathbf{R}^n : X_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}(\vartheta, t)x \in \widetilde{W}(t)\}, \quad t \leq \vartheta.$$

Вследствие этого построение множества позиционного поглощения для игры (1.4)–(1.6) полностью исчерпывает вопрос о построении множества разрешимости в исходной задаче.

В статье представлен алгоритм, на основе которого написана программа, осуществляющая переход от игры (1.1)–(1.3) к эквивалентной игре (1.4)–(1.6) и строящая цепочку множеств $\widehat{W}(\vartheta), \widehat{W}(\vartheta - \Delta), \ldots, \widehat{W}(\vartheta - k\Delta), \ldots$, близких к $\widetilde{W}(\vartheta), \widetilde{W}(\vartheta - \Delta), \ldots, \widetilde{W}(\vartheta - k\Delta), \ldots$ соответственно.

§ 2. Описание алгоритма

Разобьем полуось $t \leq \vartheta$ точками $\tau_0 = \vartheta, \tau_1 = \vartheta - \Delta, \ldots, \tau_k = \vartheta - k\Delta, \ldots$, где Δ – некоторый шаг разбиения. Построим цепочку множеств

$$\widehat{W}(\tau_0), \widehat{W}(\tau_1), \ldots, \widehat{W}(\tau_k), \widehat{W}(\tau_{k+1}), \ldots,$$

где $\widehat{W}(\tau_0) = M$, а $\widehat{W}(\tau_{k+1})$ – совокупность всех начальных точек $y_0 \in \mathbf{R}^m$, для каждой из которых по любому постоянному управлению $v \in Q(\tau_k)$ второго игрока можно указать такое постоянное управление u первого игрока, что система (2.4) под действием этих управлений из начальной позиции (τ_{k+1}, y_0) попадет в момент τ_k на множество $\widehat{W}(\tau_k)$, т.е.

$$\begin{aligned} \widehat{W}(\tau_{k+1}) &= \{y \in \mathbf{R}^m : \ \forall\, v \in Q(\tau_k)\ \exists\, u \in P, \\ &\quad y + \Delta B(\tau_k)u + \Delta v \in \widehat{W}(\tau_k)\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Отметим, что соотношение (2.1) можно записать в виде

$$\widehat{W}(\tau_{k+1}) = (\widehat{W}(\tau_k) + \Delta B(\tau_k)(-P)) \ \dot{-}\ \Delta Q(\tau_k).$$

Таким образом, рассматриваемая попятная конструкция является процедурой построения альтернированной суммы Л.С. Понтрягина [4]. Известно, что альтернированная сумма тем точнее аппроксимирует множество позиционного поглощения, чем меньше шаг дискретной схемы. Соответствующие оценки имеются в работах [5, 6].

Итак, при достаточно мелком шаге Δ получим цепочку множеств $\widehat{W}(\vartheta), \widehat{W}(\vartheta - \Delta), \ldots, \widehat{W}(\vartheta - k\Delta), \ldots$, аппроксимирующую множество позиционного поглощения в игре (2.4)–(2.6). Всё множества этой цепочки являются выпуклыми многогранниками в пространстве $\mathbf{R}^m$.

Зафиксируем номер k и рассмотрим процедуру построения множества $\widehat{W}(\tau_{k+1})$ по множеству $\widehat{W}(\tau_k)$. Будем искать многогранник $\widehat{W}(\tau_{k+1})$, предполагая, что множества $\widehat{W}(\tau_k)$ и P задаются системами линейных неравенств

$$\langle l_\alpha, y\rangle - \rho_\alpha \le 0, \quad \alpha \in \overline{1, N_W}, \tag{2.2}$$

$$\langle s_\beta, u\rangle - \mu_\beta \le 0, \quad \beta \in \overline{1, N_P}, \tag{2.3}$$

а множество $Q(\tau_k)$ определяется конечным набором точек:

$$Q(\tau_k) = co\{q_1, q_2, \ldots, q_r\}.$$

Исходя из соотношения (2.1), процедуру построения множества $\widehat{W}(\tau_{k+1})$ можно разбить на два этапа:

1) построение для каждого фиксированного $v \in Q(\tau_k)$ множества поглощения $H_v = \{y \in \mathbf{R}^m : \exists\, u,\ \ y + \Delta B(\tau_k)u + \Delta v \in \widehat{W}(\tau_k)\}$,

2) отыскание пересечения множеств H_v, $v \in Q(\tau_k)$.

Опишем процедуру построения множества H_v. Отметим, что $H_v = H - \Delta v$, где

$$H = \{y \in \mathbf{R}^m : \ \exists\, u \in P,\ y + \Delta B(\tau_k)u \in \widehat{W}(\tau_k)\}.$$

Учитывая, что множества $\widehat{W}(\tau_k)$ и P задаются системами линейных неравенств (2.2)–(2.3) , получаем:

$$\begin{aligned} H \ = \ \{\ & y \in \mathbf{R}^m : \ \exists\, u, \\ & \langle l_\alpha,\ y + \Delta B(\tau_k)u\rangle - \rho_\alpha \le 0, \ \ \alpha \in \overline{1, N_W}, \\ & \qquad\qquad \langle s_\beta, u\rangle - \mu_\beta \le 0, \ \ \beta \in \overline{1, N_P}\ \}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Система линейных неравенств

$$\begin{cases} \langle l_\alpha, y\rangle + \Delta\langle l_\alpha, B(\tau_k)u\rangle - \rho_\alpha \le 0, & \alpha \in \overline{1, N_W}, \\ \langle s_\beta, u\rangle - \mu_\beta \le 0, & \beta \in \overline{1, N_P} \end{cases} \tag{2.5}$$

описывает в пространстве $\{y, u\}$ выпуклый многогранник $\mathcal{H}$. Из соотношения (2.4) вытекает, что H является проекцией $\mathcal{H}$ на подпространство $\{y\}$, т.е. $H = np_y\mathcal{H}$.

Имеется метод сокращенного фундаментального свертывания [2], позволяющий последовательно исключить неизвестные из системы линейных неравенств и тем самым получить проекцию множества решений на любое подпространство.

Применив этот метод к системе (2.5), получим систему линейных неравенств

$$\langle h_j, y\rangle - \kappa_j \le 0, \quad j \in \overline{1, N_H}, \tag{2.6}$$

описывающую многогранник H в пространстве $\{y\}$.

З а м е ч а н и е. Из определения множества H следует, что вектор $h \in \{h_j\}$ либо совпадает с нормалью $l \in \{l_\alpha\}$ к множеству $\widehat{W}(\tau_k)$, либо является положительной комбинацией $h = \sum_i \nu_i l_{\alpha_i}$ некоторых из этих нормалей и может оказаться близким к одной из них. В процессе построения цепочки множеств $\widehat{W}(\tau_k)$, $k = 0, 1, \dots$, это обстоятельство может привести к чрезмерному накоплению близких нормалей. Чтобы избежать накопления, будем проверять близость вектора h к каждой из нормалей l_{α_i}. (Для единичных векторов a, b критерий близости: $\langle a, b\rangle \ge 1 - \epsilon$.) Если вектор h окажется близким хотя бы к одной из них, то соответствующее ему неравенство должно быть выброшено из системы (2.6). В этой статье мы не проводим анализ погрешности построения альтернированной суммы, вносимой при таком правиле выбрасывания.

Перейдем к процедуре построения пересечения множеств $H_v, v \in Q(\tau_k)$. Очевидно, множество H_v будет описываться следующей системой неравенств

$$\langle h_j, y\rangle - \kappa_j + \Delta\langle h_j, v\rangle \le 0, \quad v \in Q(\tau_k), \quad j \in \overline{1, N_H}.$$

Нетрудно заметить, что для каждой нормали h_j при различных $v \in Q(\tau_k)$ получим множество однотипных неравенств, отличающихся только свободными членами. Поэтому при отыскании пересечения множество неравенств, соответствующих одной нормали h_j , следует заменить одним неравенством, имеющим наименьший свободный член.

Таким образом, пересечение множеств H_v, $v \in Q(\tau_k)$, а следовательно, и искомое множество $\widehat{W}(\tau_{k+1})$, будет описываться системой

$$\langle h_j, y\rangle - \kappa_j + \Delta \max_{v \in Q(\tau_k)} \langle h_j, v\rangle \le 0, \quad v \in Q(\tau_k), \quad j \in \overline{1, N_H},$$

или

$$\langle h_j, y\rangle - \chi_j \le 0, \quad j \in \overline{1, N_H}, \tag{2.7}$$

где

$$\chi_j = \kappa_j - \Delta \max_{v \in Q(\tau_k)} \langle h_j, v\rangle = \kappa_j - \Delta \max_{q \in \{q_1, \dots, q_r\}} \langle h_j, q\rangle.$$

Система (2.7) может содержать как существенные, так и несущественные (зависимые) неравенства, являющиеся следствием всех остальных. Это вызывает необходимость анализа системы для выявления лишних неравенств, которые должны быть отброшены.

Как показано в [2, стр. 123], линейное неравенство $\langle h,y\rangle - \chi \le 0$ тогда и только тогда будет следствием совместной системы (2.7), когда неравенство $\langle h,y\rangle - \chi y_{m+1} \le 0$ будет следствием системы

$$\begin{cases} \langle h_j,y\rangle - \chi_j\, y_{m+1} \le 0, & j\in\overline{1,N_H}, \\ \qquad\qquad -y_{m+1} \le 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Поэтому перейдем от полученной неоднородной линейной системы (2.7) к однородной системе (2.8) . Для удаления лишних неравенств из системы (2.8) построим конус ее решений. С этой целью рассмотрим равносильную системе (2.8) систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \langle h_j,y\rangle - \chi_j\, y_{m+1} = -u_j, & j\in\overline{1,N_H}, \\ \qquad\qquad -y_{m+1} = -u_j, & j = N_H+1 \end{cases}$$

с неотрицательными параметрами u_j. Для удобства запишем ее в виде

$$d_{j1}y_1 + \ldots + d_{j,m+1}y_{m+1} = -u_j, \quad j\in\overline{1,N_H+1}, \tag{2.9}$$

или в матричной форме

$$Dy = -u. \tag{2.10}$$

Выделим в системе (2.9) $m+1$ уравнений, левые части которых линейно независимы. Будем считать, что такими являются первые $m+1$ уравнений. После этого систему (2.10) можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} \widehat{D}y = -\widehat{u}, \\ \overline{D}y = -\overline{u}, \end{cases} \tag{2.11}$$

где $\widehat{D}$ – обратимая матрица, составленная из первых $m+1$ строк матрицы D, $\overline{D}$ – матрица, состоящая из оставшихся строк матрицы D, $\widehat{u} = (u_1,\ldots,u_{m+1})^T$, $\overline{u} = (u_{m+2},\ldots,u_{N_H+1})^T$.

Из первой части системы (2.11) имеем

$$y = -\widehat{D}^{-1}\widehat{u}. \tag{2.12}$$

Подставляя y во вторую часть системы (2.11), получим систему уравнений

$$-\overline{D}\widehat{D}^{-1}\widehat{u} = -\overline{u} \tag{2.13}$$

с неотрицательными параметрами $\overline{u}$. Будем искать конус неотрицательных решений системы (2.13). Для этого заменим систему (2.13) на равносильную ей систему однородных неравенств

$$-\overline{D}\widehat{D}^{-1}\widehat{u} \le 0. \tag{2.14}$$

Применив к системе (2.14) метод нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств [2], получим матрицу $\widehat{Z}$, столбцы которой будут образующими конуса неотрицательных решений системы (2.14), а общее решение запишется в виде

$$\widehat{u} = \widehat{Z}p, \tag{2.15}$$

где p – вектор положительных параметров. Подставляя найденное неотрицательное решение (2.15) в формулу (2.12), получим формулу общего решения системы (2.10)

$$y = -\widehat{D}^{-1}\widehat{Z}p,$$

причем матрица $-\widehat{D}^{-1}\widehat{Z}$ состоит из образующих конуса решений исследуемой нами системы (2.10), который совпадает с конусом решений системы (2.8) .

Обозначим конус решений системы (2.8) через K, его образующие через $\{\overline{h_1}, \dots, \overline{h_s}\}$. Пусть $\langle h, y\rangle - \chi y_{m+1} \leq 0$ – некоторое неравенство, входящее в систему (2.8). Положим $\overline{h} = (h, -\chi)$. Имеем: $\forall\, \overline{h_j} \quad \langle \overline{h}, \overline{h_j}\rangle \leq 0$. Рассматриваемое неравенство выкидываем из системы (2.8), если

$$\forall\, \overline{h_j} \qquad \langle \overline{h}, \overline{h_j}\rangle < 0.$$

Проверив с помощью этого условия все неравенства системы (2.8) (а следовательно, системы (2.7)), избавимся тем самым от "строго зависимых" неравенств. Все остальные неравенства оставляем.

Таким образом, построение множества $\widehat{W}(\tau_{k+1})$ завершено. Повторяя эту процедуру, последовательно построим цепочку множеств $\widehat{W}(\vartheta), \widehat{W}(\vartheta - \Delta), \dots, \widehat{W}(\vartheta - k\Delta), \dots$.

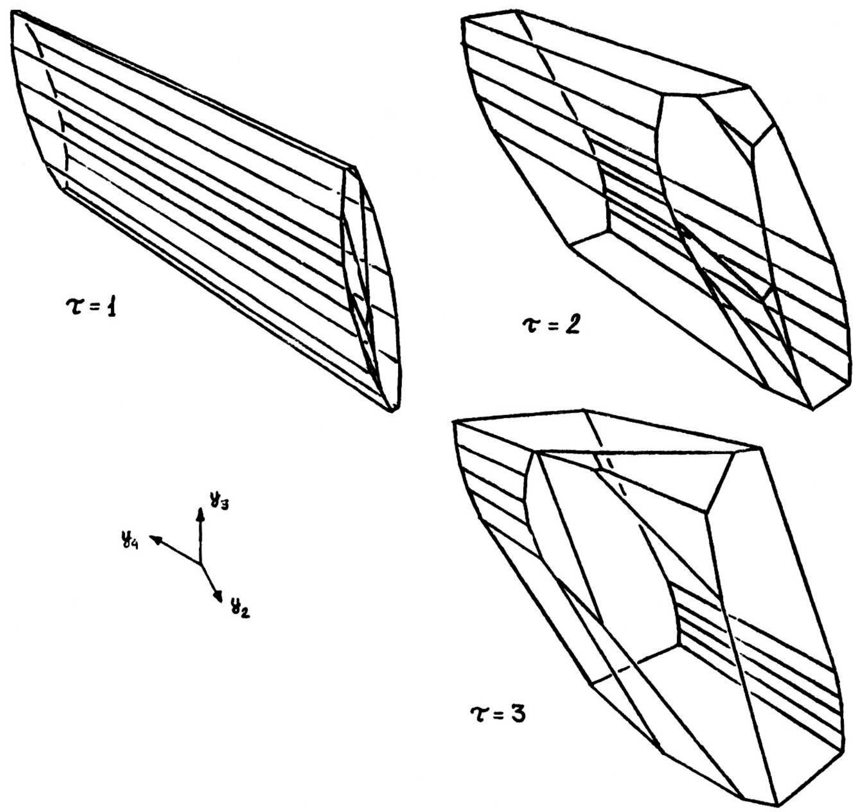
Данный алгоритм реализован на ЭВМ. Приведем пример построения надграфика функции оптимального результата в задаче оптимального управления.

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = u, \\ \dot{x}_4 = 0, \end{cases} \qquad P: \ |u| \leq 1, \qquad M: \begin{cases} -x_1 - x_4 \leq 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 \leq x_4 \leq 10 \end{cases},$$

$$\vartheta = 3.0, \qquad \Delta = 0.1.$$

Множество W для этой системы является срезкой надграфика функции оптимального результата в задаче $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = u$ с терминальной функцией платы $\Gamma(x) = \max\{0, -x_1(\vartheta)\}$ при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; $\Gamma(x) = \infty$ при $x_2 \neq 0$ или $x_3 \neq 0$. Ось x_4 является осью значений функции оптимального результата. Отметим, что, несмотря на отсутствие в рассматриваемой задаче управления противника, здесь работают обе части описываемого алгоритма (проектирование и удаление зависимых неравенств), поскольку зависимые неравенства появляются после операции проектирования.



На рисунке представлены сечения множеств $\widehat{W}(\tau)$ плоскостью $x_1 = 0$ для моментов обратного времени $\tau = 1.0,\ 2.0,\ 3.0.$

Поступила 13.10.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры.– М.: Наука, 1974.– 456 с.
2. **Черников С.Н.** Линейные неравенства.– М.: Наука, 1967.– 365 с.
3. **Бушенков В.А., Лотов А.В.** Методы и алгоритмы анализа линейных систем на основе построения обобщенных множеств достижимости // Ж. вычисл. математики и матем. физики.– 1980.– Т.20, N 5.– С.1130–1141.
4. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. 2 // Докл. АН СССР.– 1967.– Т.175, N 4.– С.764–766.
5. **Пономарев А.П., Розов Н.Х.** Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина // Вестник Моск. Ун-та. Серия 15.– 1978.– N 1.– С.82–90.
6. **Botkin N.D.** Evaluation of numerical construction error in differential game with fixed terminal time // Probl. of Control and Inform. Theory.– 1982.– V.11, N 4.– P.283–295.