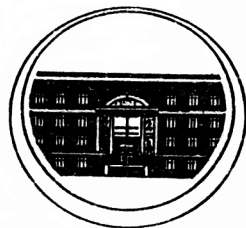


РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ**

ТОМ 2



Екатеринбург

1992

Труды Института математики и механики. Том 2. Екатеринбург: УрО РАН. 1992. ISBN 5-7691-0379-5.

Исследуются абстрактное строение и свойства линейных представлений некоторых конечных групп. Рассматриваются вопросы приближения функций полиномами от двух переменных, сплайнами с нефиксированными узлами и рациональными дробями; изучаются экстремальные свойства алгебраических и тригонометрических полиномов; исследуется непрерывность метрической проекции и ϵ -проекции, а также существование чебышевских систем векторнозначных функций. Для некоторых классов дифференциальных игр предложены алгоритмы их численного решения. Исследуются вязкие решения уравнения Гамильтона-Якоби на многообразии. Изучаются некоторые задачи управления с неполной и неточной информацией. Ищутся решения в моделях с неоднозначно заданной информацией, строятся алгоритмы нахождения евклидова расстояния между выпуклыми оболочками.

Сборник представляет интерес для специалистов в области математики, механики и процессов управления.

Редакционная коллегия

акад. РАН Ю. С. Осипов (главный редактор)

В. И. Бердышев (зам. главного редактора), **А. В. Маринов** (ответственный секретарь)

В. В. Васин, член-корр. РАН **И. И. Еремин**, акад. РАН **Н. Н. Красовский**,
А. В. Кряжимский, акад. РАН **А. Ф. Сидоров**, **А. И. Старостин**,
член-корр. РАН **А. И. Субботин**, **Ю. Н. Субботин**.

УДК 517.978

**ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР К ЗАДАЧАМ О ВЗЛЕТЕ И
ПРЕКРАЩЕНИИ ПОСАДКИ САМОЛЕТА****В. Л. Турова**

Исследуются задачи управления самолетом при ветровых возмущениях, обусловленных явлением микровзрыва. Строится минимаксный способ управления, основанный на методах теории дифференциальных игр. Проводится сравнение минимаксного способа с методом, базирующимся на теории робастного управления.

§ 1. Введение

Сдвиг ветра признан причиной многих авиакатастроф. Он, в частности, может быть обусловлен таким метеорологическим явлением как микровзрыв. Микровзрыв возникает при ударе нисходящего потока воздуха о поверхность земли. Попадание самолета в зону микровзрыва особенно опасно на взлете и посадке, т.к. резкое изменение скорости ветра в этом случае происходит на относительно небольшой высоте.

В течение последнего десятилетия появилось большое количество работ, посвященных задаче управления самолетом на взлете и посадке в условиях жестких ветровых возмущений. Данная статья примыкает к работам [2–7, 9–13, 14–17].

В [12, 13, 14–17] рассматривается движение в вертикальной плоскости. Изучаются задачи взлета, посадки и прекращения посадки. Для описания динамики используются уравнения одного и того же типа.

В работах [12, 15, 17] поле скорости ветра предполагается заранее известным. Показывается, что программные способы управления, получаемые из решения соответствующих оптимизационных задач, обеспечивают удовлетворительные траектории для достаточно жестких по интенсивности ветровых возмущений. Ясно, что на практике поле скорости ветра не может быть известным точно. Поэтому более адекватным является построение способов управления по принципу обратной связи. В частности, в [16] на основе полученных в [15] оптимальных решений конструируются стратегии обратной связи, использующие локальную информацию о сдвиге ветра.

В работе [13] применительно к задаче взлета исследуется управление обратной связи, найденное методами теории робастного управления. Основой этих методов является построение некоторой специальной функции Ляпунова. Конструирование функции Ляпунова и технология ее использования требуют задания ряда параметров. Тщательно подбирая параметры, авторы получают траектории, сравнимые с теми, что найдены в [15] из решения программных задач.

На методы теории робастного управления опирается и построение стратегии обратной связи в работе [14], где ставится задача стабилизации скорости подъема самолета относительно некоторого номинального значения.

Различные варианты минимаксного подхода, основанного на методах теории дифференциальных игр [8], рассматривались в [2–7, 9–11] применительно к задаче посадки. В работах [3, 6, 9, 10] использовалась полная модель динамики самолета, включающая уравнения бокового и продольного движений. Характерным для минимаксного подхода является то, что помимо информации о пределах возможного отклонения вертикальной и горизонтальной составляющих скорости ветра от некоторых номинальных значений никакая дополнительная информация о поле скорости ветра не требуется.

В данной работе делается попытка применить методы теории дифференциальных игр для построения управления в задачах о взлете и прекращении посадки самолета в постановке из работ [15, 17]. Полученные результаты сравниваются с приведенными в [13]. Для задачи о посадке исследование в рамках аналогичной постановки описано в [10].

Методика построения минимаксного управления обратной связи состоит в следующем. Исходная нелинейная система линеаризуется относительно желаемого движения, за которое в данной работе принимается равномерное движение с постоянным углом атаки по прямой, составляющей заданный угол с горизонталью. Ставится вспомогательная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания и выпуклой функцией платы. Для этой дифференциальной игры при помощи эффективных программ находится оптимальный гарантирующий способ управления, реализуемый посредством поверхности переключения [1, 2]. Найденный способ применяется затем в исходной нелинейной системе.

При моделировании движений нелинейной системы можно использовать различные варианты задания ветровых возмущений. В данной работе используется модель микровзрыва из работы [13].

§ 2. Нелинейная система уравнений движения

Как было отмечено, нелинейная модель движения самолета на взлете и посадке заимствована из работ [15, 17]. Приведем ее краткое описание.

Рассматривается движение в вертикальной плоскости. Основные предположения следующие. Самолет считается материальной точкой постоянной массы. Сила тяги не регулируемая. Поле скорости ветра стационарно.

Возмущение входит в уравнения динамики через вертикальную и горизонтальную составляющие вектора скорости ветра. Управление самолетом осуществляется при помощи изменения угла атаки.

2.1. Основные обозначения

V — воздушная скорость самолета, фут сек⁻¹;

γ — угол наклона, рад;

x — горизонтальное расстояние, фут;

h — высота, фут;

W_x — горизонтальная компонента скорости ветра в точке нахождения самолета, фут сек⁻¹;

W_h — вертикальная компонента скорости ветра в точке нахождения самолета, фут сек⁻¹;

α — угол атаки, рад;
 δ — угол установки тяги, рад;
 g — ускорение свободного падения, фут сек⁻² ;
 m — масса самолета, фунт сек² фут⁻¹;
 T — сила тяги, фунт;
 D — аэродинамическое сопротивление, фунт;
 L — подъемная сила, фунт;
 ρ — плотность воздуха, фунт сек² фут⁻⁴;
 S — эффективная площадь самолета, фут² .

Напомним, что 1 фут=0.3048 м, 1 фунт=0.4536 кг. Обозначения и размерности соответствуют работам [13, 15]. Смысл основных переменных поясняется на рис. 1 .

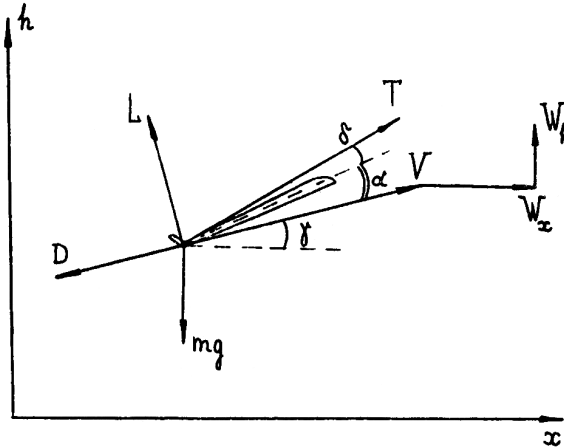


Рис .1. Пояснение основных переменных.

В нелинейную модель входят два динамических уравнения

$$\begin{aligned}
 m\dot{V} &= T \cos(\alpha + \delta) - D - mg \sin \gamma \\
 &\quad - m\dot{W}_x \cos \gamma - m\dot{W}_h \sin \gamma \\
 mV\dot{\gamma} &= T \sin(\alpha + \delta) + L - mg \cos \gamma \\
 &\quad + m\dot{W}_x \sin \gamma - m\dot{W}_h \cos \gamma
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

и два кинематических

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= V \cos \gamma + W_x \\
 \dot{h} &= V \sin \gamma + W_h.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Поскольку поле скорости ветра стационарно, производные по времени от компонент скорости ветра удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
 \dot{W}_x &= \frac{\partial W_x}{\partial x}(V \cos \gamma + W_x) + \frac{\partial W_x}{\partial h}(V \sin \gamma + W_h) \\
 \dot{W}_h &= \frac{\partial W_h}{\partial x}(V \cos \gamma + W_x) + \frac{\partial W_h}{\partial h}(V \sin \gamma + W_h).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Выражение для силы тяги имеет вид

$$T = \beta(t)(A_0 + A_1V + A_2V^2).$$

В задаче взлета $\beta(t) \equiv 1$, в задаче о прекращении посадки

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_0 + \dot{\beta}_0 t, & t \in [0, t_0] \\ 1, & t \in [t_0, 40]. \end{cases}$$

Коэффициенты A_0, A_1, A_2 зависят от высоты взлетно-посадочной полосы над уровнем моря и окружающей температуры.

Аэродинамическое сопротивление и подъемная сила задаются следующими формулами

$$D = \frac{1}{2}C_D\rho SV^2, \quad C_D = B_0 + B_1\alpha + B_2\alpha^2,$$

$$L = \frac{1}{2}C_L\rho SV^2, \quad C_L = \begin{cases} C_0 + C_1\alpha, & \alpha \leq \alpha_{**} \\ C_0 + C_1\alpha + C_2(\alpha - \alpha_{**})^2, & \alpha \in [\alpha_{**}, \alpha_*]. \end{cases}$$

Коэффициенты $B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2$ зависят от положения закрылков и шасси; α_*, α_{**} – заданные константы.

Единственным управляющим параметром является угол α . Будет рассмотрен как случай безинерционного, так и инерционного его изменения.

Задача управления состоит в том, чтобы реальное движение, проходящее в условиях ветрового возмущения, не соприкасалось с поверхностью земли и в случае взлета не слишком сильно отличалось от равномерного движения по прямой, составляющей заданный угол γ с горизонталью. В случае прекращения посадки предполагаем, что при попадании в зону микровзрыва пилот принимает решение прекратить снижение и перейти к восходящему полету.

Приведем численные значения используемых величин, соответствующие самолету Boeing-727 [15, 17]:

$$\delta = 2^\circ\pi/180, \quad \rho = 0.002203 \text{ фунт сек}^2 \text{ фут}^{-4}, \quad S = 1560 \text{ фут}^2,$$

$$mg = 180000 \text{ фунт}, \quad \alpha_{**} = 12^\circ\pi/180,$$

$$A_0 = 44564 \text{ фунт}, \quad A_1 = -23.98 \text{ фунт сек} \text{ фут}^{-1},$$

$$A_2 = 0.01442 \text{ фунт сек}^2 \text{ фут}^{-2}.$$

Для задачи взлета:

$$B_0 = 0.07351, \quad B_1 = -0.08617 \text{ рад}^{-1}, \quad B_2 = 1.996 \text{ рад}^{-2},$$

$$C_0 = 0.1667, \quad C_1 = 6.231 \text{ рад}^{-1}, \quad C_2 = -21.65 \text{ рад}^{-2},$$

$$\alpha_* = 16^\circ\pi/180.$$

Для задачи прекращения посадки:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 0.3895, \quad \dot{\beta}_0 = 0.2 \text{сек}^{-1}, \quad t_0 = (1 - \beta_0)/\dot{\beta}_0, \\ B_0 &= 0.1552, \quad B_1 = 0.12369 \text{рад}^{-1}, \quad B_2 = 2.4203 \text{рад}^{-2} \\ C_0 &= 0.7125, \quad C_1 = 6.0877 \text{рад}^{-1}, \quad C_2 = -9.0277 \text{рад}^{-2}, \\ \alpha_* &= 17.2^\circ \pi/180.\end{aligned}$$

2.2. Модель микровзрыва

Модель микровзрыва взята из работ А. Миеля и задается формулами [13]:

$$W_x = \begin{cases} -k, & x \leq a \\ -k + 2k(x-a)/(b-a), & a \leq x \leq b, \\ k, & x \geq b \end{cases}$$

$$W_h = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ -k(h/h_*)(x-a)/(c-a), & a \leq x \leq c \\ -k(h/h_*)(b-x)/(b-c), & c \leq x \leq b \\ 0, & x \geq b, \end{cases}$$

где $c = (a+b)/2$, h_* — фиксированная константа. Параметр k определяет интенсивность микровзрыва.

На рис. 2 показано поле скорости ветра, отвечающее данной модели.

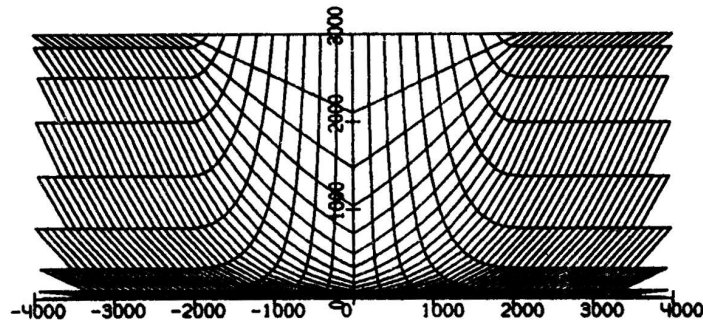


Рис. 2. Поле скорости ветра в вертикальном сечении микровзрыва.

В систему уравнений движения подаются не только компоненты скорости ветра вдоль движения, но и производные от этих компонент по пространственным переменным, которые вычисляются аналитически.

§ 3. Минимаксный закон управления

3.1. Общая схема построения

Для построения минимаксного закона управления используется та же методика, что и в задаче о посадке [3, 6, 9, 10].

В качестве номинального (желаемого) движения самолета рассматривается движение с постоянной воздушной скоростью V_0 по прямой, составляющей угол γ_0 с осью OX . Считаются известными номинальные значения компонент скорости ветра W_{x0}, W_{h0} . По величинам $V_0, \gamma_0, W_{x0}, W_{h0}$ рассчитывается номинальный угол атаки α_0 .

Исходная нелинейная система (2.1), (2.2) линеаризуется относительно номинальных значений. При этом вместо W_x, W_h подставляются соотношения

$$\begin{aligned} \dot{W}_x &= -k_v(W_x - v_1) \\ \dot{W}_h &= -k_v(W_h - v_2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнения (3.1) подсоединяются к основной системе вместо соотношений (2.3). Величины W_x, W_h становятся фазовыми переменными, а новые переменные v_1, v_2 интерпретируются как воздействия помехи (воздействия второго игрока), стесненные геометрическими ограничениями

$$|v_1| \leq \nu_1, \quad |v_2| \leq \nu_2.$$

Если в начальный момент значения W_x, W_h лежат в пределах

$$|W_x| \leq \nu_1, \quad |W_h| \leq \nu_2,$$

то и в дальнейшем они остаются в этих пределах. Отметим также, что соотношения (3.1) учитывают инерционный характер изменения скорости ветра (коэффициент k_v выбирается исходя из наших представлений об этой инерционности).

Для полученной линейной системы ставится вспомогательная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания t_f , геометрическими ограничениями на управляющее воздействие и помеху, выпуклой функцией платы, зависящей от двух координат фазового вектора в момент t_f . Цель первого игрока, распоряжающегося управляющим параметром, состоит в минимизации функции платы в момент времени t_f . Цель второго игрока, ведающего помехой, противоположна.

Для вспомогательной дифференциальной игры находится оптимальное гарантирующее управление обратной связи, реализуемое посредством поверхности переключения.

Полученный закон управления (называемый здесь минимаксным) используется при моделировании движений исходной нелинейной системы.

3.2. Вспомогательная линейная дифференциальная игра

Динамика вспомогательной дифференциальной игры для задачи взле-

та описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= [(A_1 + 2A_2V_0) \cos(\alpha + \delta)/m - \rho SV_0(B_0 + B_1\alpha_0 + B_2\alpha_0^2)/m]x_1 - g \cos \gamma_0 x_2 + [-(A_0 + A_1V_0 + A_2V_0^2) \sin(\alpha_0 + \delta) - \rho SV_0^2(B_1 + 2B_2\alpha_0)/(2m)]u + k_v \cos \gamma_0(x_3 - v_1) + k_v \sin \gamma_0(x_4 - v_2), \\
 \dot{x}_2 &= [(A_1 + 2A_2V_0) \sin(\alpha_0 + \delta)/(mV_0) + (C_0 + C_1\alpha_0)\rho S/m]x_1 + g \sin \gamma_0/V_0 x_2 + [(A_0 + A_1V_0 + A_2V_0^2) \cos(\alpha_0 + \delta)/(mV_0) + C_1\rho SV_0/(2m)]u - k_v \sin \gamma_0(x_3 - v_1)/V_0 + k_v \cos \gamma_0(x_4 - v_2)/V_0, \\
 \dot{x}_3 &= -k_v(x_3 - v_1), \\
 \dot{x}_4 &= -k_v(x_4 - v_2).
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $x_1 = \Delta V$, $x_2 = \Delta \gamma$, $x_3 = \Delta W_x$, $x_4 = \Delta W_h$ — отклонения величин воздушной скорости, угла наклона, компонент скорости ветра от номинальных значений $V_0 = 276.8$ фут сек⁻¹, $\gamma_0 = 6.989^\circ \pi/180$, $W_{x0} = 0$, $W_{h0} = 0$. Управляющий параметр $u = \Delta \alpha$ — отклонение угла атаки от номинального значения $\alpha_0 = 10.367^\circ \pi/180$. Параметры v_1, v_2 интерпретируются как компоненты помехи.

Первые два уравнения получены линеаризацией динамических нелинейных уравнений (2.1) относительно номинальных значений. Правые части указанных уравнений не зависят ни от высоты положения самолета, ни от пройденного расстояния. Функция платы, которая будет введена ниже, также не зависит от этих величин. Поэтому в систему (3.2) не включены линеаризованные кинематические уравнения (2.2).

Последние два слагаемых в первом и втором уравнениях есть результат подстановки вместо $\Delta \dot{W}_x, \Delta \dot{W}_h$ их выражений в силу третьего и четвертого уравнений. Приведем значения констант и численный вид уравнений (3.2) для задачи взлета:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + C\mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^1, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^2, \tag{3.3} \\
 A &= \begin{pmatrix} -0.023751 & -31.946111 & 0.198515 & 0.024323 \\ 0.000793 & 0.014141 & -0.000088 & 0.000717 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}, \\
 B &= \begin{pmatrix} -16.460542 & 0.554554 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \\
 C &= \begin{pmatrix} -0.188515 & 0.000088 & 0.2 & 0 \\ -0.024323 & -0.00071 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}^T, \\
 \mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \\
 \mathbf{u} &= \Delta \alpha, \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T.
 \end{aligned}$$

Ограничения на управление $u = \Delta \alpha$ возьмем в виде

$$|u| \leq \mu, \quad \mu = 5.633^\circ \pi/180. \tag{3.4}$$

Выберем из соображений здравого смысла ограничения на помеху

$$\begin{cases} |v_1| \leq \nu_1, & \nu_1 = 50 \text{ фут сек}^{-1}, \\ |v_2| \leq \nu_2, & \nu_2 = 7 \text{ фут сек}^{-1}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Введем функцию платы, зависящую от координат $x_1 = \Delta V$, $x_2 = \Delta \gamma$. Для этого рассмотрим выпуклый четырехугольник M с вершинами $(-30, 0)$, $(-0.9, 0.02)$, $(10, 0)$, $(0.9, -0.02)$. Положим

$$\varphi(x_1, x_2) = \min\{c > 0 : (x_1, x_2) \in cM\}. \quad (3.6)$$

Зафиксируем момент t_f . Будем считать, что цель первого игрока во вспомогательной дифференциальной игре (3.3)–(3.5) – минимизация значений функции φ в момент t_f , интересы второго игрока противоположны. Мы не придаем моменту t_f какой-либо физической смысл.

Естественно, что описанное выше введение вспомогательной дифференциальной игры не является единственно возможным. Например, можно было при тех же фазовых координатах вспомогательной игры иначе определить функцию платы. Мы могли бы ввести в число фазовых переменных $\Delta \dot{h}$, $\Delta \dot{h}$ и рассмотреть плату, зависящую от этих координат. Описанный вариант вспомогательной дифференциальной игры выбран по результатам моделирования из нескольких вариантов.

Приведем постановку вспомогательной дифференциальной игры для задачи о прекращении посадки. Как и в [12], считаем, что скорость изменения угла атаки не превышает $0.3 \text{ град сек}^{-1}$. Чтобы соблюсти это ограничение, в систему уравнений движения было введено дополнительное уравнение

$$\dot{\alpha} = -0.3(\alpha - u).$$

Тем самым угол атаки считался фазовой переменной, а параметр u рассматривался в дальнейшем как управляющий. Численный вид вспомогательной дифференциальной игры следующий:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Cv, \quad x \in \mathbf{R}^5, \quad u \in \mathbf{R}^1, \quad v \in \mathbf{R}^2, \\ A &= \begin{pmatrix} -0.03929 & -32.08073 & 0.19935 & 0.01609 & -18.18064 \\ 0.00107 & 0.0108 & -0.00007 & 0.00083 & 0.4773 \\ 0 & 0 & -0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3 \end{pmatrix}, \\ B &= (0, 0, 0, 0, 0.3)^T, \\ C &= \begin{pmatrix} -0.19935 & 0.00007 & 0.15 & 0 & 0 \\ -0.01609 & -0.00083 & 0 & 0.15 & 0 \end{pmatrix}^T, \\ x &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T, \\ x_1 &= \Delta V, \quad x_2 = \Delta \gamma, \quad x_3 = \Delta W_x, \quad x_4 = \Delta W_h, \quad x_5 = \Delta \alpha, \\ |u| &\leq \mu, \quad \mu = 7.447^\circ \pi / 180, \end{aligned}$$

$$|v_1| \leq \nu_1, \quad \nu_1 = 50 \text{ фут сек}^{-1},$$

$$|v_2| \leq \nu_2, \quad \nu_2 = 20 \text{ фут сек}^{-1}.$$

Линеаризация проведена относительно номинальных значений

$$V_0 = 239.7 \text{ фут сек}^{-1}, \quad \gamma_0 = 4.6^\circ \pi/180, \quad \alpha_0 = 9.753^\circ \pi/180,$$

$$W_{z0} = 0, \quad W_{h0} = 0$$

в предположении $\beta(t) \equiv 1$.

Множество M – прямоугольник на плоскости (x_1, x_2) с вершинами: $(-50, -0.06)$, $(-50, 0.1)$, $(50, 0.1)$, $(50, -0.06)$.

3.3. Оптимальная стратегия первого игрока во вспомогательной дифференциальной игре

В работе [1] показано, что оптимальная стратегия первого игрока в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания и выпуклой функцией платы, зависящей от двух координат фазового вектора, реализуется при помощи поверхности переключения в пространстве переменных t, y_1, y_2 . В нашем случае вектор $y = (y_1, y_2)$ связан с фазовым вектором x системы (3.3) соотношением

$$y(t) = X(t_f, t)x(t),$$

где $X(t_f, t)$ матрица, составленная из первой и второй строк фундаментальной матрицы Коши однородной части системы (3.3). По одну сторону от поверхности переключения оптимальное управление принимает экстремальное значение одного знака, по другую сторону – противоположного знака.

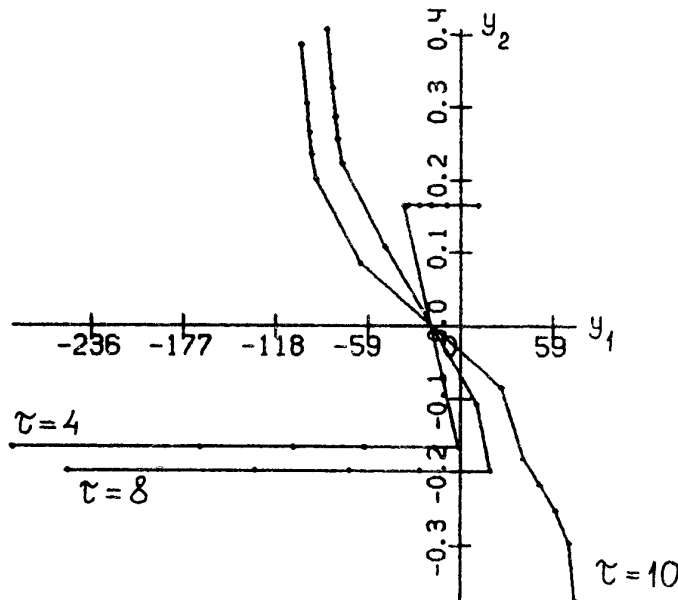


Рис. 3. Линии переключения для задачи взлета.

Поскольку при моделировании управление применяется в дискретной схеме, необходим лишь набор линий переключения на сетке моментов времени. Алгоритм построения линий переключения основан на обработке сечений множеств уровня функции цены игры.

Пример линий переключения для задачи взлета приведен на рис. 3. Линии соответствуют моментам обратного времени $\tau = 4, 8, 10$. Поскольку множество M не симметрично относительно начала координат, не являются симметричными и линии переключения.

Рассмотрим линию переключения $\Pi(t_i)$. Если в момент t_i точка $y(t_i) = X(t_f, t_i)x(t_i)$ расположена относительно линии переключения в направлении, определяемом вектором $D(t_i) = X(t_f, t_i)B$, то на следующем шаге дискретной схемы управления полагаем $u_0 = -\mu$. Если точка $y(t_i)$ находится в противоположном направлении относительно линии переключения, то $u_0 = \mu$.

§ 4. Использование линий переключения в нелинейной системе

Во вспомогательной линейной дифференциальной игре (3.3)–(3.5) было взято $t_f = 15$ сек и построен набор линий переключения $\Pi(t_i)$ на сетке моментов времени $t_i = i\Delta$, $\Delta = 0.1$, $i \in \overline{0, 150}$. При моделировании движений нелинейной системы построенные линии переключения использовались двумя способами.

1. Пусть $x(t)$ – пройденное за время t расстояние по оси x , $V_{x0} = V_0 \cos \gamma_0$ – проекция номинальной воздушной скорости на ось x . Тогда $t' = x(t)/V_{x0}$ – номинальное время прохождения расстояния $x(t)$.

Зафиксируем $t_* \in (0, t_f)$ и рассмотрим промежуток $[t_*, t_f]$. Первый способ использует набор линий переключения, соответствующий промежутку $[t_*, t_f]$. Число t_* можно рассматривать как параметр предлагаемого закона управления. Уменьшая t_* , мы расширяем используемый набор, и, наоборот.

В момент времени t берется линия переключения $\Pi(t_j)$ с номером

$$j = [t_*/\Delta] + \text{mod}([t'/\Delta], [(t_f - t_*)/\Delta]).$$

Здесь символ $[]$ означает целую часть числа, $\text{mod}(a, b)$ – остаток от деления a на b .

Далее вычисляются векторы $y(t) = X(t_f, t_j)x(t)$ и $B(t_j) = X(t_f, t_j)B$, где

$$x(t) = (V(t) - V_0, \gamma(t) - \gamma_0, W_x(t) - W_{x0}, W_h(t) - W_{h0})^T.$$

Анализируя положение точки $y(t)$ относительно линии переключения $\Pi(t_j)$, с использованием вектора $B(t_j)$, выбираем управляющее воздействие.

При описанном варианте использования линий переключения мы фактически задаем на оси времени моменты $t_f - t_*$, $2(t_f - t_*)$ и т.д. и стараемся уменьшить значения функции φ в эти моменты времени на движениях нелинейной системы. Таким образом, мы пытаемся осуществить стабилизацию движений нелинейной системы относительно выбранного номинального движения, но не непрерывно, а лишь в указанные моменты времени.

2. Недостатком первого способа управления является возможность "разбалтывания" системы за счет цикличности интервалов стабилизации. Чтобы устранить этот недостаток, рассмотрим другой способ управления. Будем применять лишь одну линию переключения из имеющегося набора. А именно, зафиксируем некоторый момент времени $\bar{t} \in [0, t_f]$. В каждый текущий момент времени t выбора управляющего воздействия имеем состояние $x(t) = (V(t) - V_0, \gamma(t) - \gamma_0, W_x(t) - W_{x0}, W_h(t) - W_{h0})^T$. Вычисляем вектор $y(t) = X(t_f, \bar{t})x(t)$ и вектор $B(\bar{t}) = X(t_f, \bar{t})B$. Анализируем положение точки $y(t)$ относительно линии переключения $\Pi(\bar{t})$, используя вектор $B(\bar{t})$. Выбираем управляющее воздействие.

Таким образом, мы используем всего лишь одну линию переключения. Тем самым, в каждый текущий момент t предполагаем, что момент окончания процесса управления наступит через $t_f - \bar{t}$. В результатах моделирования, которые будут приведены ниже, было взято $t_f - \bar{t} = 3$. Это значение выбрано путем анализа результатов моделирования при различных \bar{t} .

Идея использования второго способа возникла в процессе обсуждения работы с В.М.Кейном и А.И.Красовым.

При использовании закона управления при помощи поверхности переключения возможны частые перекладки управления с одного крайнего значения на другое (в том случае, когда движение $y(t)$ идет в окрестности поверхности переключения). С целью уменьшения количества переключений введено следующее правило вычисления управляющего воздействия. Пусть d — расстояние по направлению вектора $B(t_f)(B(\bar{t}))$ в случае 2) от точки $y(t)$ до поверхности переключения. Положим

$$u^\epsilon = \begin{cases} u_0, & d > \epsilon \\ \frac{u_0 d}{\epsilon}, & d \leq \epsilon. \end{cases}$$

Здесь u_0 — значение, найденное в соответствии с описанными выше правилами 1 или 2, ϵ — заданное положительное число. В нелинейную систему при моделировании движений подается $\alpha = \alpha_0 + u^\epsilon$.

§ 5. Результаты моделирования

Рассмотрим задачу взлета. Начальное состояние, как и в [13], возьмем в виде

$$x = 0, \quad h = 50 \text{ фут}, \quad V = 276.8 \text{ фут сек}^{-1}, \quad \gamma = 6.989^\circ \pi/180.$$

Центр микровзрыва находится в начале движения, а именно, $a = 300$ фут, $b = 4300$ фут. Интенсивность $k = 50$.

Метод из [13] был запрограммирован и использовался при тех же, что и в [13], значениях параметров. На рис. 4 представлены графики, соответствующие первому способу управления. По горизонтальной оси откладывается время в секундах. Маркером выделены кривые, отвечающие способу управления из [13]. Сравнивая графики изменения высоты, отметим, что методу управления из [13] соответствует более плавная кривая. На графике, характеризующем изменение управления в силу первого способа, видны скачки управления. С целью получения более плавной реализации управления можно ввести дополнительное уравнение

$$\Delta \dot{\alpha} = k_u (\Delta \alpha - u^\epsilon).$$

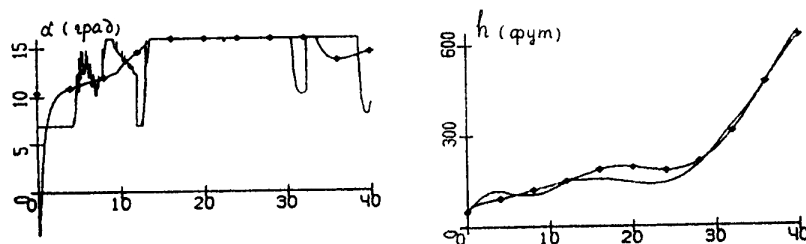


Рис. 4. Изменение угла атаки и высоты в задаче взлета. Способ управления 1.

В этом случае получаемое при помощи линий переключения управляющее воздействие u^e пропускается через инерционное звено первого порядка. Соответствующие графики показаны на рис. 5. Коэффициент k_u был взят равным 1. Схема использования робастной стратегии осталась прежней.

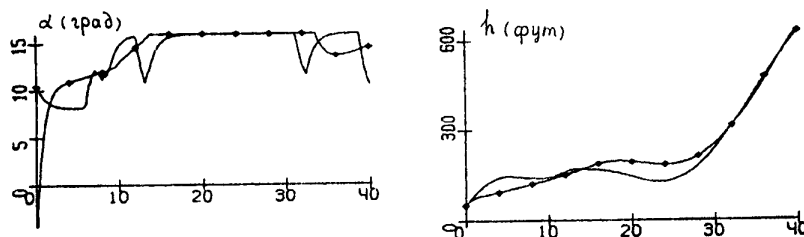


Рис. 5. Изменение угла атаки и высоты в задаче взлета. Способ управления 1 с дополнительным сглаживанием.

На рис. 6 представлены графики, отвечающие второму способу управления. Сравнение проводится с той же, что и в предыдущих вариантах, траекторией. В результате устранения эффекта "разбалтывания" (за счет использования лишь одной линии переключения) мы получаем более плавный, чем при первом способе управления, график изменения высоты. Отметим, что несмотря на различие минимаксного способа управления и способа управления из [13], графики изменения управления близки. Соответственно близкими получаются также графики изменения высоты и воздушной скорости.

Приведем результаты моделирования для задачи о прекращении посадки. Начальное состояние, как и в [12], бралось в виде

$$\alpha = 0, \quad h = 600 \text{ фут}, \quad V = 239.7 \text{ фут сек}^{-1}, \quad \gamma = -2.249^\circ \pi/180.$$

Использовался первый способ управления с $t_f = 40$, $t_* = 18$. На рис. 7 показаны графики изменения угла атаки, высоты и воздушной скорости, а также реализации вертикальной и горизонтальной скоростей ветра.

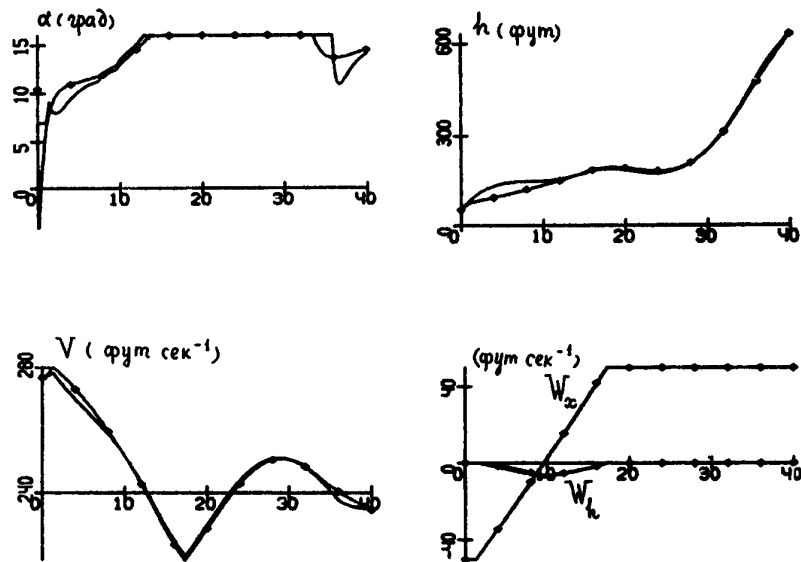


Рис. 6. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче взлета. Способ управления 2.

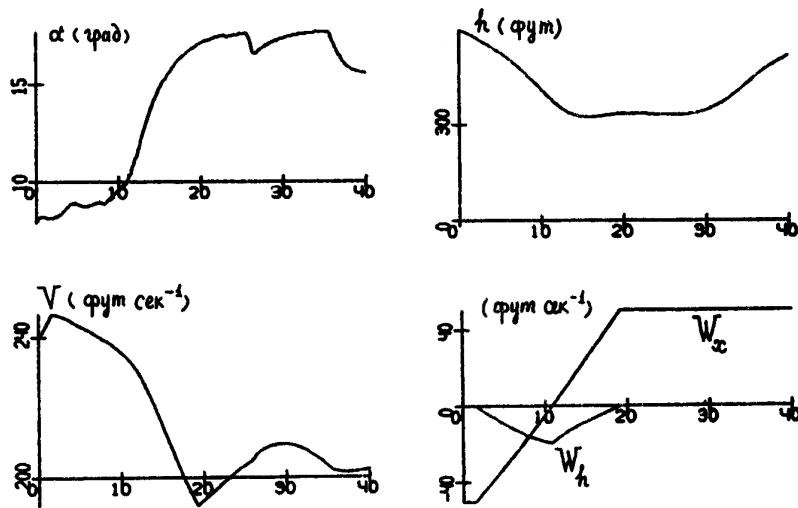


Рис. 7. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче о прекращении посадки. Способ управления 1.

Поступила 13.10.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боткин Н.Д., Пацко В.С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.– 1983.– N 4.– С.78–85.
2. Боткин Н.Д., Кейн В.М., Пацко В.С. Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке // Прикл. математика и механика.– 1984.– Т.48, N 4.– С.560–567.
3. Боткин Н.Д., Жуков С.П., Красов А.И. Комбинированный способ управления самолетом на посадке // Управление в динамических системах.– Свердловск: УрО АН СССР, 1990.– С.18–30.
4. Исследование по совершенствованию бортовых и наземных автоматизированных систем управления воздушными судами. Управление боковым движением самолета на посадке в условиях ветрового возмущения: Отчет о НИР / ОЛАГА; Исполн. Н.Д.Боткин, В.М.Кейн, А.И.Красов, В.С.Пацко.– ГР N 81104592; Инв. N 02830078880.– Л.,1983.– 78 с.
5. Кейн В.М., Париков А.Н., Смуров М.Ю. Об одном способе оптимального управления по методу экстремального прицеливания // Прикл. математика и механика.– 1980.– Т.44, N 3.– С.434–440.
6. Кейн В.М., Пацко В.С., Турова В.Л. Задача о посадке самолета в условиях сдвига ветра // Управление в динамических системах.– Свердловск: УрО АН СССР, 1990.– С.52–64.
7. Корнеев В.А., Меликян А.А., Титовский И.Н. Стабилизация глиссады самолета при ветровых возмущениях в минимаксной постановке // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.– 1985.– N 3.– С. 132–139.
8. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.– 456 с.
9. Разработка численных методов построения экстремальных ветровых возмущений, действующих на самолет на этапе посадки. Разработка алгоритмов построения экстремальных ветровых возмущений: Отчет о НИР (промежуточ.) / АН СССР. УрО. ИММ; Исполн. Н.Д.Боткин, В.С.Пацко, В.Л.Турова.– ГР N 01880003467; Инв. N 02880054701.– Свердловск, 1987.– 58 с.
10. Разработка численных методов построения экстремальных ветровых возмущений, действующих на самолет на этапе посадки. Рекомендации по имитации экстремальных ветровых возмущений: Отчет о НИР (заключит.) / АН СССР. УрО. ИММ; Исполн. Н.Д.Боткин, А.Г.Иванов, В.Л.Турова.– ГР N 01880003467; Инв. N 02890045178.– Свердловск, 1988.– 51 с.
11. Титовский И.Н. Игровой подход к задаче синтеза управления самолетом при заходе на посадку // Ученые записки ЦАГИ.– 1981.– Т.12, N 1.– С.85–92.
12. Bullirsch R., Montrone F., Pesch H.J. Abort landing in the presence of a windshear as a minimax optimal control problem / Munich University of Technology, Germany.– 1990.– Report N 210.
13. Chen Y.H., Pandey S. Robust control strategy for take-off performance in a windshear // Optimal Control Appl. and Methods.– 1989.– V.10.– P.65–79.
14. Leitmann G., Pandey S. Aircraft control for flight in an uncertain environment: takeoff in windshear // J. Optimiz. Theory and Appl.– 1991.– V.70, N 1.– P.25–55.
15. Miele A., Wang T., Melvin W.W. Optimal take-off trajectories in the presence of windshear // J. Optimiz. Theory and Appl.– 1986.– V.49, N 1.– P.1–45.
16. Miele A., Wang T., Melvin W.W. Guidance strategies for near-optimum take-off performance in a windshear // J. Optimiz. Theory and Appl.– 1986.– V.50, N 1.– P.1–47.
17. Miele A., Wang T., Tseng C.Y., Melvin W.W. Optimal abort landing trajectories in the presence of windshear // J. Optimiz. Theory and Appl.– 1987.– V.55, N 2.– P.165–202.