

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА

4

МОСКВА · 1984

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

УДК 517.977.8

НЕРЕГУЛЯРНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ

ПАЦКО В. С., ТАРАСОВА С. И.

Введение. Рассматривается модельный пример нерегулярной дифференциальной игры [1, 2] двух лиц с фиксированным моментом окончания. Динамика игры такая же, как и в известном примере «мальчик и крокодил» [3, 4], однако плата — другая. Инерционный объект (крокодил), двигаясь по прямой, стремится сблизиться в заданный момент θ с убегающим безынерционным объектом (мальчиком). При этом, в отличие от обычной постановки, скорость инерционного объекта в момент θ должна равняться нулю. Последнее условие приводит к усложнению задачи. Появляются новые интересные особенности. Главная из них состоит в возникновении особых оптимальных движений, расщепляющихся в каждый момент времени.

При записи в разностных координатах игра имеет второй порядок по фазовой переменной. Пространство игры имеет размерность три: добавляется еще одна координата — время. Основой решения служит построение в пространстве игры некоторой сингулярной поверхности, две части которой являются по терминологии Р. Айзекса рассеивающими, одна — эквивокальной [5, 6]. Эквивокальная часть как раз и состоит из особых оптимальных движений, расщепляющихся в каждый момент времени. Эквивокальная часть сингулярной поверхности набирается из бесконечного числа кусков. При попятном построении каждый следующий кусок строится на основе предыдущего.

Сингулярная поверхность определяет полностью не только функцию цены игры, но и оптимальную универсальную стратегию минимизирующего игрока. Для функции цены в целом нет явного аналитического описания. Однако в некоторых областях пространства игры цена совпадает с программным максимумом [1], и явное описание существует.

На рассматриваемой задаче хорошо видны типичные трудности, возникающие при решении конкретных нерегулярных дифференциальных игр. Задачу можно использовать как нетривиальный контрольный пример при разработке программ решения дифференциальных игр на ЭВМ.

1. Постановка задачи. Пусть движение конфликтно-управляемой системы на плоскости описывается соотношениями

$$\dot{y}_1(t) = y_2 - v(t), \quad \dot{y}_2(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq \mu, \quad v(t) \leq \nu. \quad (1.1)$$

Первый игрок, распоряжающийся выбором параметра $u(t)$, пытается обеспечить в заданный момент θ равенство $y_2(\theta) = 0$ и минимизирует при этом $|y_1(\theta)|$. Действия второго игрока, распоряжающегося выбором параметра $v(t)$, трактуем как действия помехи. Требуется найти наилучший гарантированный результат первого игрока (функцию цены игры) в классе управлений обратной связи.

Введем на R^2 функцию платы φ : $\varphi(z) = |z_1|$ при $z_2 = 0$ и $\varphi(z) = \infty$ при

$z_2 \neq 0$. Значения платы минимизирует первый игрок и максимизирует второй. Под стратегиями первого игрока будем понимать [2] функции из $L = (-\infty, \vartheta] \times R^2$ в $P = \{p \in R : |p| \leq \mu\}$. Функцию цены игры обозначим через Γ^0 . Пусть F — максимальное подмножество L , где цена игры конечна. Стратегию U^0 первого игрока назовем оптимальной универсальной [2, 7, 8, 9], если она оптимальна для всех начальных позиций из F .

В работе описывается способ вычисления Γ^0 и находится оптимальная универсальная стратегия U^0 . Последняя определяется при помощи некоторой поверхности S , разбивающей F на две части. В одной из них $U^0(t, z) = \mu$, в другой $U^0(t, z) = -\mu$. Приводятся просчитанные на ЭВМ для $\mu = \nu = 1$ графики сечений поверхности S , множества уровня функции цены Γ^0 , а также множества уровня функции программного максимина, оценивающей Γ^0 снизу. Несмотря на простой вид системы (1.1), полное исследование дифференциальной игры является весьма сложным. В связи с этим в статье опущены доказательства.

2. Функция программного максимина. Пусть $U^*(V^*)$ — множество всех измеримых функций на $(-\infty, \vartheta]$ со значениями в P ($Q = \{q \in R : |q| \leq \nu\}$). При $(\tau, x) \in L$, $u \in U^*$, $v \in V^*$ через $y(\cdot, \tau, x, u, v)$ обозначим решение системы (1.1) в силу функций u, v , определенное на $[\tau, \vartheta]$, с начальным условием x в момент τ . Положим $D = \{(t, z) \in L : |z_2| \leq \mu(\vartheta - t)\}$. Верхнюю из полуплоскостей, ограничивающих D , обозначим символом $E^{(1)}$, нижнюю — символом $E^{(2)}$ (рис. 1).

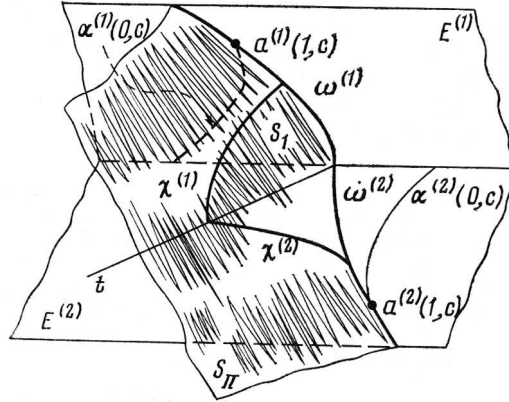


Рис. 1

Если $(\tau, x) \in L \setminus D$, то $|y_2(\vartheta, \tau, x, u, v)| \geq |x_2| - \mu(\vartheta - \tau) > 0$ при любых $u \in U^*$, $v \in V^*$. Стало быть, $\Gamma^0(\tau, x) = \infty$ при $(\tau, x) \in L \setminus D$. С другой стороны, очевидно, что любая стратегия U , удовлетворяющая условию $U(t, z) = -\mu \operatorname{sign} z_2$ при $(t, z) \in L \setminus D$, гарантирует приведение системы (1.1) на ось z_1 в момент ϑ из любой начальной позиции $(\tau, x) \in D$. Таким образом, $F = D$. Введем на множестве D функцию программного максимина

$$\Pi(\tau, x) = \max_{v \in V^*} \min_{u \in U^*} \varphi(y(\vartheta, \tau, x, u, v)). \quad (2.1)$$

При подсчете значений $\Pi(\tau, x)$ удобно перейти от системы (1.1) к системам

$$\dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t), \quad \dot{\xi}_2(t) = u(t), \quad |u(t)| \leq \mu, \quad (2.2)$$

$$\dot{s}_1(t) = v(t), \quad \dot{s}_2(t) = 0, \quad |v(t)| \leq \nu \quad (2.3)$$

с начальными условиями $\xi(\tau) = x$, $s(\tau) = 0$. Множество достижимости [1] $G^{(2)}(\vartheta, \tau, 0)$ системы (2.3) в момент ϑ при начальной позиции $(\tau, 0)$

представляет из себя отрезок на оси z_1 . Пусть $b^-(\tau)$, $b^+(\tau)$ — его крайние точки, $b_1^-(\tau) \leq b_1^+(\tau)$. Здесь и далее нижний индекс 1 (2) означает координату по оси z_1 (z_2). Нетрудно видеть, что множество достижимости $G^{(1)}(\vartheta, \tau, x)$ системы (2.2) пересекает ось z_1 , когда $(\tau, x) \in D$. Пусть $e^-(\tau, x)$, $e^+(\tau, x)$ — крайние точки отрезка пересечения, $e_1^-(\tau, x) \leq e_1^+(\tau, x)$. При $(\tau, x) \in D$ имеем $\Pi(\tau, x) = \max\{0, b_1^+(\tau) - e_1^+(\tau, x), e_1^-(\tau, x) - b_1^-(\tau)\}$. Числа $b_1^-(\tau)$, $b_1^+(\tau)$, $e_1^-(\tau, x)$, $e_1^+(\tau, x)$ вычисляются по формулам

$$b_1^\pm(\tau) = \pm v(\vartheta - \tau), \quad e_1^\pm(\tau, x) = x_1 + x_2(\vartheta - \tau)/2 \pm [\mu(\vartheta - \tau)^2/4 - x_2^2/4\mu].$$

Стало быть,

$$\Pi(\tau, x) = \max\{0, |x_1 + x_2(\vartheta - \tau)/2| - \mu(\vartheta - \tau)^2/4 + x_2^2/4\mu + v(\vartheta - \tau)\}.$$

Заметим, что $\Pi(\tau, x) > 0$ при $(\tau, x) \in D$, $\tau > \vartheta - 4v/\mu$. Рассмотрим поверхность $S_\Pi = \{(t, z) \in D : z_1 + z_2(\vartheta - t)/2 = 0\}$, разделяющую D на две части (рис. 1). Поверхность S_Π есть поверхность симметрии относительно функции программного максимина. А именно: если $(\tau, x) \in S_\Pi$ и $\Pi(\tau, x) > 0$, то максимум в (2.1) достигается на двух функциях $v^{(1)}(t) = -v$, $v^{(2)}(t) = v$; если (τ, x) принадлежит множеству

$$D_\Pi^{(1)} = \{(t, z) \in D : z_1 + z_2(\vartheta - t)/2 > 0\}$$

$$(D_\Pi^{(2)} = \{(t, z) \in D : (t, -z) \in D_\Pi^{(1)}\}),$$

лежащему справа (слева) от S_Π , и $\Pi(\tau, x) > 0$, то максимум в (2.1) достигается только на функции $v^{(1)}$ ($v^{(2)}$).

Выделим в D подмножество $\Phi^{(1)}$ ($\Phi^{(2)}$) всех точек (τ, x) , для каждой из которых $e_1^-(\tau, x) \geq 0$ ($e_1^+(\tau, x) \leq 0$). Множества $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$ описываются формулами

$$\Phi^{(1)} = \{(t, z) \in D : z_1 - \mu(\vartheta - t)^2/4 + z_2^2/4\mu + z_2(\vartheta - t)/2 \geq 0\},$$

$$\Phi^{(2)} = \{(t, z) \in D : (t, -z) \in \Phi^{(1)}\}.$$

Очевидно, что

$$\max_{v \in V^*} \min_{u \in U^*} \varphi(y(\vartheta, \tau, x, u, v)) = \min_{u \in U^*} \max_{v \in V^*} \varphi(y(\vartheta, \tau, x, u, v))$$

при $(\tau, x) \in \Phi = \Phi^{(1)} \cup \Phi^{(2)}$. Стало быть,

$$\Gamma^0(\tau, x) = \Pi(\tau, x), \quad (\tau, x) \in \Phi. \quad (2.4)$$

Для $c \geq 0$ примем $W_\Pi(c) = \{(\tau, x) \in D : \Pi(\tau, x) \leq c\}$. Используя описание множества Φ и формулу для функции Π , получаем из (2.4), в частности, что $\Gamma^0(\tau, x) = \Pi(\tau, x)$, если $(\tau, x) \in \{(t, z) \in D \setminus W_\Pi(c) : t \geq h(1, c) = \vartheta - c/v, c > v^2/\mu\}$.

Покажем, что $\Gamma^0(\tau, x) = \Pi(\tau, x)$ при $(\tau, x) \in W_\Pi(v^2/\mu)$. Пусть $f(t, z, p, q)$ — трехмерный вектор с координатами 1, $z_2 - q$, p по осям t , z_1 , z_2 . Символом $n(t, z)$ обозначим направленную в $D_\Pi^{(1)}$ единичную нормаль к S_Π в точке (t, z) . Составим неравенства

$$\langle n(t, z), f(t, z, -\mu, -v) \rangle > 0, \quad \langle n(t, z), f(t, z, \mu, v) \rangle < 0.$$

На поверхности S_Π выделим множество всех точек (t, z) , для каждой из которых выполнены оба неравенства. Замыкание такого множества обозначим через S_1 . Проведя несложные вычисления, получим: $S_1 = \{(t, z) \in S_\Pi : t \geq \vartheta_1\} \cup \{(t, z) \in S_\Pi : |z_2| \leq 2v - \mu(\vartheta - t), \vartheta_2 \leq t \leq \vartheta_1\}$, где $\vartheta_1 = \vartheta - v/\mu$, $\vartheta_2 = \vartheta - 2v/\mu$. Множество S_1 показано на рис. 1. Линии $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$, вырезающие S_1 из S_Π , лежат на границе множества $W_\Pi(v^2/\mu)$ и являются интегральными кривыми системы (1.1) соответственно при $u^{(2)}(t) \equiv \mu$, $v^{(2)}(t) \equiv v$ и $u^{(1)}(t) \equiv -\mu$, $v^{(1)}(t) \equiv -v$, выходящими из точки $(\vartheta_2, 0, 0)$. Используя определение S_1 , нетрудно показать, что для всякой точки

$(\tau, x) \in W_{\Pi}(v^2/\mu)$ по любой из функций $v^{(1)}, v^{(2)}$ можно подобрать такую функцию $u \in U^*$, что вдоль возбуждаемой интегральной кривой системы (1.1), выходящей из (τ, x) , значение функции Π на промежутке $[\tau, \theta]$ не возрастает. Отсюда вытекает, что при любом $c \leq v^2/\mu$ множество $W_{\Pi}(c)$ является u -стабильным [2]. Следовательно, $\Gamma^0(\tau, x) = \Pi(\tau, x)$, $(\tau, x) \in W_{\Pi}(v^2/\mu)$.

Опишем границу множества $W_{\Pi}(c)$ при $c \leq v^2/\mu$. Предварительно введем некоторые обозначения. Через $Y((\tau, x), p, q)$ обозначим интегральную кривую системы (1.1) при $t \leq \tau$, $u(t) = p$, $v(t) = q$, начинающуюся в точке (τ, x) . Положим $\omega^{(1)} = Y((\theta, 0), -\mu, 0)$. Линия $\omega^{(1)}$ (рис. 1) есть пересечение края поверхности S_{Π} с полуплоскостью $E^{(1)}$. Символом $\alpha^{(1)}(0, c)$, $c > 0$, обозначим дугу кривой $Y((\theta, -c, 0), -\mu, -v)$, расположенную в $E^{(1)}$ между осью z_1 и кривой $\omega^{(1)}$. Пусть $a^{(1)}(1, c) = (\theta - c/v, -\mu c^2/2v^2, \mu c/v)$ — точка выхода кривой $\alpha^{(1)}(0, c)$ на линию $\omega^{(1)}$. Через $\omega^{(2)}, \alpha^{(2)}(0, c), a^{(2)}(1, c)$ обозначим кривые и точку симметричные относительно оси t соответственно кривым $\omega^{(1)}, \alpha^{(1)}(0, c)$ и точке $a^{(1)}(1, c)$. Т. е. $\omega^{(2)} = \{(t, z) : (t, -z) \in \omega^{(1)}\}$ и т. д. Условимся в дальнейшем при упоминании о симметрии опускать слова «относительно оси t ». Пусть $\Sigma^{(1)}(1, c)$ — поверхность, набранная из линий $Y((\tau, x), -\mu, -v)$, когда (τ, x) пробегает $\alpha^{(2)}(0, c)$, а $\Sigma^{(2)}(1, c)$ — поверхность, симметричная $\Sigma^{(1)}(1, c)$.

При $c \in (0, v^2/\mu]$ граница множества $W_{\Pi}(c)$ составляется из кусков $K^{(1)}(c), K^{(2)}(c)$ поверхностей $\Sigma^{(1)}(1, c), \Sigma^{(2)}(1, c)$, лежащих соответственно справа и слева от S_{Π} , а также кусков полуплоскостей $E^{(1)}, E^{(2)}$. Линия негладкой склейки поверхностей $K^{(1)}(c), K^{(2)}(c)$ принадлежит S_1 . При $c = v^2/\mu$ она совпадает с объединением линий $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}$.

3. Экивокальная поверхность. Опишем способ понятного построения в D специальных линий, играющих основную роль при дальнейшем решении задачи. Именно: каждому $c > c_1 = v^2/\mu$ поставим в соответствие две линии $\alpha^{(1)}(c)$ и $\alpha^{(2)}(c)$, строящиеся по кускам: вначале первый, на его основе второй и т. д. В зависимости от c линии $\alpha^{(1)}(c), \alpha^{(2)}(c)$ будут состоять либо из конечного, либо из бесконечного числа кусков. Поверхность, набираемая из линий $\alpha^{(1)}(c), \alpha^{(2)}(c)$, когда c пробегает все значения больше c_1 , будет по терминологии [5] экивокальной поверхностью.

Предположим, что в D задана кривая $\bar{\alpha}^{(1)}$, являющаяся интегральной кривой системы (1.1) в силу функции $v^{(2)}(t) = v$ и некоторой гладкой функции $\bar{u} \in U^*$. Будем считать, что $\bar{\alpha}^{(1)}$ определена по t на некотором отрезке $[t_*, \bar{t}]$ и функция \bar{u} удовлетворяет на этом отрезке при любом t условию $-\mu \leq u(t) < \mu$. Пусть $\bar{a}^{(1)}$ — точка кривой, соответствующая моменту \bar{t} , $a_*^{(1)}$ — моменту t_* . Символом $\bar{\alpha}^{(2)}$ обозначим кривую, симметричную $\bar{\alpha}^{(1)}$, символами $\bar{a}^{(2)}, a_*^{(2)}$ — точки симметричные точкам $\bar{a}^{(1)}, a_*^{(1)}$.

Условимся, что $a_*^{(1)} \in Y(\bar{a}^{(2)}, -\mu, -v)$, $a_*^{(2)} - \bar{a}^{(2)} > v$.

Опишем правило H , сопоставляющее кривой $\bar{\alpha}^{(1)}$ некоторую кривую $\alpha_*^{(1)}$. Составим из линий $Y((\tau, x), -\mu, -v)$, $(\tau, x) \in \bar{\alpha}^{(2)}$, гладкую поверхность $\Sigma_*^{(1)}$. При любом $(\tau, x) \in D$ через $s^{(1)}(\tau, x)$ обозначим такую точку на линии $Y((\tau, x), -\mu, -v)$, проекция которой на ось z_2 равна $x_2 + v$. Положим $e_*^{(1)} = \{s^{(1)}(\tau, x) : (\tau, x) \in \bar{\alpha}^{(2)}\}$. Кривая $e_*^{(1)}$ делит поверхность $\Sigma_*^{(1)}$ на две части (рис. 2). Ту из них, что не содержит линию $\bar{\alpha}^{(2)}$, обозначим $\Lambda_*^{(1)}$. Для определенности включим $e_*^{(1)}$ в $\Lambda_*^{(1)}$.

Для любой точки $(t, z) \in \Sigma_*^{(1)} \setminus \bar{\alpha}^{(2)}$ существует единственное $p_*^{(1)}(t, z) = -\mu + 2v\mu/(z_2 - \rho_2(t, z))$, при котором вектор $f(t, z, p_*^{(1)}(t, z), v)$, приложенный к (t, z) , касается поверхности $\Sigma_*^{(1)}$. Здесь $\rho_2(t, z)$ — координата по оси z_2 точки $\rho(t, z)$ на кривой $\bar{\alpha}^{(2)}$, принадлежащей той же образую-

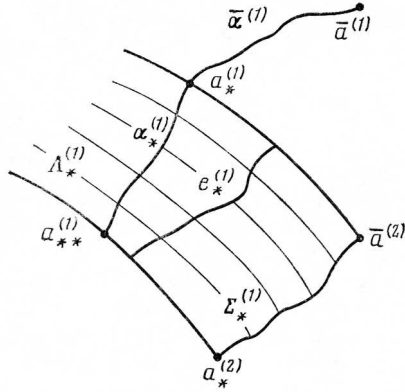


Рис. 2

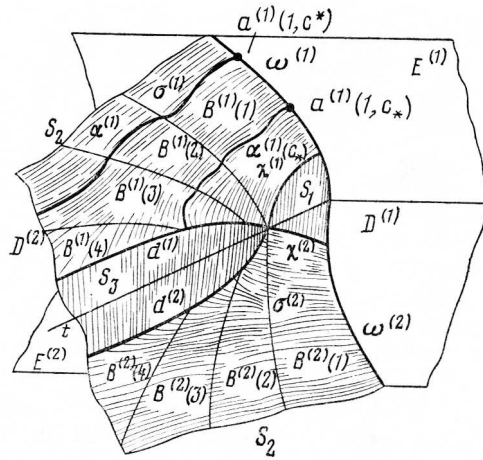


Рис. 3

щей поверхности $\Sigma_*^{(1)}$, что и точка (t, z) . Если $(t, z) \in \Lambda_*^{(1)} \setminus e_*^{(1)}$, то $|p_*^{(1)}(t, z)| < \mu$. Если $(t, z) \in e_*^{(1)}$, то $p_*^{(1)}(t, z) = \mu$. В случае $(t, z) \in \Sigma_*^{(1)} \setminus \Lambda_*^{(1)}$ среди векторов $f(t, z, p, v)$, $|p| \leq \mu$, нет касательных к $\Sigma_*^{(1)}$. Отметим, что $a_*^{(1)} \in \Lambda_*^{(1)} \setminus e_*^{(1)}$.

Пусть $p^{(1)}$ — гладкая функция, заданная в некотором открытом множестве, содержащем $\Sigma_*^{(1)} \setminus \bar{\alpha}^{(2)}$, и совпадающая на $\Sigma_*^{(1)} \setminus \bar{\alpha}^{(2)}$ с функцией $p_*^{(1)}$. Рассмотрим при $t \leq t_*$ интегральную кривую системы

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t) - v, \quad \dot{y}_2(t) = p^{(1)}(t, y(t)), \quad (3.1)$$

выходящую из точки $a_*^{(1)}$. Эта кривая идет по поверхности $\Sigma_*^{(1)}$, последовательно пересекая ее образующие, и за конечное время выходит на край куска $\Lambda_*^{(1)}$, что составляется из линии $e_*^{(1)}$ и части образующей $Y(a_*^{(2)}, -\mu, -v)$, принадлежащей $\Lambda_*^{(1)}$ (рис. 2). Точку выхода обозначим $a_*^{(1)}$, а ее координату по оси t — через t_{**} . Пусть $\alpha_*^{(1)}$ — интегральная кривая системы (3.1) от точки $a_*^{(1)}$ до $a_{**}^{(1)}$. Таково правило H . Можно показать, что если функция u , фигурирующая в определении кривой $\bar{\alpha}^{(1)}$, удовлетворяет при любом $t \in [t_*, \bar{t}]$ строгому неравенству $|\bar{u}(t)| < \mu$ и $a_{**}^{(1)} \in e_*^{(1)}$, то кривая $\alpha_*^{(1)}$ подходит к линии $e_*^{(1)}$ под ненулевым углом.

Для любого $c > c_1$ положим $\alpha^{(1)}(1, c) = H(\alpha^{(1)}(0, c))$, $\alpha^{(1)}(2, c) = H(\alpha^{(1)}(1, c))$ и т. д. до первого номера $\zeta(c)$ такого, что кривая $\alpha_*^{(1)} = H(\bar{\alpha}^{(1)})$ при $\bar{\alpha}^{(1)} = \alpha^{(1)}(\zeta(c) - 1, c)$ заканчивается на линии $e_*^{(1)}$ (т. е. $a_{**}^{(1)} \in e_*^{(1)}$). Если не существует номера c с таким свойством, примем $\zeta(c) = \infty$. При любых $c > c_1$ и $1 \leq j < \zeta(c) + 1$ под кривой $\alpha^{(2)}(j, c)$ будем понимать кривую симметричную $\alpha^{(1)}(j, c)$. Считая $\bar{\alpha}^{(1)} = \alpha^{(1)}(j-1, c)$, введем обозначения

$$\Sigma^{(1)}(j, c) = \Sigma_*^{(1)}, \quad e^{(1)}(j, c) = e_*^{(1)}, \quad h(j, c) = t_*,$$

$$h(j+1, c) = t_{**}, \quad a^{(1)}(j, c) = a_*^{(1)}, \quad a^{(1)}(j+1, c) = a_{**}^{(1)}.$$

Символы $\Sigma^{(2)}(j, c)$, $a^{(2)}(j, c)$, $a^{(2)}(j+1, c)$ будут означать поверхность и точки симметричные $\Sigma^{(1)}(j, c)$, $a^{(1)}(j, c)$, $a^{(1)}(j+1, c)$.

Можно показать, что $\zeta(c) > 1$ при любом $c > c_1$. Введем склеенные кривые

$$\alpha^{(i)}(c) = \bigcup_j \alpha^{(i)}(j, c), \quad 1 \leq j < \zeta(c) + 1, \quad i=1, 2.$$

При любых $c > c_1$ и $1 \leq j < \zeta(c) + 1$ протяженность во времени участка $\alpha^{(1)}(j, c)$ кривой $\alpha^{(1)}(c)$, т. е. разность $h(j, c) - h(j+1, c)$, конечна. При $1 \leq j < \zeta(c)$ выполнена также оценка снизу $h(j, c) - h(j+1, c) > v/\mu$. Она вытекает из того, что точки $a^{(1)}(j, c)$, $a^{(2)}(j, c)$ симметричны, точки $a^{(1)}(j+1, c)$ и $a^{(2)}(j, c)$ лежат на одной образующей поверхности $\Sigma^{(1)}(j, c)$, при $1 \leq j < \zeta(c)$ выполнено неравенство $a_2^{(1)}(j+1, c) - a_2^{(2)}(j, c) > v$. Таким образом, условие $\zeta(c) < \infty$ эквивалентно условию конечности во времени кривой $\alpha^{(1)}(c)$, а значит и $\alpha^{(2)}(c)$.

Для всякого $c > c_1$, при котором $\zeta(c) < \infty$, положим $\theta(c) = h(\zeta(c) + 1, c)$. Если $\zeta(c) = \infty$, примем $\theta(c) = -\infty$. Пусть $(t, w^{(i)}(t, c))$, $i=1, 2$, означает точку на $\alpha^{(i)}(c)$, соответствующую моменту t . При любом $\tau \in (\theta(c), \theta]$ через $T(\tau, c)$ обозначим полуинтервал $(\theta(c), \tau]$, если $\theta(c) = -\infty$, и отрезок $[\theta(c), \tau]$, если $\theta(c) > -\infty$. При $t \in T(h(1, c), c)$ пусть $\rho^{(1)}(t, c)$ — точка на кривой $\alpha^{(2)}(c) \cup \alpha^{(2)}(0, c)$ такая, что $(t, w^{(1)}(t, c)) \in Y(\rho^{(1)}(t, c), -\mu, -v)$. Для любого $c > c_1$ кривая $\alpha^{(1)}(c)$ есть интегральная кривая системы (1.1) при $v^{(2)}(t) = v$ и некоторой функции $u \in U^*$, причем при каждом $t \in T(h(1, c), c)$ справедливо равенство $u(t) = -\mu + 2v\mu / (w_2^{(1)}(t, c) - \rho_2^{(1)}(t, c))$. Таким образом, $\alpha^{(1)}(c)$ — гладкая кривая. Гладкой является и кривая $\alpha^{(2)}(c)$.

Опишем качественное поведение кривых $\alpha^{(1)}(c)$, $c > c_1$. Прежде всего отметим, что для любых $c > c_1$ и $t \in T(h(1, c), c)$ выполнены неравенства $w_1^{(1)}(t, c) < 0$, $w_2^{(1)}(t, c) > 0$. Пусть $c^* > c_1$ и $\theta(c^*) > -\infty$ ($\theta(c^*) = -\infty$). Тогда $\theta(c^*) < \theta(c_*)$ ($\theta(c^*) = -\infty$) и при любом $t \in T(h(1, c^*), c^*)$ справедливы неравенства $w_1^{(1)}(t, c^*) < w_1^{(1)}(t, c_*)$, $w_2^{(1)}(t, c^*) > w_2^{(1)}(t, c_*)$. Из алгоритма построения кривых $\alpha^{(1)}(c)$ следует, что если при некоторых $c > c_1$ и $1 \leq j < \zeta(c)$ для любого $t \in [h(j+1, c), h(j, c)]$ имеет место неравенство $w_2^{(1)}(t, c) - \rho_2^{(1)}(t, c) > 2v$ ($< 2v$), то $\theta(c) = -\infty$ ($\theta(c) > -\infty$) и функция $w_2^{(1)}(\cdot, c)$ строго возрастает (строго убывает) на $T(h(j, c), c)$ с убыванием t . В частности, $w_2^{(1)}(t, c) - \rho_2^{(1)}(t, c) > 2v$, $t \in [h(2, c), h(1, c)]$ при $c > 2c_1$. Таким образом, если $c > 2c_1$, то $\theta(c) = -\infty$ и $w_2^{(1)}(\cdot, c)$ строго возрастает на $T(h(1, c), c)$ с убыванием t . С другой стороны, при $c > c_1$, но достаточно близких к c_1 , выполнено неравенство $w_2^{(1)}(t, c) - \rho_2^{(1)}(t, c) < 2v$, $t \in [h(2, c), h(1, c)]$. Следовательно, $\theta(c) > -\infty$ и $w_2^{(1)}(\cdot, c)$ строго убывает на $T(h(1, c), c)$ с убыванием t при указанных c . Если $c \rightarrow c_1$ сверху, то $\theta(c) \rightarrow \theta_2 = \theta - 2v/\mu$. Так как при всех c , для которых $\theta(c) > -\infty$, кривая $\alpha^{(1)}(\zeta(c), c)$ подходит к линии $e^{(1)}(\zeta(c), c)$ под ненулевым углом, то множество $\{c > c_1 : \theta(c) > -\infty\}$ открыто. Отсюда, учитывая монотонную зависимость $\theta(c)$ от c , получаем существование такого числа \bar{c} , что $\theta(c) > -\infty$ при $c \in (c_1, \bar{c})$ и $\theta(c) = -\infty$ при $c \geq \bar{c}$. Число \bar{c} заключено в пределах $1.298c_1 < \bar{c} < 1.5c_1$. Если $c \in (c_1, \bar{c})$, то фазовая траектория на плоскости z_1, z_2 функции $w^{(1)}(\cdot, c)$ при уменьшении t один раз пересекает слева направо параболу $z_1 = (z_2^2 - 2vz_2)/2\mu$. Если $c \geq \bar{c}$, то при любом $t \in T(h(1, c), c)$ точка $w^{(1)}(t, c)$ лежит слева от этой параболы. Описан-

ные свойства кривых $\alpha^{(1)}(c)$, $c > c_1$, можно легко переформулировать, используя симметрию, для кривых $\alpha^{(2)}(c)$, $c > c_1$.

Символом S_2 обозначим поверхность, набранную из линий $\alpha^{(1)}(c)$, $\alpha^{(2)}(c)$, $c > c_1$. Пусть $B_j^{(i)}$ — часть S_2 , составленная из линий $\alpha^{(i)}(j, c)$, $c > c_1$ (рис. 3). В целом для S_2 не удается получить аналитическое описание. Для ее частей $B^{(1)}(1)$ и $B^{(2)}(1)$ такое описание есть. Выведем формулу для $B^{(1)}(1)$. Любая из линий $\alpha^{(1)}(1, c)$, $c > c_1$, есть интегральная кривая системы (1.1) при $v^{(2)}(t) \equiv v$, удовлетворяющая в момент $t_* = h(1, c) = \vartheta - c/v$ условиям $w_1^{(1)}(t_*, c) = -\mu(\vartheta - t_*)^2/2$, $w_2^{(1)}(t_*, c) = \mu(\vartheta - t_*)$ и идущая при $t \leq t_*$ по поверхности $\Sigma^{(1)}(1, c)$. Поверхность $\Sigma^{(1)}(1, c)$ описывается равенством

$$z_1 + (z_2 + \mu(\vartheta - t))^2/4\mu - \mu(\vartheta - t)^2/2 + v(\vartheta - t) = c. \quad (3.2)$$

Используя (1.1), (3.2), заключаем, что функция $w_2^{(1)}(\cdot, c)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{y}_2(t) = -\mu + 4v\mu/(y_2(t) + \mu(\vartheta - t))$. Интегрируя это уравнение с учетом краевого условия $t_* = \vartheta - c/v$, $y_2(t_*) = \mu(\vartheta - t_*)$, получаем связь между t и z_2 вдоль $\alpha^{(1)}(1, c)$:

$$z_2 + \mu(\vartheta - t) - 2v = 2(\mu c/v - v) \exp[(\mu(\vartheta - t) - z_2)/2v]. \quad (3.3)$$

Исключая c из (3.2), (3.3), имеем

$$z_1 = \frac{v}{2\mu}(z_2 + \mu(\vartheta - t) - 2v) \exp \frac{z_2 - \mu(\vartheta - t)}{2v} - (z_2 + \mu(\vartheta - t))^2/4\mu + \mu(\vartheta - t)^2/2 - v(\vartheta - t) + v^2/\mu. \quad (3.4)$$

Поверхность $B^{(1)}(1)$ высекается из поверхности (3.4) линиями $\omega^{(1)}$, $\chi^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$ (рис. 3). Линии $\omega^{(1)}$, $\chi^{(1)}$ описаны в разделе 2. Линия $\sigma^{(1)}$ есть пересечение поверхности (3.4) с поверхностью

$$z_1 = -vz_2/\mu - v(\vartheta - t)/2 + \mu(\vartheta - t)^2/2 - (z_2 + \mu(\vartheta - t))^2/4\mu,$$

набранной из линий $Y(a^{(2)}(1, c), -\mu, -v)$, $c > c_1$.

4. Сингулярная поверхность S . Пусть $i=1, 2$, $c > c_1$. Рассмотрим поверхность $\Sigma^{(i)}(c)$, являющуюся склейкой поверхностей $\Sigma^{(i)}(j, c)$, $1 \leq j < \zeta(c) + 1$. При $c \in (c_1, \bar{c})$ среди образующих поверхности $\Sigma^{(i)}(c)$ есть единственная кривая, проходящая через точку $a^{(i)}(\zeta(c) + 1, c) = (\theta(c), w^{(i)}(\theta(c), c))$. Эта кривая делит $\Sigma^{(i)}(c)$ на две части. Ту из них, что не содержит точек линии $\alpha^{(i)}(c)$, за исключением точки $a^{(i)}(\zeta(c) + 1, c)$, обозначим $J^{(i)}(c)$. Каждая из поверхностей $J^{(1)}(c)$, $J^{(2)}(c)$ (они симметричны) пересекается с осью t в единственной точке, которую обозначим $\pi(c)$. Пересечение поверхностей $J^{(1)}(c)$, $J^{(2)}(c)$ есть линия, состоящая из двух симметричных дуг, соединяющих $\pi(c)$ с $a^{(1)}(\zeta(c) + 1, c)$ и $a^{(2)}(\zeta(c) + 1, c)$. Пусть $\beta^{(1)}(c)$ — первая дуга, $\beta^{(2)}(c)$ — вторая. Используем для точек дуги $\beta^{(i)}(c)$, $i=1, 2$, как и для точек кривой $\alpha^{(i)}(c)$, обозначение $(t, w^{(i)}(t, c))$. Пусть $g(c)$ — координата по оси t точки $\pi(c)$. Можно показать, что при монотонном уменьшении t на промежутке $[g(c), \theta(c)]$ координата $w_2^{(1)}(t, c)$ монотонно убывает, а $w_1^{(1)}(t, c)$ монотонно возрастает. Пусть $\bar{c} > c^* > c_* > c_1$. Тогда $g(\bar{c}^*) < g(c_*)$ и

$$w_2^{(1)}(t, c^*) > w_2^{(1)}(t, c_*), w_1^{(1)}(t, c^*) < w_1^{(1)}(t, c_*) \text{ при всех } t \in [g(c_*), h(1, c^*)].$$

Аналогичные свойства справедливы и для $w^{(2)}(\cdot, c)$.

Символом S_3 обозначим поверхность, набранную из линий $\beta^{(1)}(c)$, $\beta^{(2)}(c)$, $c \in (c_1, \bar{c})$. Поверхность S_3 ограничена линией $d^{(1)} = \{a^{(1)}(\zeta(c) + 1, c) : c \in (c_1, \bar{c})\}$ и симметричной ей линией $d^{(2)}$ (рис. 3). Пусть S — склейка поверхностей S_1, S_2, S_3 . Часть D справа от S обозначим $D^{(1)}$, слева $D^{(2)}$.

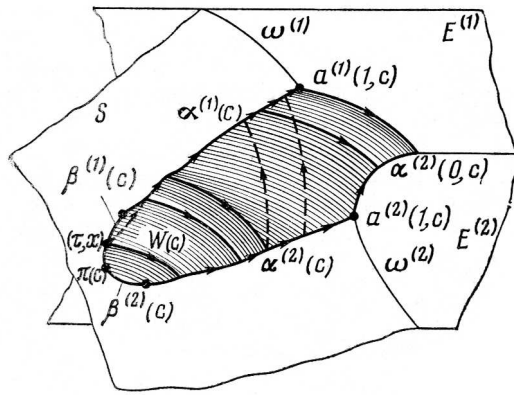


Рис. 4

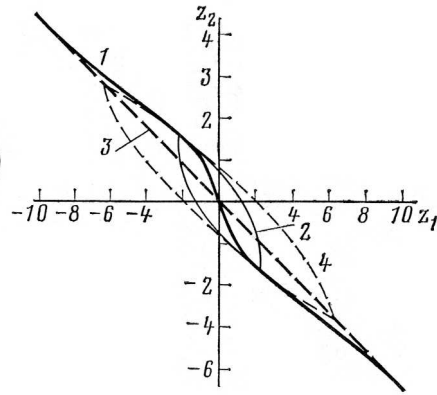


Рис. 5

Будем считать, что $\Sigma^{(i)}(c) = \Sigma^{(i)}(1, c)$ при $c \leq c_i, i=1, 2$. Пусть $K^{(i)}(c), i=1, 2, c>0$ — часть поверхности $\Sigma^{(i)}(c)$, лежащая в замыкании множества $D^{(i)}$. Через $K(c)$ обозначим склейку поверхностей $K^{(1)}(c), K^{(2)}(c)$, а через $W(c)$ — максимальное замкнутое подмножество множества D , ограниченное поверхностью $K(c)$. На рис. 4 показано множество $W(c)$ для $c \in (c_1, \bar{c})$. При $c \in (0, c_1]$ множество $W(c)$ совпадает с множеством $W_{\Pi}(c)$, рассмотренным в разделе 2. Введем функцию

$$\Gamma(t, z) = \begin{cases} \min \{c > 0 : (t, z) \in W(c)\}, & (t, z) \in D, \\ \infty, & (t, z) \in L \setminus D. \end{cases}$$

Оказывается, что функция Γ и является функцией цены игры Γ^0 , а поверхность S вместе с полуплоскостями $E^{(1)}, E^{(2)}$ определяет универсальную оптимальную стратегию первого игрока. Именно, универсальной оптимальной стратегией U^0 первого игрока является любая однозначная выборка из многозначной функции

$$U^0(t, z) = \begin{cases} \{-\mu\}, & (t, z) \in H^{(1)} \cup \text{int } D^{(1)}, \\ \{\mu\}, & (t, z) \in H^{(2)} \cup \text{int } D^{(2)}, \\ P, & (t, z) \in S \cup E^{(1)} \cup E^{(2)}. \end{cases}$$

Здесь $H^{(1)}(H^{(2)})$ — часть L выше полуплоскости $E^{(1)}(E^{(2)})$; int — символ внутренности. На рис. 5 приведены просчитанные на ЭВМ для $\mu = \nu = 1$ графики сечений поверхности S (линия 1) и множества уровня $\Gamma^0(t, z) \leq 1.5$ (линия 2) функции цены игры. Цифрой 3 обозначено сечение поверхности S_{Π} , а цифрой 4 — сечение множества уровня $\Pi(t, z) \leq 1.5$ функции программного максимина. Все сечения сделаны при $t = \theta - 4.5$.

5. Оптимальные движения. Пусть $Z(\tau, x)$ — пучок на $[\tau, \theta]$ интегральных кривых включения

$$\dot{y}_1(t) \in y_2(t) + Q, \quad \dot{y}_2(t) \in U^0(t, y(t)),$$

выходящих из точки $(\tau, x) \in D$. Выделим в $Z(\tau, x)$ кривые, идущие вплоть до момента θ по границе множества $W(c_0) = \{(t, z) \in D : \Gamma^0(t, z) \leq c_0\}$, где $c_0 = \Gamma^0(\tau, x)$. Пусть $Z^0(\tau, x)$ — пучок всех таких кривых. Справедливы следующие свойства.

1) Если некоторая кривая пучка $Z^0(\tau, x)$ на некотором промежутке времени $[\tau_*, \tau^*]$ идет во внутренности множества $D^{(1)}(D^{(2)})$, то на этом промежутке она идет по образующей поверхности $K^{(1)}(c_0)(K^{(2)}(c_0))$.

2) Если сечение пучка $Z^0(\tau, x)$ в некоторый момент $t^* \in [\tau, \theta)$ содержит точку кривой $\alpha^{(i)}(j, c_0)$, $i=1, 2$; $1 \leq j < \xi(c) + 1$, то в пучке $Z^0(\tau, x)$ есть кривая, идущая при $t \geq t^*$ по $\alpha^{(i)}(c_0)$ до попадания в точку $a^{(i)}(1, c_0)$, и кривая, идущая при $t \geq t^*$ по образующей поверхности $K^{(i)}(c_0)$ до попадания на кривую $\alpha^{(k)}(j-1, c_0)$. Здесь $k=2$ для $i=1$ и $k=1$ для $i=2$.

3) Если $(\tau, x) \in S_3$, то из точки (τ, x) выходят две кривые пучка $Z^0(\tau, x)$: одна идет по образующей поверхности $K^{(1)}(c_0)$ до выхода на $\alpha^{(2)}(c_0)$, другая — по образующей поверхности $K^{(2)}(c_0)$ до выхода на $\alpha^{(1)}(c_0)$.

4) Если $(\tau, x) \in S_1$, $(\tau, x) \notin E^{(1)} \cup E^{(2)}$, то из точки (τ, x) выходят две кривые пучка $Z^0(\tau, x)$: одна идет по образующей поверхности $K^{(1)}(c_0)$ до выхода на $\alpha^{(2)}(0, c_0)$, другая — по образующей поверхности $K^{(2)}(c_0)$ до выхода на $\alpha^{(1)}(0, c_0)$.

5) Если сечение пучка $Z^0(\tau, x)$ в некоторый момент $t^* \in [\tau, \theta)$ содержит точку кривой $\alpha^{(i)}(0, c_0)$, $i=1, 2$, не совпадающую с $a^{(i)}(1, c_0)$, то любая кривая пучка, проходящая через эту точку, идет на $[\tau, \theta]$ по $\alpha^{(i)}(0, c_0)$.

На рис. 4 показан качественный вид некоторых кривых пучка $Z^0(\tau, x)$ при $(\tau, x) \in S_3$, $c_0 = \Gamma^0(\tau, x) \in (c_1, \bar{c})$.

Содержательно пучок $Z^0(\tau, x)$ можно истолковать как пучок движений в дифференциальной игре (1.1) из начальной позиции (τ, x) , когда «оба игрока действуют оптимально». Перечисленные свойства пучка позволяют назвать (используя терминологию [5]) поверхности S_1, S_3 — рассеивающими, а поверхность S_2 — экивокальной. Поверхность S_2 набирается из бесконечного числа кусков, строящихся последовательно. Явное аналитическое описание удается получить лишь для первого куска $B^{(1)}(1)$ и симметричного ему куска $B^{(2)}(1)$. Аналитическое описание имеется для поверхности S_1 и отсутствует для поверхности S_3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Пашков А. Г. Об одной игре сближения. — Прикл. матем. и механ., 1970, т. 34, № 5.
4. Меликян А. А. О минимальных наблюдениях в одной игре сближения. — Прикл. матем. и механ., 1973, т. 37, № 3.
5. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
6. Меликян А. А. Необходимые условия оптимальности на поверхности разрыва одного типа в дифференциальной игре. — Изв. АН СССР. Техн. киберн., 1981, № 4.
7. Красовский Н. Н. Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели. — Математический сборник, 1978, т. 107, вып. 4.
8. Субботина Н. Н. Универсальные оптимальные стратегии в дифференциальных играх. — Дифференц. уравн., 1983, т. 19, № 11.
9. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Универсальная стратегия в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. — Проблемы управления и теории информации, 1982, т. 11, № 6.

Свердловск

Поступила в редакцию
28.II.1983