Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Математический центр мирового уровня “Математический институт им. В.А. Стеклова РАН” (МЦМУ МИАН)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Материалы Международной конференции,
посвященной 100-летию со дня рождения
академика Евгения Фроловича Мищенко,
Москва, 7–9 июня 2022 г.

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

Materials of the International Conference
dedicated to the centenary of the birth
of Academician Evgenii Frolovich Mishchenko,
Moscow, June 7–9, 2022

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Москва 2022

УДК 517.9
ББК 22.16
Д50

Д50 Дифференциальные уравнения и оптимальное управление: Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Москва, 7–9 июня 2022 г. / Отв. ред. К.О. Бесов. — М.: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2022. — 146 с.

ISBN 978-5-98419-086-2

Ответственный редактор К.О. Бесов

Конференция проводится при финансовой поддержке Фонда Саймонса и Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265)

МИАН
SIMC
Steklov International Mathematical Center

SIMONS FOUNDATION

ISBN 978-5-98419-086-2

3. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
4. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002.
5. *Отакулов С.* Задачи управления ансамблями траекторий дифференциальных включений. Самарканд: Джизак, 2019.
6. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
7. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.* Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
8. *Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В.* Гарантированные решения конфликтов и их приложения. М.: ЛЕНАНД, 2012.
9. *Никольский М.С.* Об одной задаче минимизации разброса траекторий управляемого объекта // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. мат. и киберн. 2021. №3. С. 26–30.
10. *Никольский М.С.* Исследование одной минимаксной модели управления // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. и киберн. 2022. №1. С. 13–19.

Симметрия и аналитика при описании множества достижимости машины Дубинса*

В. С. Пацко, А. А. Федотов

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия

patsko@imm.uran.ru

Под математической “машиной Дубинса” понимаем управляемый объект, движение которого описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\dot{x} = \cos\varphi, \qquad \dot{y} = \sin\varphi, \qquad \dot{\varphi} = u; \\ u \in [u_1, u_2], \qquad u_1 = \text{const} < 0, \qquad u_2 = \text{const} > 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения на двумерной плоскости; u — скалярное управление. Угол φ отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки. Полагаем $\varphi \in (-\infty, \infty)$. Начальное условие: $t_0 = 0$, $x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0$.

В случае $u_1 = -1$, $u_2 = +1$ систему (1) назовем канонической.

Под допустимыми программными управлениями понимаем измеримые функции времени $t \to u(t)$, удовлетворяющие оговоренному геометрическому ограничению.

Множеством достижимости $G(t_\text{f})$ в момент $t_\text{f} > 0$ назовем совокупность всех фазовых состояний $(x(t_\text{f}), y(t_\text{f}), \varphi(t_\text{f}))^\mathsf{T}$ системы (1), получаемых в момент t_f при помощи допустимых программных управлений из нулевого начального фазового состояния. Через $G_\varphi(t_\text{f})$ обозначим двумерное φ-сечение множества $G(t_\text{f})$.

*Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

Проводя численные исследования φ-сечений множества достижимости $G(t_{\mathrm{f}})$ при различных значениях u_1 и u_2, авторы обнаружили, что они имеют одинаковую структуру с φ-сечениями множества достижимости канонической системы. Однако для каждого φ и t_{f} исходной системы следует подбирать φ-сечение канонической системы при том же φ, но при другом моменте окончания t_{f}^*. А именно, справедлива следующая формула:

$$G_\varphi(t_{\mathrm{f}}) = \frac{u_1 - u_2}{2u_1u_2} G_\varphi^{\mathrm{C}}(t_{\mathrm{f}}^*) + 2\sin\Big(\frac{\varphi}{2}\Big)\begin{pmatrix} 1/u_2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t_{\mathrm{f}}^* = \frac{2u_1(\varphi - t_{\mathrm{f}}u_2)}{u_2 - u_1} + \varphi. \quad (2)$$

Здесь через $G_\varphi^{\mathrm{C}}(t_{\mathrm{f}}^*)$ обозначено φ-сечение множества достижимости канонической системы в момент t_{f}^*.

Формула (2) записана не в исходных координатах x, y, а в некоторых вспомогательных координатах X, Y. Ось X проходит через начало координат исходной системы и развернута против часовой стрелки на угол $\varphi/2$ относительно оси x. Центр вспомогательной системы находится в точке $x = \sin\varphi$, $y = 1 - \cos\varphi$. Вспомогательная система координат зависит от φ и не зависит от значений u_1, u_2, t_{f}.

Таким образом, множество $G_\varphi(t_{\mathrm{f}})$ связано с множеством $G_\varphi^{\mathrm{C}}(t_{\mathrm{f}}^*)$ при помощи аффинного преобразования. Параметры преобразования зависят от u_1, u_2, φ, t_{f}.

Дополнительно в процессе анализа структуры трехмерного множества достижимости $G(t_{\mathrm{f}})$ установлено свойство симметрии φ-сечений множества достижимости относительно оси X вспомогательной системы координат X, Y.

Для формулы (2) получено формальное математическое обоснование, опирающееся на принцип максимума Понтрягина. Практически использование формулы (2) позволяет свести построение φ-сечений множества достижимости исходной системы (1) (вообще говоря, несимметричной относительно значений u_1, u_2) к построению φ-сечений множества достижимости канонической системы (симметричной относительно u_1, u_2). При этом для канонической системы достаточно знать описание φ-сечений множества достижимости лишь при неотрицательных значениях φ. Если $\varphi < 0$, то соответствующие φ-сечения образуются из φ-сечений для $\varphi > 0$ при помощи зеркального отображения относительно оси x исходной системы координат.

В рамках канонической системы при $\varphi \geq 0$ дано аналитическое описание границы φ-сечений и приведена классификация возможных вариантов их структуры.

Список литературы

1. *Dubins L.E.* On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Amer. J. Math. 1957. V. 79, No. 3. P. 497–516.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
3. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
5. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 182–197.