3. *Зайцев В.В.* Покоординатные оценки множества достижимости динамической системы // Диф. уравнения. 1993. Т. 29, №4. С. 575–584.
4. *Гусев М.И.* О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №1. С. 60–69.

# Множество достижимости для машины Дубинса с односторонним поворотом (Reachable set for a Dubins car with one-sided turn)

**В. С. Пацко (V. S. Patsko), А. А. Федотов (A. A. Fedotov)**

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

patsko@imm.uran.ru, andreyfedotov@mail.ru

Работа посвящена исследованию множества достижимости в момент для "машины Дубинса" — одной из самых популярных в задачах математической теории управления и прикладных работах моделей управляемого движения на плоскости. Динамика движения с постоянной по величине линейной скоростью и с оговоренным диапазоном возможных значений угловой скорости задается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка. Две фазовые переменные характеризуют геометрическое положение объекта на плоскости, третья переменная — угол направления вектора скорости. Скалярное управление определяет текущую угловую скорость вращения вектора линейной скорости или, что эквивалентно, мгновенный радиус поворота. Допустимые значения управляющего параметра принадлежат замкнутому отрезку.

В 1957 г. Л. Дубинс опубликовал статью [1] (относящуюся скорее к теории функций), из которой для указанной динамики с симметричным относительно нуля ограничением на управление вытекает решение задачи быстродействия. Было установлено, что наискорейший переход из точки в точку с заданными начальным и конечным направлениями линейной скорости осуществляется при помощи кусочно постоянного управления с не более чем двумя переключениями. Были выделены шесть возможных вариантов управления и показано, что при поиске оптимального программного управления можно ограничиться только ими.

Результаты, полученные Л. Дубинсом, оказались очень полезными при изучении движения объектов с ограничением на радиус поворота и с постоянной по величине линейной скоростью. Такие объекты стали называть машинами Дубинса. Следует отметить, однако, что подобными задачами еще в 1889 г. занимался А.А. Марков [2], исследуя вопросы оптимальной прокладки железных дорог. Р. Айзекс в своих работах по дифференциальным играм [3] при описании движения автомобиля также использовал такую динамику.

Различные задачи оптимального управления с использованием машины Дубинса рассмотрены в работах Ю.И. Бердышева, Ж.-П. Ламона (J.-P. Laumond), П. Циотраса (P. Tsiotras), Т. Шимы (T. Shima) и других авторов.

Для машины Дубинса множеством достижимости $G(t_f)$ *в момент* $t_f$ назовем совокупность всех точек *трехмерного* фазового пространства, в каждую из которых можно попасть в момент времени $t_f$ из заданного начального фазового состояния (считаем его нулевым) при помощи некоторого допустимого управления. Множество достижимости *в момент* следует отличать от множества достижимости *к моменту*. Множество достижимости к моменту $t_f$ представляет собой объединение всех множеств достижимости в моменты, предшествующие $t_f$.

Построение множеств достижимости для случая, когда возможны как левый, так и правый повороты, описано в статьях [4, 5].

В работе рассматриваются множества достижимости в момент для случая, когда поворот возможен только в одну сторону. А именно, предполагается, что скалярное управление $u$ принадлежит отрезку $[u_1, u_2]$, где $0 \leq u_1 < u_2 = 1$. При изучении границы трехмерного множества достижимости используем принцип максимума Понтрягина, который является необходимым условием приведения системы на границу множества достижимости. Исследован вопрос о числе и характере переключений управлений, ведущих на границу множества достижимости. Показано, что при $u_1 > 0$ (т.е. когда не допускается движение по прямой) сечения трехмерного множества достижимости в момент *по угловой координате* являются выпуклыми. Выпуклость сечений в случае $u_1 = 0$ доказана в статье [6].

Возможные приложения модели Дубинса с односторонним поворотом к авиационным задачам рассмотрены в работе [7].

**Список литературы**

1. *Dubins L.E.* On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Am. J. Math. 1957. V. 79, N 3. P. 497–516.
2. *Марков А.А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщ. Харьков. мат. о-ва. Сер. 2. 1889. Т. 1, № 2. С. 250–276.
3. *Isaacs R.* Games of pursuit: Scientific report of the RAND Corporation, Santa Monica, 1951.
4. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
5. *Fedotov A., Patsko V., Turova V.* Reachable sets for simple models of car motion // Recent advances in mobile robotics / Ed. by A.V. Topalov. Rijeka, Croatia: InTech, 2011. P. 147–172. http://home.imm.uran.ru/kumkov/Intech_paper_2011
6. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Множество достижимости для машины Дубинса с односторонним поворотом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 143–155.
7. *Choi H.* Time-optimal paths for a Dubins car and Dubins airplane with a unidirectional turning constraint: PhD Dissertation. Univ. Michigan, 2014.


# Об одной задаче группового преследования с дробными производными (On a problem of group pursuit with fractional derivatives)*


**Н. Н. Петров (N. N. Petrov)**

*Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия*

kma3@list.ru


Важное направление развития современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования-уклонения с участием нескольких объектов [1–3], причем,


*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00346) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект 1.5211.2017/8.9).