

Российская Академия Наук
Уральское Отделение

Институт математики и механики

Препринт

С. А. Ганебный, С. С. Кумков,
В. С. Пацко, С. Г. Пятко

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ
С ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКОЙ

Екатеринбург

2005

УДК 62–50

Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С., Пятко С.Г.
Робастное управление в игровых задачах с линейной динамикой: Препринт.
ИММ УрО РАН. Екатеринбург, Россия, 2005, 55 с.

Рассматриваются линейные дифференциальные игры двух лиц с фиксированным моментом окончания. Цель первого игрока — привести движение системы в момент окончания на заданное терминальное множество или достаточно близко к нему. Второй игрок (помеха) препятствует этому. Управление первого игрока скалярное и ограничено по модулю. Особенность постановки в том, что заранее не оговорено какое-либо ограничение на управление второго игрока. Исследуется вопрос о построении управления обратной связи первого игрока, которое должно удовлетворительно работать в широком диапазоне помех, причем на помеху малого уровня должно отвечать малой величиной управляющего воздействия. Такое управление назовем робастным.

В работе предложен и обоснован способ построения робастного управления. Для случая малой размерности фазовой переменной разработана численная программа. С ее помощью проведено моделирование двух задач, одна из которых связана с проблемой управления самолетом на посадке в условиях ветрового возмущения. Работа может быть полезна для специалистов в области теории управления и ее приложений.

Ответственный редактор член-корр. РАН А.Г. Ченцов

Рецензент доктор физ.-мат. наук, проф. В.Н. Ушаков

Введение

В теории антагонистических дифференциальных игр (см., например, [1, 10, 14, 19]) типичны постановки, в рамках которых оговариваются геометрические ограничения как на полезное управляющее воздействие, так и на воздействие помехи. В то же время задание ограничения на помеху во многих случаях не является естественным. Например, при постановке задачи о посадке самолета трудно обосновать, почему ограничение на величину возможного отклонения скорости ветра от номинала берется, скажем, в виде 10 м/с, а не 12 м/с. Получаемый же при решении дифференциальной игры способ оптимального управления будет зависеть от принятого ограничения.

Робастным назовем управление обратной связи, которое при «малом» уровне неизвестной заранее помехи обеспечивает хорошее качество траекторией «малого» по величине управляющего воздействия. С ростом уровня помехи допускается рост величины управляющего воздействия, гарантирующего хорошее качество. Такой смысл термина «робастное управление» согласуется с принятым в литературе (см., например, [18]).

Построение линейного робастного управления для H^∞ -задач на базе теории дифференциальных игр с линейно-квадратичным функционалом платы описано в [15]. Линейные робастные регуляторы в задачах L^1 -оптимизации исследованы в [2, 13, 17].

В данной работе предложен способ построения нелинейного робастного управления. Способ ориентирован на задачи с линейной динамикой, в которых заранее задано геометрическое ограничение на полезное управление. Используются результаты теории дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания и геометрическими ограничениями на управление обоих игроков.

Авторы благодарят Л.В.Камневу за просмотр рукописи и ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 03-01-00415, 04-01-96099).

Основные обозначения

$T = [\vartheta_0, \vartheta]$ — промежуток игры;

\mathbf{x} — точка в фазовом пространстве R^m исходной управляемой системы (1);

x — точка в фазовом пространстве R^n управляемых систем (2), (3);

u — скалярное управляющее воздействие первого игрока (полезное управление);

v — управляющее воздействие второго игрока (помеха);

$B(t)$ — векторный коэффициент (вектор-столбец) перед управлением u первого игрока в правой части систем (2), (3);

$C(t)$ — матричный коэффициент перед управлением v второго игрока в правой части систем (2), (3);

σ — максимум модуля $|B(t)|$ на промежутке T ;

β — константа Липшица функции $t \mapsto B(t)$;

$X(\vartheta, t)$ — фундаментальная матрица Коши системы (1);

$P = \{u \in R: |u| \leq \mu\}$ — ограничение на управление первого игрока в системах (1), (2);

M — терминальное множество для систем (1), (2);

\mathcal{P} — ограничение на управление первого игрока в дифференциальной игре (3);

\mathcal{Q} — ограничение на управление второго игрока в дифференциальной игре (3);

\mathcal{M} — терминальное множество в дифференциальной игре (3);

$\mathbb{W}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M})$ — максимальный стабильный мост в игре (3), соответствующий параметрам $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M})$;

Q_{\max} — критическое ограничение на управление второго игрока, которое следует задать при определении робастного управления обратной связи;

$W = \mathbb{W}(P, Q_{\max}, M)$ — максимальный стабильный мост в игре (3), соответствующий параметрам (P, Q_{\max}, M) ;

ρ — вспомогательный положительный параметр, который следует задать при определении робастного управления обратной связи;

$\mathbb{B}(\varepsilon)$ — замкнутый шар радиуса ε в R^n с центром в нуле;

$\widehat{W} = \mathbb{W}(\{0\}, Q_{\max}, \rho M)$ — максимальный стабильный мост в игре (3), соответствующий параметрам $\mathcal{P} = \{0\}$ (т.е. первый игрок отсутствует), $\mathcal{Q} = Q_{\max}$ и $\mathcal{M} = \rho M$;

W_k — стабильный мост в игре (3), определяемый через мосты W и \widehat{W} при помощи вещественного числового параметра $k \geq 0$;

V — числовая функция на пространстве $T \times R^n$, для которой множества W_k , $k \geq 0$, являются множествами уровня (множествами Лебега);

λ — константа Липшица функции V по x ;

\bar{V} — функция, получаемая из функции V срезкой на уровне 1;

$\Pi(t)$ — поверхность переключения управления u , соответствующая моменту t ;

$\Pi_+(t)$, $\Pi_-(t)$ — части пространства R^n , расположенные по разные стороны от поверхности $\Pi(t)$;

\mathbf{U}^0 — многозначная функция, задающая робастный способ управления первого игрока;

$\Pi^r(t)$ — геометрическая r -окрестность поверхности $\Pi(t)$;

int — символ внутренности множества.

1 Построение робастного управления

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную дифференциальную игру с фиксированным моментом окончания:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)u + \mathbf{C}(t)v, \\ \mathbf{x} \in R^m, \quad t \in T, \quad u \in P = \{u \in R: |u| \leq \mu\}, \quad v \in R^q. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь P — ограничение на скалярное управление u первого игрока, $T = [\vartheta_0, \vartheta]$ — промежуток игры. Матричнозначные функции \mathbf{A} и \mathbf{C} непрерывны. Вектор-функция \mathbf{B} липшицева на интервале T .

Первый игрок заинтересован в приведении системы (1) в момент ϑ на терминальное множество M , интересы второго игрока противоположны. Терминальное множество M предполагается выпуклым компактом в подпространстве $R^n \subset R^m$ некоторых n выделенных компонент вектора \mathbf{x} . Считаем, что M содержит окрестность нуля этого подпространства.

В отличие от стандартной постановки [1, 10, 19] дифференциальной игры в системе (1) отсутствует ограничение на управление v второго игрока.

Пусть исходное положение системы (1) близко к началу координат. В этом случае на содержательном уровне под робастным управлением за первого игрока будем понимать управление по принципу обратной связи, удовлетворяющее следующим условиям:

- если управление второго игрока «слабое», то первый игрок должен приводить систему на терминальное множество (желательно, как можно ближе к началу координат подпространства R^n), и, кроме того, реализация управления первого игрока тоже должна быть «слабой»;
- если управление второго игрока «более сильное», то первый игрок должен по-прежнему обеспечивать выполнение цели игры, используя для этого свое «более сильное» управление;
- если же управление второго игрока «очень сильное» и первый игрок, действуя в пределах своих ограничений, не может гарантировать приведение системы на терминальное множество, то допустимо отклонение от него, но как можно меньшее.

Близкое к описанному понятие робастности, когда цель управления достигается в широком диапазоне помех с нефиксированным заранее уровнем, использовано в [26].

Требуется предложить способ построения робастного управления обратной связи для системы (1).

1.2 Управляемая система без фазовой переменной в правой части

С помощью стандартного преобразования [10, стр. 160; 19, стр. 89–91] перейдем к системе, в правой части которой нет фазовой переменной:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= B(t)u + C(t)v, \\ x &\in R^n, \quad t \in T, \quad u \in P, \quad v \in R^q. \end{aligned} \quad (2)$$

Переход осуществляется при помощи равенств

$$x(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{x}(t), \quad B(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{B}(t), \quad C(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{C}(t),$$

где $X_{n,m}(\vartheta, t)$ — n строк фундаментальной матрицы Коши для системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, соответствующих подпространству R^n .

В новой задаче первый игрок, как и прежде, пытается привести систему (2) на терминальное множество M в момент окончания ϑ , а второй игрок препятствует этому. Множество M — выпуклый компакт в R^n , включающий окрестность нуля.

Дальнейшие рассуждения будут проводиться для системы (2). Получив способ робастного управления в рамках системы (2), переформулируем его затем для системы (1).

1.3 Стабильные мосты. Операции сложения и умножения на коэффициент

Дополнительно рассмотрим на том же промежутке времени $T = [\vartheta_0, \vartheta]$ дифференциальную игру с терминальным множеством M и геометрическими ограничениями \mathcal{P} и \mathcal{Q} на управления игроков:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= B(t)u + C(t)v, \\ x &\in R^n, \quad t \in T, \quad M, \quad u \in \mathcal{P}, \quad v \in \mathcal{Q}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ограничения \mathcal{P} и \mathcal{Q} на управления первого и второго игроков, а также терминальное множество M будем рассматривать как параметры игры.

Для игры (3) с фиксированным моментом окончания ϑ будем использовать формализацию, рассмотренную в книгах [10, 19].

Для сечения произвольного множества $E \subset T \times R^n$ в момент $t \in T$ введем обозначение

$$E(t) = \{x \in R^n : (t, x) \in E\}.$$

Ниже определяются операции сложения и умножения на неотрицательный коэффициент для множеств из пространства $T \times R^n$, имеющих непустые сечения в любой момент $t \in T$. Эти операции используют обычные определения алгебраической суммы (суммы Минковского) и умножения на скаляр.

Определение 1. Суммой двух множеств $E_1, E_2 \subset T \times R^n$ назовем множество

$$E_1 + E_2 = \{(t, x) \in T \times R^n : x \in E_1(t) + E_2(t)\}.$$

Определение 2. Произведением множества $E \subset T \times R^n$ на вещественное число $k \geq 0$ назовем множество

$$kE = \{(t, x) \in T \times R^n : x \in kE(t)\}.$$

Опираясь на [10, 19], дадим определения стабильного и максимального стабильного мостов.

Ниже $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ будут обозначать измеримые функции времени со значениями в множествах \mathcal{P} и \mathcal{Q} соответственно. Движение системы (3) (а следовательно и (2)), выходящее из точки x_* в момент t_* под воздействием управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, обозначим символом $x(\cdot; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$.

Определение 3. Множество $W \subset T \times R^n$ называется стабильным мостом для системы (3) с некоторыми фиксированными параметрами \mathcal{P} , \mathcal{Q} и \mathcal{M} , если $W(\vartheta) = \mathcal{M}$ и выполнено следующее свойство стабильности. Для любой позиции $(t_*, x_*) \in W$ и любого управления $v(\cdot)$ второго игрока первый игрок может выбрать свое управление $u(\cdot)$ так, что пара $(t, x(t)) = (t, x(t; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)))$ остается в W в любой момент $t \in (t_*, \vartheta]$ и, следовательно, движение $x(\cdot)$ приходит на множество \mathcal{M} в момент окончания: $x(\vartheta) \in \mathcal{M}$.

Определение 4. Максимальное по включению множество W в пространстве $T \times R^n$, $W(\vartheta) = \mathcal{M}$, обладающее свойством стабильности, называется максимальным стабильным мостом.

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения:

$\mathcal{W}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M})$ — совокупность всех стабильных мостов системы (3) для параметров $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M}$;

$\mathbb{W}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M}) \in \mathcal{W}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M})$ — максимальный стабильный мост для игры (3) с параметрами $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M}$.

Утверждение 1. Пусть $F \in \mathcal{W}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M})$ с некоторыми \mathcal{P}, \mathcal{Q} и \mathcal{M} . Тогда $kF \in \mathcal{W}(k\mathcal{P}, k\mathcal{Q}, k\mathcal{M})$ для любого $k \geq 0$.

Доказательство. При $k = 0$ утверждение очевидно. Ниже считаем, что $k > 0$.

Зафиксируем произвольную позицию $(t_*, x_*) \in kF$ и момент времени $t^* \in [t_*, \vartheta]$. Пусть второй игрок выбирает некоторое управление $v(t) \in k\mathcal{Q}$ на интервале $[t_*, t^*]$. Покажем, как можно выбрать управление $u(t) \in k\mathcal{P}$, $t \in [t_*, t^*]$, первого игрока, чтобы включение $(t^*, x(t^*)) \in kF$ выполнялось на движении $x(\cdot) = x(\cdot; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$.

Обозначим $z_* = 1/k \cdot x_*$, $\bar{v}(t) = 1/k \cdot v(t)$. Имеем $(t_*, z_*) \in F$. Поскольку F является стабильным множеством, то каким бы ни было управление $\bar{v}(t) \in \mathcal{Q}$, $t \in [t_*, t^*]$, второго игрока, можно подобрать управление $\bar{u}(t) \in \mathcal{P}$, $t \in [t_*, t^*]$, такое, что движение $z(\cdot) = x(\cdot; t_*, z_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))$ будет давать включение $(t^*, z(t^*)) \in F$.

Положим $u(t) = k\bar{u}(t)$, $t \in [t_*, t^*]$. Учитывая специфический вид системы (3) (отсутствие фазовой переменной в правой части), получаем, что $x(t) = kz(t)$ для любого $t \in [t_*, t^*]$. Таким образом, $(t^*, x(t^*)) \in kF$, что и означает стабильность множества kF . \square

Утверждение 2. Умножение максимального стабильного моста, соответствующего параметрам $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M})$, на число $k \geq 0$ дает максимальный стабильный мост, соответствующий параметрам $(k\mathcal{P}, k\mathcal{Q}, k\mathcal{M})$:

$$k\mathbb{W}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M}) = \mathbb{W}(k\mathcal{P}, k\mathcal{Q}, k\mathcal{M}).$$

Доказательство. При $k = 0$ утверждение очевидно. Ниже считаем, что $k > 0$.

Пусть $F = \mathbb{W}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M})$. Обозначим $\tilde{F} = kF$. В силу утверждения 1 следует, что $\tilde{F} \in \mathcal{W}(k\mathcal{P}, k\mathcal{Q}, k\mathcal{M})$.

Предположим $\tilde{F} \neq \mathbb{W}(k\mathcal{P}, k\mathcal{Q}, k\mathcal{M})$. Пусть $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbb{W}(k\mathcal{P}, k\mathcal{Q}, k\mathcal{M})$. Тогда $\tilde{\mathbf{F}} \supset \tilde{F}$, $\tilde{\mathbf{F}} \neq \tilde{F}$.

Рассмотрим множество $\mathbf{F} = 1/k \cdot \tilde{\mathbf{F}}$. Имеем $\mathbf{F} \supset F$, $\mathbf{F} \neq F$. Из утверждения 1 получаем включение $\mathbf{F} \in \mathcal{W}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M})$. Поскольку $F = \mathbb{W}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M})$, приходим к противоречию. \square

Утверждение 3. Сумма двух стабильных мостов F_1 и F_2 , соответствующих параметрам $(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{M}_1)$ и $(\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2, \mathcal{M}_2)$, является стабильным мостом, соответствующим параметрам $(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2, \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)$:

$$\begin{aligned} F_1 \in \mathcal{W}(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{M}_1), \quad F_2 \in \mathcal{W}(\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2, \mathcal{M}_2) &\Rightarrow \\ \Rightarrow F_1 + F_2 \in \mathcal{W}(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2, \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2). &\quad (4) \end{aligned}$$

Доказательство. Положим $\tilde{F} = F_1 + F_2$. Возьмем произвольную позицию $(t_*, x_*) \in \tilde{F}$ и момент времени $t^* \in [t_*, \vartheta]$. Пусть второй игрок выбрал некоторое управление $v(t) \in \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$, $t \in [t_*, t^*]$. Ниже будет построено управление первого игрока $u(t) \in \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, $t \in [t_*, t^*]$, такое, что для движения $x(\cdot) = x(\cdot; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ будет выполнено включение $(t^*, x(t^*)) \in \tilde{F}$.

Выберем точки z_*^1 и z_*^2 так, что $(t_*, z_*^1) \in F_1$, $(t_*, z_*^2) \in F_2$ и $z_*^1 + z_*^2 = x_*$.

Зададим управления $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ второго игрока так, что $v_1(t) \in \mathcal{Q}_1$, $v_2(t) \in \mathcal{Q}_2$ и $v_1(t) + v_2(t) = v(t)$, $t \in [t_*, t^*]$.

Пусть $i = 1, 2$. Используя стабильность множества F_i , можно подобрать управление $u_i(t) \in \mathcal{P}_i$, $t \in [t_*, t^*]$, так, что движение $z^i(\cdot) = x(\cdot; t_*, z_*^i, u_i(\cdot), v_i(\cdot))$ удовлетворяет включению $(t^*, z^i(t^*)) \in F_i$.

Обозначим $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, $t \in [t_*, t^*]$. Учитывая вид системы (2), получаем $x(t) = z^1(t) + z^2(t)$. Поэтому $(t^*, x(t^*)) \in \tilde{F}$, что дает включение (4). \square

Замечание 1. Пусть $F_1 = \mathbb{W}(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{M}_1)$ и $F_2 = \mathbb{W}(\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2, \mathcal{M}_2)$, т.е. множества F_1 и F_2 являются максимальными стабильными мостами. Тогда верно включение (4). Легко можно представить ситуацию, когда

$$F_1 + F_2 \neq \mathbb{W}(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2, \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2).$$

Таким образом, при сложении максимальных стабильных мостов результат будет стабильным множеством, но вообще говоря, не максимально стабильным.

1.4 Робастное управление обратной связи. Теорема о гарантии

Опишем построение робастного управления для систем (2) и (1). Вместо слов «управление обратной связи» будем иногда употреблять слово «стратегия».

1) Выберем множество $Q_{\max} \subset R^q$ — «максимальное» ограничение на управление второго игрока, которое первый игрок «согласен» считать разумным для проблемы приведения системы (2) на множество M . Множество Q_{\max} должно включать нуль своего пространства. Обозначим через W максимальный стабильный мост системы (3), соответствующий параметрам P , Q_{\max} и M :

$$W = \mathbb{W}(P, Q_{\max}, M).$$

Пусть $\mathbb{B}(\varepsilon) = \{x \in R^n : \|x\| \leq \varepsilon\}$ — шар в пространстве R^n радиуса ε с центром в начале координат.

Условимся, что множество Q_{\max} выбрано так, что

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in T \quad \mathbb{B}(\varepsilon) \subset W(t). \quad (5)$$

Иными словами, требуется, чтобы каждое сечение $W(t)$ моста W содержало начало координат с некоторой окрестностью.

Увеличение размеров множества Q_{\max} увеличивает уровень помехи, с которой может успешно справиться первый игрок при условии нахождения начальной позиции в соответствующем стабильном мосте, но уменьшает размер такого стабильного моста.

2) Чтобы задать робастное управление, дополнительно построим максимальный стабильный мост для системы (3), удовлетворяющий условиям: управление первого игрока отсутствует ($P = \{0\}$), ограничение Q на управление второго игрока равно Q_{\max} , терминальное множество — $M = \rho M$, где $\rho > 0$. Обозначим этот мост через

$$\widehat{W} = \mathbb{W}(\{0\}, Q_{\max}, \rho M).$$

Подберем число ρ возможно меньшим, но так, чтобы

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in T \quad \mathbb{B}(\varepsilon) \subset \widehat{W}(t). \quad (6)$$

3) Рассмотрим семейство множеств

$$W_k = \begin{cases} kW, & \text{если } 0 \leq k \leq 1, \\ W + (k - 1)\widehat{W}, & \text{если } k > 1. \end{cases}$$

В силу определения операций сложения и умножения на скаляр и соотношений (5) и (6) верны вложения

$$W_{k_1} \subset W_{k_2} \subset W \subset W_{k_3} \subset W_{k_4}$$

для любых $0 < k_1 < k_2 < 1 < k_3 < k_4$.

Утверждение 2 позволяет сделать вывод, что множества W_k при $0 \leq k \leq 1$ являются максимальными стабильными мостами, соответствующими параметрам (kP, kQ_{\max}, kM) . В силу утверждений 1 и 3 заключаем, что множества W_k при $k > 1$ — стабильные мосты, соответствующие параметрам $(P, kQ_{\max}, M + (k - 1)\rho M)$.

Таким образом, при увеличении коэффициента k получаем разрастающуюся систему стабильных мостов, причем каждый последующий соответствует большему ограничению на управление второго игрока.

Основная идея предлагаемого способа робастного управления состоит в следующем. Пусть $k^* \geq 0$. Если управление $v(t)$ второго игрока при любом t удовлетворяет ограничению k^*Q_{\max} и если начальная позиция (t_0, x_0) принадлежит мосту W_{k^*} , соответствующему этому числу k^* , то система (2) не покинет мост W_{k^*} . При этом реализация управления первого игрока принадлежит множеству $\min(k^*, 1)P$. Это означает, что если $k^* < 1$, то система переводится на терминальное множество при помощи управления, которое меньше максимально возможного.

4) Зададим функцию $V : T \times R^n \rightarrow R$ следующим образом:

$$V(t, x) = \min\{k \geq 0 : (t, x) \in W_k\}.$$

Множества уровня функции V соответствуют стабильным мостам W_k .

Поскольку множество Q_{\max} и число ρ выбраны так, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполнены соотношения (5) и (6), то функция $x \mapsto V(t, x)$ для любого $t \in T$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\lambda = 1/\varepsilon$.

Через $\mathcal{A}(t, x)$ обозначим прямую в пространстве R^n , параллельную вектору $B(t)$ и проходящую через точку x :

$$\mathcal{A}(t, x) = \{z \in R^n : z = x + \alpha B(t), \alpha \in R\}.$$

Пусть

$$\mathcal{V}(t, x) = \min_{z \in \mathcal{A}(t, x)} V(t, z).$$

Минимум достигается, поскольку функция $x \mapsto V(t, x)$ непрерывна и уходит в бесконечность при $|x| \rightarrow \infty$. Так как эта функция является квазивыпуклой (т.е. ее множества Лебега выпуклы), то минимум реализуется либо в точке, либо на отрезке.

Если $B(t) = 0$, будем считать $\mathcal{V}(t, x) \equiv V(t, x)$.

5) Для любого $t \in T$ положим

$$\begin{aligned}\Pi(t) &= \{x \in R^n : V(t, x) = \mathcal{V}(t, x)\}, \\ \Pi_-(t) &= \{x \in R^n : x + \alpha B(t) \notin \Pi(t), \forall \alpha \geq 0\}, \\ \Pi_+(t) &= \{x \in R^n : x + \alpha B(t) \notin \Pi(t), \forall \alpha \leq 0\}.\end{aligned}$$

Множество $\Pi(t)$ является замкнутым, множества $\Pi_-(t)$ и $\Pi_+(t)$ находятся по разные стороны от него. Эти три множества делят пространство R^n на три части.

6) Зададим функцию

$$\bar{V}(t, x) = \min\{V(t, x), 1\}$$

и многозначную функцию

$$\mathbf{U}^0(t, x) = \begin{cases} -\bar{V}(t, x)\mu, & \text{если } x \in \Pi_-(t), \\ \bar{V}(t, x)\mu, & \text{если } x \in \Pi_+(t), \\ [-\bar{V}(t, x)\mu, \bar{V}(t, x)\mu], & \text{если } x \in \Pi(t). \end{cases}$$

В качестве стратегии U первого игрока можно взять произвольную однозначную выборку из многозначной функции \mathbf{U}^0 :

$$U(t, x) \in \mathbf{U}^0(t, x), \quad (t, x) \in T \times R^n.$$

Таким образом, управление $U(t, x)$ «переключается» на множестве $\Pi(t)$. Для простоты множество $\Pi(t)$ будем называть *поверхностью переключения*, соответствующей моменту t .

7) Ниже будет сформулирована теорема о гарантии, обеспечиваемой первому игроку произвольной однозначной выборкой $U \in \mathbf{U}^0$. Чтобы описать влияние малых неточностей при построении поверхности переключения $\Pi(t)$, будут рассмотрены множества $\Pi^r(t) \supset \Pi(t)$, $r > 0$, и определена многозначная функция \mathbf{U}^r такая, что $\mathbf{U}^0(t, x) \subset \mathbf{U}^r(t, x)$.

Если $B(t) \neq 0$, положим

$$\Pi^r(t) = \left\{ x \in R^n : x = z + \alpha \frac{B(t)}{|B(t)|}, z \in \Pi(t), |\alpha| \leq r \right\}.$$

Множество $\Pi^r(t)$ назовем геометрическим r -расширением множества $\Pi(t)$ в направлении вектора $B(t)$. Если $B(t) = 0$, будем считать $\Pi^r(t) = \Pi(t) = R^n$.

Введем множества

$$\begin{aligned}\Pi_-^r(t) &= \{x \in R^n : x + \alpha B(t) \notin \Pi^r(t), \forall \alpha \geq 0\}, \\ \Pi_+^r(t) &= \{x \in R^n : x + \alpha B(t) \notin \Pi^r(t), \forall \alpha \leq 0\}.\end{aligned}$$

Определим многозначную функцию

$$\mathbf{U}^r(t, x) = \begin{cases} -\bar{V}(t, x)\mu, & \text{если } x \in \Pi_-^r(t), \\ \bar{V}(t, x)\mu, & \text{если } x \in \Pi_+^r(t), \\ [-\bar{V}(t, x)\mu, \bar{V}(t, x)\mu], & \text{если } x \in \Pi^r(t). \end{cases}$$

Пусть первый игрок применяет некоторую однозначную стратегию $U \in \mathbf{U}^r$ в дискретной схеме управления [10, 19] с шагом Δ . На каждом интервале дискретной схемы вырабатываемое управление постоянно. Выбирая программное управление $v(\cdot)$ второго игрока и начальную позицию (t_0, x_0) , получаем движение $t \mapsto x(t)$ системы (2).

Пусть β — константа Липшица функции $B(t)$ и $\sigma = \max_{t \in T} |B(t)|$.

Справедлива следующая теорема о гарантии.

Теорема. Пусть $r \geq 0$ и U — стратегия первого игрока такая, что $U(t, x) \in \mathbf{U}^r(t, x)$ для всех $(t, x) \in T \times R^n$. Выберем произвольно $t_0 \in T$, $x_0 \in R^n$ и $\Delta > 0$. Предположим, что управление второго игрока на промежутке $[t_0, \vartheta]$ будет ограничено множеством k^*Q_{\max} , $k^* \geq 0$. Обозначим

$$c^* = V(t_0, x_0), \quad s^* = \max(k^*, c^*).$$

Пусть $x^*(\cdot)$ — движение системы (2), выходящее из точки x_0 в момент t_0 под воздействием стратегии U в дискретной схеме управления с шагом Δ и некоторого управления $v(\cdot)$. Тогда реализация $u(t) = U(t, x^*(t))$ управления первого игрока подчиняется включению

$$u(t) \in \min(s^* + \Lambda(t, t_0, \Delta, r), 1)P, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (7)$$

При этом значение $V(t, x^*(t))$ функции V удовлетворяет неравенству

$$V(t, x^*(t)) \leq s^* + \Lambda(t, t_0, \Delta, r), \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (8)$$

Здесь

$$\Lambda(t, t_0, \Delta, r) = 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu(t - t_0)} + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r.$$

8) Возвращаясь к системе (1), введем многозначную функцию

$$\tilde{U}^0(t, \mathbf{x}) = \mathbf{U}^0(t, X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{x}).$$

Любая однозначная выборка $\tilde{U}(t, \mathbf{x})$ из нее дает робастное управление для системы (1). При этом в силу теоремы допустимы небольшие ошибки численного построения поверхности переключения $\Pi(t)$.

Тем самым описана процедура конструирования робастного управления обратной связи. Эта процедура существенным образом использует упорядоченность стабильных множеств W_k и опирается на построение поверхности переключения $\Pi(t)$, изменяющейся во времени. Доказательство теоремы приведено в разделе 2. Оно в значительной степени повторяет схему рассуждений из работ [5, 11, 12], в которых поверхности переключения были применены для построения оптимального управления обратной связи минимизирующего игрока в линейных антагонистических дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания и геометрическими ограничениями на управления обоих игроков.

Для численного построения робастного управления нужно хранить сечения $W(t)$ моста W и поверхности переключения $\Pi(t)$ на некоторой сетке $\{t_i\}$ моментов времени. В момент t , имея позицию $\mathbf{x}(t)$ системы (1), пересчитываем ее в координаты системы (2) по формуле $x(t) = X_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{x}(t)$. Знак управления $\tilde{U}(t, \mathbf{x}(t)) = U(t, x(t))$ определяется расположением точки $x(t)$ относительно поверхности переключения $\Pi(t)$. Анализируя положение точки $x(t)$ по отношению к границе сечения $W(t)$ моста W , вычисляем модуль управления $|\tilde{U}(t, \mathbf{x}(t))|$. При этом используется подобие множеств $W_k(t)$ при $k \leq 1$.

Замечание 2. Авторы не утверждают, что предложенный метод построения робастного управления реализует какой-либо критерий оптимальности. Отметим также, что есть произвол в выборе множества Q_{\max} и числа ρ .

Замечание 3. Зафиксировав множество Q_{\max} , имеем дело с построением робастного управления обратной связи для случая возмущения, стесненного ограничением заданной формы, но неизвестного уровня.

1.5 Построение робастного управления для случая двумерной системы вида (2)

Если в исходной управляемой системе (1) множество M определяется лишь двумя координатами фазового вектора \mathbf{x} (т.е. $n = 2$), то при пе-

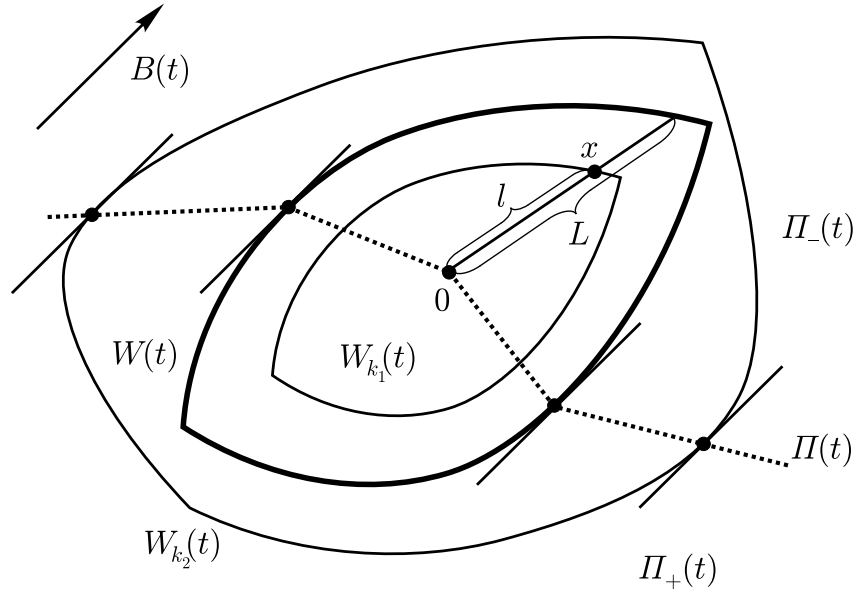


Рис. 1: Построение робастного управления в случае $n = 2$

реходе к системе (2) получаем размерность фазового вектора x , равную двум. Множества $W(t)$, $\widehat{W}(t)$ в этом случае представляют собой множества на плоскости. Множество $\Pi(t)$ назовем *линией переключения* для момента t .

Описанный выше способ управления выглядит теперь следующим образом. Выбор управляющего воздействия состоит из двух частей: выбор знака и выбор модуля. В каждый момент времени t имеем семейство вложенных множеств $W_k(t)$ на плоскости (см. рис. 1, где $k_1 < 1 < k_2$). На каждом из этих множеств найдем точки, в которых прямая, параллельная вектору $B(t)$, является опорной к множеству. Соединив эти точки, получим линию переключения $\Pi(t)$, которая будет давать знак управления. Модуль управляющего воздействия определяется формулой

$$|U(t, x)| = \begin{cases} \frac{l}{L} \mu, & \text{если } x \in W(t), \\ \mu, & \text{если } x \notin W(t). \end{cases}$$

Здесь l — длина вектора x , L — длина отрезка, соединяющего начало координат с границей множества $W(t)$ и содержащего точку x .

Для случая $n = 2$ разработаны [4, 8, 20] эффективные алгоритмы и программы построения максимальных стабильных мостов в линейных антагонистических дифференциальных играх. Эти программы могут быть использованы при конструировании сечений $W(t)$ и $\widehat{W}(t)$ максимальных стабильных мостов, соответствующих параметрам (P, Q_{\max}, M) и $(\{0\}, Q_{\max}, \rho M)$.

Чтобы строить робастное управление обратной связи, следует запоминать сечения $W(t_i)$ множества W и линии переключения $\Pi(t_i)$ на некоторой сетке $\{t_i\}$ моментов времени. При численных построениях сечения $W(t_i)$ являются выпуклыми многоугольниками и хранятся в подходящем виде. Каждая линия переключения $\Pi(t_i)$ представляет собой ломаную с четырьмя линейными сегментами. Для запоминания в памяти компьютера каждой такой ломаной нужно записать пять ее вершин (одна из которых является началом координат).

2 Доказательство теоремы

2.1 Вспомогательные утверждения

Для компактных множеств X, Y в R^n через

$$d(X, Y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} |x - y|$$

обозначим хаусдорфово отклонение множества X от множества Y .

Символом $G_{k^*}(t; \bar{t}, \bar{x})$ обозначим множество достижимости системы (2) в момент $t \geq \bar{t}$ при состоянии \bar{x} в момент \bar{t} и при переборе всех допустимых программных управлений $u(t) \in P$, $v(t) \in k^*Q_{\max}$ на промежутке $[\bar{t}, t]$. Положим

$$\mathbf{G}_{k^*}(t; \bar{t}, \bar{x}) = G_{k^*}(t; \bar{t}, \bar{x}) + \mathbb{B}(2(t - \bar{t})\sigma\mu).$$

Здесь $\mathbb{B}(r)$ — шар радиуса r в R^n с центром в начале координат.

Пусть некоторое управление второго игрока удовлетворяет включению $v(t) \in k^*Q_{\max}$. Пусть далее $c_* = V(\bar{t}, \bar{x}) \geq k^*$ в некоторой начальной позиции (\bar{t}, \bar{x}) . Положим $\bar{c} = \min(c_*, 1) = \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})$. Тогда из определения функции V следует, что найдется управление $u(\cdot)$ первого игрока такое, что $u(t) \in \bar{c}P$ для любого момента $t \geq \bar{t}$ и при этом справедливо неравенство

$$V(t, x(t; \bar{t}, \bar{x}, u(\cdot), v(\cdot))) \leq V(\bar{t}, \bar{x}).$$

Лемма 1. Пусть $k^* \geq 0$, $\bar{t} \in T$, $\bar{x} \notin \text{int } W_{k^*}(\bar{t})$, $\delta > 0$, $\bar{t} + \delta \leq \vartheta$. Пусть $x^*(\cdot)$ — движение системы (2) в силу программных управлений $u(t) \in P$, $v(t) \in k^*Q_{\max}$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} . Тогда справедлива оценка

$$\mathcal{V}(\bar{t} + \delta, x^*(\bar{t} + \delta)) \leq V(\bar{t}, \bar{x}) + \lambda\beta\mu\delta^2. \quad (9)$$

Доказательство. Обозначим $\hat{t} = \bar{t} + \delta$. Поскольку $\bar{x} \notin \text{int } W_{k^*}(\bar{t})$, то $c_* = V(\bar{t}, \bar{x}) \geq k^*$. Поэтому, используя свойства функции V , по управлению $v(\cdot)$ можно найти такое управление $u^\diamond(\cdot)$, что $u^\diamond(t) \in \bar{c}P \subset P$, где $\bar{c} = \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})$, и при этом движение $x^\diamond(\cdot)$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} и порождаемое управлениями $u^\diamond(\cdot)$ и $v(\cdot)$, удовлетворяет включению

$$x^\diamond(t) \in W_{c_*}(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}]. \quad (10)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
x^*(\hat{t}) - x^\diamond(\hat{t}) &= \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} B(t)(u(t) - u^\diamond(t))dt = \\
&= \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} (B(t) - B(\hat{t}))(u(t) - u^\diamond(t))dt + B(\hat{t}) \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} (u(t) - u^\diamond(t))dt.
\end{aligned} \tag{11}$$

Символом π обозначим оператор ортогонального проектирования пространства R^n на подпространство, ортогональное вектору $B(\hat{t})$.

Принимая во внимание, что управления $u(t)$ и $u^\diamond(t)$ ограничены по модулю числом μ , функция $B(t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой β и $\pi B(\hat{t}) = 0$, из соотношения (11) получим

$$|\pi x^*(\hat{t}) - \pi x^\diamond(\hat{t})| \leq \beta \mu \delta^2. \tag{12}$$

Пусть \tilde{x} — ближайшая к множеству $W_{c_*}(\hat{t})$ точка на прямой $\mathcal{A}(\hat{t}, x^*(\hat{t}))$. Из включения

$$x^\diamond(\hat{t}) \in W_{c_*}(\hat{t}),$$

вытекающего из (10), и определения оператора π следует, что

$$d(\{\tilde{x}\}, W_{c_*}(\hat{t})) \leq |\pi \tilde{x} - \pi x^\diamond(\hat{t})| = |\pi x^*(\hat{t}) - \pi x^\diamond(\hat{t})|.$$

Поэтому

$$V(\hat{t}, \tilde{x}) \leq c_* + \lambda |\pi x^*(\hat{t}) - \pi x^\diamond(\hat{t})| = V(\bar{t}, \bar{x}) + \lambda |\pi x^*(\hat{t}) - \pi x^\diamond(\hat{t})|.$$

Требуемое неравенство (9) вытекает из неравенства (12) и того, что

$$\mathcal{V}(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\hat{t}, \tilde{x}).$$

□

Лемма 2. Пусть $k^* \geq 0$, $\bar{t} \in T$, $\bar{x} \notin \text{int } W_{k^*}(\bar{t})$, $\delta > 0$, $\bar{t} + \delta \leq \vartheta$. Предположим, что

$$\mathbf{G}_{k^*}(\bar{t} + \delta; \bar{t}, \bar{x}) \subset \Pi_+(\bar{t} + \delta) \quad (\mathbf{G}_{k^*}(\bar{t} + \delta; \bar{t}, \bar{x}) \subset \Pi_-(\bar{t} + \delta)).$$

Пусть $x^*(\cdot)$ — движение системы (2) в силу постоянного управления

$$u(t) \equiv \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu \quad (u(t) \equiv -\bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu)$$

и некоторого управления $v(t) \in k^* Q_{\max}$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} . Тогда справедлива оценка

$$V(\bar{t} + \delta, x^*(\bar{t} + \delta)) \leq V(\bar{t}, \bar{x}) + \lambda \beta \mu \delta^2. \tag{13}$$

Доказательство. Обозначим $\hat{t} = \bar{t} + \delta$, $c_* = V(\bar{t}, \bar{x})$. Пусть $V(t) = V(t, x^*(t))$ — значение функции V вдоль движения $x^*(\cdot)$ в момент t .

Случай 1. Предположим, что

$$V(t) \geq c_*, \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}]. \quad (14)$$

Так же, как и в начальной части доказательства леммы 1, по заданному $v(\cdot)$ выберем управление $u^\diamond(t) \in \bar{c}P$, где $\bar{c} = \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})$, так, чтобы соответствующее движение $x^\diamond(\cdot)$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} , удовлетворяло включению

$$x^\diamond(t) \in W_{c_*}(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}]. \quad (15)$$

Из условия (14) и определения функции \bar{V} следует, что $\bar{V}(t, x^*(t)) \geq \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})$. Отсюда с учетом (15) вытекает неравенство

$$|u(t)| \geq |u^\diamond(t)|, \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}].$$

Положим

$$\tilde{z} = x^\diamond(\hat{t}) + B(\hat{t}) \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} (u(t) - u^\diamond(t)) dt.$$

Покажем, что

$$V(\hat{t}, \tilde{z}) \leq V(\hat{t}, x^\diamond(\hat{t})). \quad (16)$$

Рассмотрим случай

$$\mathbf{G}_{k^*}(\hat{t}; \bar{t}, \bar{x}) \subset \Pi_+(\hat{t}), \quad u(t) \equiv \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu.$$

В силу первого вложения получаем

$$x^\diamond(\hat{t}) \in \Pi_+(\hat{t}), \quad \tilde{z} \in \Pi_+(\hat{t}).$$

Поскольку

$$\tilde{z} \in \mathcal{A}(\hat{t}, x^\diamond(\hat{t})), \quad u(t) \geq u^\diamond(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}],$$

то векторы $\tilde{z} - x^\diamond(\hat{t})$ и $B(\hat{t})$ сонаправлены. Отсюда, учитывая квазивыпуклость функции $x \mapsto V(t, x)$, выводим неравенство (16).

В случае

$$\mathbf{G}_{k^*}(\hat{t}; \bar{t}, \bar{x}) \subset \Pi_-(\hat{t}), \quad u(t) \equiv -\bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu$$

неравенство (16) доказывается аналогично.

Поскольку правая часть неравенства (16) не превышает c_* , получаем включение $\tilde{z} \in W_{c_*}(\hat{t})$. Стало быть,

$$d(\{x^*(\hat{t})\}, W_{c_*}(\hat{t})) \leq |x^*(\hat{t}) - \tilde{z}|.$$

Используя определение вектора \tilde{z} , имеем

$$\begin{aligned} x^*(\hat{t}) - \tilde{z} &= x^*(t) - x^\diamond(\hat{t}) - B(\hat{t}) \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} (u(t) - u^\diamond(t)) dt = \\ &= \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} (B(t) - B(\hat{t})) (u(t) - u^\diamond(t)) dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|x^*(\hat{t}) - \tilde{z}| \leq \beta\mu\delta^2.$$

Требуемое неравенство (13) вытекает из того, что

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\hat{t}, \tilde{z}) + \lambda|x^*(\hat{t}) - \tilde{z}|, \quad V(\hat{t}, \tilde{z}) \leq V(\bar{t}, \bar{x}).$$

Случай 2. Пусть в некоторый момент $t \in [\bar{t}, \hat{t}]$ имеет место неравенство $V(t) < c_*$.

Если $V(\hat{t}) \leq c_*$, то неравенство (13) выполнено.

Предположим, что $V(\hat{t}) > c_*$. Найдем наибольший момент времени \tilde{t} , когда $V(\tilde{t}) = c_*$, а далее $V(t) > c_*$, $t \in [\tilde{t}, \hat{t}]$. Для промежутка $[\tilde{t}, \hat{t}]$ выполняется условие случая 1 с заменой \bar{t} на \tilde{t} . Поэтому

$$V(\hat{t}) \leq V(\tilde{t}) + \lambda\beta\mu\delta_1^2 \quad (\delta_1 = \hat{t} - \tilde{t}).$$

Неравенство (13) вытекает из того, что $V(\tilde{t}) = c_*$ и $\delta_1 < \delta$. \square

Лемма 3. Пусть $k^* \geq 0$, $\bar{t} \in T$, $\hat{t} \in (\bar{t}, \vartheta]$. Пусть $x^*(\cdot)$ — движение системы (2) в силу постоянного управления

$$u(t) \equiv \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu \quad (u(t) \equiv -\bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu)$$

и некоторого управления $v(t) \in k^*Q_{\max}$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} . Предположим, что

$$x^*(t) \in \Pi_+(t) \setminus \text{int } W_{k^*}(t) \quad (x^*(t) \in \Pi_-(t) \setminus \text{int } W_{k^*}(t))$$

при всех $t \in [\bar{t}, \hat{t}]$. Тогда справедлива оценка

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, \bar{x}). \quad (17)$$

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим случай, когда

$$u(t) \equiv \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu, \quad x^*(t) \in \Pi_+(t) \setminus \text{int } W_{k^*}(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}].$$

Предположим, что

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) > V(\bar{t}, \bar{x}). \quad (18)$$

Пусть \tilde{t} — максимальный момент из промежутка $[\bar{t}, \hat{t}]$, когда $V(t, x^*(t)) = V(\bar{t}, \bar{x})$.

Разделим интервал $[\tilde{t}, \hat{t}]$ моментами t_1, t_2, \dots, t_s ($t_1 = \tilde{t}$, $t_s = \hat{t}$) с шагом δ так, чтобы для любых $k = 1, 2, \dots, s-1$ выполнялось соотношение

$$\mathbf{G}_{k^*}(t_{k+1}; t_k, x^*(t_k)) \subset \Pi_+(t_{k+1}).$$

Это можно сделать, опираясь на предположение о расположении точки $x^*(t)$ относительно поверхности переключения $\Pi(t)$.

Рассмотрим произвольный промежуток $[t_k, t_{k+1}]$. Символом $\tilde{x}_k(\cdot)$ обозначим движение системы (2) в силу постоянного управления $\tilde{u}_k(t) \equiv \bar{V}(t_k, x^*(t_k))\mu$ первого игрока и оговоренного в формулировке леммы управления $v(\cdot)$ второго игрока, выходящее в момент t_k из точки $x^*(t_k)$.

В силу леммы 2 имеем неравенство

$$V(t_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1})) \leq V(t_k, x^*(t_k)) + \lambda\beta\mu\delta^2. \quad (19)$$

Оценим $V(t_{k+1}, x^*(t_{k+1}))$ через $V(t_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1}))$:

$$V(t_{k+1}, x^*(t_{k+1})) \leq V(t_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1})) + \lambda|\tilde{x}(t_{k+1}) - x^*(t_{k+1})|. \quad (20)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t_{k+1}) - x^*(t_{k+1}) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} B(t)(\tilde{u}_k(t) - u(t))dt = \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} B(t)(\bar{V}(t_k, x^*(t_k)) - \bar{V}(\bar{t}, \bar{x}))\mu dt, \end{aligned}$$

то

$$|\tilde{x}(t_{k+1}) - x^*(t_{k+1})| \leq \sigma\mu(\bar{V}(t_k, x^*(t_k)) - \bar{V}(\bar{t}, \bar{x}))\delta. \quad (21)$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\bar{V}(t_k, x^*(t_k)) \geq \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})$, вытекающим из неравенства $V(t_k, x^*(t_k)) \geq V(\bar{t}, \bar{x})$.

В силу соотношений (20), (21) получаем

$$V(t_{k+1}, x^*(t_{k+1})) \leq V(t_{k+1}, \tilde{x}(t_{k+1})) + \lambda\beta\mu\delta(\bar{V}(t_k, x^*(t_k)) - \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})). \quad (22)$$

Поскольку $\bar{V}(t_k, x^*(t_k)) \geq \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})$, то

$$\bar{V}(t_k, x^*(t_k)) - \bar{V}(\bar{t}, \bar{x}) \leq V(t_k, x^*(t_k)) - V(\bar{t}, \bar{x}). \quad (23)$$

Из неравенств (19), (22), (23) следует неравенство

$$V(t_{k+1}, x^*(t_{k+1})) \leq V(t_k, x^*(t_k)) + \lambda\beta\mu\delta^2 + \lambda\sigma\mu\delta(V(t_k, x^*(t_k)) - V(\bar{t}, \bar{x})). \quad (24)$$

Пусть

$$\text{Var}(V, [t^b, t^\sharp]) = V(t^\sharp, x^*(t^\sharp)) - V(t^b, x^*(t^b))$$

есть изменение функции V вдоль движения $x^*(\cdot)$ на промежутке $[t^b, t^\sharp]$.

Запишем неравенство (24) в новых обозначениях:

$$\text{Var}(V, [t_k, t_{k+1}]) \leq \lambda\beta\mu\delta^2 + \lambda\sigma\mu\delta \text{Var}(V, [\bar{t}, t_k]). \quad (25)$$

При этом

$$\begin{aligned} \text{Var}(V, [\bar{t}, t_k]) &= \text{Var}(V, [t_1, t_k]) = \sum_{p=1}^{k-1} \text{Var}(V, [t_p, t_{p+1}]), \\ \text{Var}(V, [t_1, t_2]) &\leq \lambda\beta\mu\delta^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Нас интересует оценка величины

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) - V(\bar{t}, \bar{x}) = \text{Var}(V, [t_1, t_s]) = \sum_{k=1}^{s-1} \text{Var}(V, [t_k, t_{k+1}]). \quad (27)$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$a_k = a_1 q^{k-1}, \quad k = 1, \dots, s-1, \quad (28)$$

где

$$a_1 = \lambda\beta\mu\delta^2, \quad q = 1 + \lambda\sigma\mu\delta. \quad (29)$$

Из соотношений (25), (26), (28), (29) видно, что

$$\text{Var}(V, [t_k, t_{k+1}]) \leq a_k, \quad k = 1, \dots, s-1. \quad (30)$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{s-1} a_k = a_1 \frac{q^{s-1} - 1}{q - 1} = \frac{\beta\delta}{\sigma} ((1 + \lambda\sigma\mu\delta)^{s-1} - 1).$$

Поскольку $s - 1 = (\hat{t} - \tilde{t})/\delta$, то

$$\sum_{k=1}^{s-1} a_k = \frac{\beta\delta}{\sigma} \left((1 + \lambda\sigma\mu\delta)^{(\hat{t}-\tilde{t})/\delta} - 1 \right) \leq \frac{\beta\delta}{\sigma} (e^{\lambda\sigma\mu(\hat{t}-\tilde{t})} - 1) \leq \frac{\beta\delta}{\sigma} (e^{\lambda\sigma\mu T} - 1). \quad (31)$$

Соотношения (27), (30), (31) приводят к неравенству

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, \bar{x}) + \frac{\beta\delta}{\sigma} (e^{\lambda\sigma\mu T} - 1),$$

которое справедливо при разбиении промежутка $[\tilde{t}, \hat{t}]$ с любым достаточно малым шагом δ . Получили противоречие с предположением (18).

Таким образом,

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, \bar{x}).$$

□

Следующая лемма дает тривиальную оценку изменения функции V вдоль движения системы (2) при допустимом программном управлении первого игрока и некотором ограниченном программном управлении второго игрока.

Лемма 4. Пусть $k^* \geq 0$, $\bar{t} \in T$, $\bar{x} \notin \text{int } W_{k^*}(\bar{t})$, $\hat{t} \in (\bar{t}, \vartheta]$. Пусть $x^*(\cdot)$ — движение системы (2) в силу допустимых управлений $u(t) \in P$ и $v(t) \in k^* Q_{\max}$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} . Тогда справедлива оценка

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, \bar{x}) + 2\lambda\sigma\mu(\hat{t} - \bar{t}). \quad (32)$$

Доказательство. Пусть $c_* = V(\bar{t}, \bar{x})$. Используя свойства функции V , на основе управления $v(\cdot)$ можно построить такое управление $u^\diamond(\cdot)$, что $u^\diamond(t) \in P$ и движение $x^\diamond(\cdot)$, выходящее из точки \bar{x} в момент \bar{t} под воздействием управлений $u^\diamond(\cdot)$ и $v(\cdot)$, удовлетворяет включению

$$x^\diamond(t) \in W_{c_*}(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}].$$

Следовательно,

$$V(\hat{t}, x^\diamond(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, \bar{x}). \quad (33)$$

Поскольку

$$x^*(\hat{t}) - x^\diamond(\hat{t}) = \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} B(t)(u(t) - u^\diamond(t)) dt,$$

то

$$|x^*(\hat{t}) - x^\diamond(\hat{t})| \leq 2\sigma\mu(\hat{t} - \bar{t}). \quad (34)$$

Пусть $V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \geq V(\hat{t}, x^\diamond(\hat{t}))$. Тогда

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) - V(\hat{t}, x^\diamond(\hat{t})) \leq \lambda|x^*(\hat{t}) - x^\diamond(\hat{t})|.$$

Это вместе с (33) и (34) дает неравенство (32). \square

2.2 Завершение доказательства теоремы

Установим справедливость неравенства (8). При выполнении этого неравенства также выполняется и включение (7), поскольку

$$|U(t, x)| \leq \bar{V}(t, x)\mu = \min(V(t, x), 1)\mu.$$

На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ выделим замкнутые интервалы, на которых $x^*(t) \notin \text{int } W_{k^*}(t)$. Вне этих интервалов $V(t, x^*(t)) < k^* \leq s^*$, и неравенство (8) автоматически выполняется.

Пусть $[\xi, \zeta]$ — произвольный из указанных интервалов. Считаем, что его нельзя расширить влево с соблюдением условия $x^*(t) \notin \text{int } W_{k^*}(t)$. Тогда либо $V(\xi, x^*(\xi)) = k^*$, либо $V(\xi, x^*(\xi)) = c^* > k^*$. Последний случай возможен лишь при $\xi = t_0$.

Докажем соотношение (8) на промежутке $[\xi, \zeta]$.

Для записи изменения функции V вдоль движения $x^*(\cdot)$ на некотором промежутке $[t^b, t^\sharp]$ используем обозначение

$$\text{Var}(V, [t^b, t^\sharp]) = V(t^\sharp, x^*(t^\sharp)) - V(t^b, x^*(t^b)).$$

1. Пусть $\beta > 0$, $\sigma > 0$. Положим

$$h = \sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)/\beta\mu}. \quad (35)$$

А. Выделим вдоль движения $x^*(\cdot)$ «петли», связанные с заходом в множество $\Pi^r(t)$. Определим также свободные промежутки.

Двигаясь от ξ к ζ , находим первый момент t , когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Такой момент назовем моментом начала первой петли и обозначим t_1 . Далее отмечаем момент \tilde{t}_1 окончания первой петли как последний момент t на промежутке $[t_1, t_1 + h] \cap [\xi, \zeta]$, в который $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Момент \tilde{t}_1 , в частности, может совпадать с t_1 .

В качестве момента t_2 начала второй петли возьмем первый момент $t \in [t_1 + h, \zeta]$, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Затем отмечаем момент \tilde{t}_2 окончания

второй петли как последний момент t на промежутке $[t_2, t_2 + h] \cap [\xi, \zeta]$, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$.

Продолжая такой процесс, получим набор петель на $[\xi, \zeta]$.

Удаляем из $[\xi, \zeta]$ внутренность промежутков построенных петель. Получаем упорядоченный набор отрезков времени. Каждый из них называем свободным промежутком. Он может быть вырожденным, т.е. состоящим из одной точки.

Если на $[\xi, \zeta]$ петли отсутствуют, то считаем $[\xi, \zeta]$ свободным промежутком.

Б. Пусть $[\tau, \eta]$ — некоторый свободный промежуток. Покажем, что приращение функции V на нем описывается неравенством

$$\text{Var}_f(V, [\tau, \eta]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta. \quad (36)$$

Нижний индекс f подчеркивает, что изменение функции V подсчитывается на свободном промежутке.

На внутренности свободного промежутка движение $x^*(\cdot)$ идет по одну сторону от множества

$$\Pi^r = \{(t, x) : t \in T, x \in \Pi^r(t)\},$$

а стало быть и по одну сторону от множества

$$\Pi = \{(t, x) : t \in T, x \in \Pi(t)\}.$$

В момент t_Δ начала очередного дискрета времени выбирается управление

$$u(t_\Delta) = \bar{V}(t_\Delta, x^*(t_\Delta))\mu \quad (u(t_\Delta) = -\bar{V}(t_\Delta, x^*(t_\Delta))\mu)$$

при

$$x^*(t_\Delta) \in \Pi_+^r(t_\Delta) \quad (x^*(t_\Delta) \in \Pi_-^r(t_\Delta)),$$

и далее это управление действует до начала следующего дискрета. Если $t_\Delta + \Delta \leq \eta$, то в силу леммы 3 имеем

$$\text{Var}(V, [t_\Delta, t_\Delta + \Delta]) \leq 0.$$

В случае $t_\Delta + \Delta > \eta$ выполнено неравенство

$$\text{Var}(V, [t_\Delta, \eta]) \leq 0.$$

Суммируя для всех дискретов времени, начинающихся при $t_\Delta > \tau$, получаем

$$\text{Var}(V, [\tau + \Delta, \eta]) \leq 0.$$

Для промежутка $[\tau, \tau + \Delta]$, в силу леммы 4 получаем

$$\text{Var}(V, [\tau, \tau + \Delta]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta.$$

Складывая два последних неравенства, приходим к оценке (36).

В. Будем говорить, что $[\tau, \eta]$ — промежуток вида E_1 , если он составлен из некоторой петли $[t_i, \tilde{t}_i]$ и примыкающего к ней справа свободного промежутка. Промежуток $[\tau, \eta]$ вида E_1 при дополнительном условии $\tau + h \leq \eta$ будем называть промежутком вида E_2 .

Оценим приращение функции V вдоль движения $x^*(\cdot)$ на промежутке вида E_1 .

Рассмотрим промежуток петли $[t_i, \tilde{t}_i]$. Воспользовавшись леммой 1 при $\delta = \tilde{t}_i - t_i$, получим

$$\mathcal{V}(\tilde{t}_i, x^*(\tilde{t}_i)) \leq V(t_i, x^*(t_i)) + \lambda\beta\mu(\tilde{t}_i - t_i)^2.$$

Поскольку $\tilde{t}_i - t_i \leq h$, то второе слагаемое в правой части можно заменить на $\lambda\beta\mu h(\tilde{t}_i - t_i)$. Учитывая неравенство

$$V(\tilde{t}_i, x^*(\tilde{t}_i)) \leq \mathcal{V}(\tilde{t}_i, x^*(\tilde{t}_i)) + \lambda r,$$

приходим к соотношению

$$\text{Var}(V, [t_i, \tilde{t}_i]) \leq \lambda\beta\mu h(\tilde{t}_i - t_i) + \lambda r. \quad (37)$$

На свободном промежутке $[\tilde{t}_i, \eta]$ имеем неравенство (36). Объединяя его с неравенством (37) при $\tau = t_i$, с учетом неравенства $\tilde{t}_i - t_i \leq \eta - \tau$ получим

$$\text{Var}_1(V, [\tau, \eta]) \leq \lambda\beta\mu h(\eta - \tau) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r. \quad (38)$$

Нижний индекс 1 подчеркивает, что подсчет приращения функции V происходит на промежутке вида E_1 .

Перейдем к оценке приращения Var_2 функции V вдоль движения $x^*(\cdot)$ на промежутке вида E_2 . Поскольку в этом случае $\eta - \tau \geq h$, то из соотношения (35) следует неравенство

$$2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r \leq \lambda\beta\mu h(\eta - \tau).$$

Привлекая неравенство (38), получим

$$\text{Var}_2(V, [\tau, \eta]) \leq 2\lambda\beta\mu h(\eta - \tau). \quad (39)$$

Г. Рассмотрим промежуток $[\xi, t]$ ($t \leq \zeta$). Представим его составленным из первого свободного промежутка $[\xi, \bar{t}]$, конечного числа промежутков вида E_2 , идущих друг за другом от момента \bar{t} до некоторого

момента \hat{t} (их суммарный промежуток времени есть $[\bar{t}, \hat{t}]$), и остаточного промежутка $[\hat{t}, t]$ вида E_1 . Применяя последовательно оценки (36), (39) и (38), имеем

$$\begin{aligned}\text{Var}(V, [\xi, t]) &= \text{Var}_f(V, [\xi, \bar{t}]) + \text{Var}(V, [\bar{t}, \hat{t}]) + \text{Var}_1(V, [\hat{t}, t]) \leq \\ &\leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + 2\lambda\beta\mu h(\hat{t} - \bar{t}) + \lambda\beta\mu h(t - \hat{t}) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r = \\ &= 2\lambda\beta\mu h(t - \bar{t}) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r.\end{aligned}$$

Подставляя h по формуле (35), получим

$$\text{Var}(V, [\xi, t]) \leq \Lambda(t, \xi, \Delta, r). \quad (40)$$

2. Пусть $\beta = 0$, $\sigma \geq 0$. Двигаясь от ξ к t ($t \leq \zeta$), находим первый момент, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Обозначим его \bar{t} . Пусть \hat{t} — последний на $[\xi, t]$ момент, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Имеем

$$x^*(t) \notin \Pi^r(t), \quad t \in [\xi, \bar{t}] \cup (\hat{t}, t].$$

Для промежутков $[\xi, \bar{t}]$ и $[\hat{t}, t]$, опираясь на леммы 3, 4 (так же, как при выводе неравенства (36)), получим

$$\text{Var}(V, [\xi, \bar{t}]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta, \quad (41)$$

$$\text{Var}(V, [\hat{t}, t]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta. \quad (42)$$

Для промежутка $[\bar{t}, \hat{t}]$, обращаясь к лемме 1 при $\beta = 0$, имеем

$$\mathcal{V}(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, x^*(\bar{t})).$$

Поэтому, учитывая неравенство

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq \mathcal{V}(\hat{t}, x^*(\hat{t})) + \lambda r,$$

приходим к оценке

$$\text{Var}(V, [\bar{t}, \hat{t}]) \leq \lambda r. \quad (43)$$

Объединяя неравенства (41)–(43), получим

$$\text{Var}(V, [\xi, t]) \leq 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r. \quad (44)$$

3. Опираясь на неравенство (40) в случае $\beta > 0$, $\sigma > 0$ и на неравенство (44) в случае $\beta = 0$, $\sigma \geq 0$, имеем оценку

$$V(t, x^*(t)) \leq V(\xi, x^*(\xi)) + \Lambda(t, \xi, \Delta, r). \quad (45)$$

В момент ξ значение $V(\xi, x^*(\xi))$ функции V равняется либо k^* , либо c^* . Таким образом,

$$V(\xi, x^*(\xi)) \leq \max(k^*, c^*) = s^*.$$

Подставив это неравенство в (45) и учитывая, что $\Lambda(t, t_0, \Delta, r) \geq \Lambda(t, \xi, \Delta, r)$, получаем неравенство (8). \square

3 Пример 1. Конфликтно-управляемый маятник

3.1 Постановка задачи

Пусть система, описывающая линеаризованный конфликтно-управляемый маятник, задается следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 + v, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\mathbf{x}_1 + u.\end{aligned}\tag{46}$$

Здесь u и v — скалярные управления первого и второго игроков (полезное управление и помеха). Величина управления первого игрока ограничена:

$$|u| \leq \mu = 1.$$

Это неравенство определяет множество P .

Поведение системы будем изучать на промежутке времени $T = [0, 10]$. На плоскости фазовых переменных $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ определим терминальное множество M в виде круга радиуса 2 с центром в начале координат. Первый игрок пытается привести систему (46) на множество M в момент окончания $\vartheta = 10$.

В качестве максимального ограничения Q_{\max} на управление второго игрока выберем

$$|v| \leq \nu = 1.$$

На рис. 2 для моментов $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ показаны сечения $W(t)$ максимального стабильного моста W , соответствующего параметрам P, Q_{\max} и M . На рисунке также приведены линии переключения $\Pi(t)$. Символы «+» и «-» обозначают знак управления в соответствующей области. Изображения даны в координатах x_1, x_2 игры (2).

3.2 Моделирование движений

Далее предполагается, что управление u в системе (46) вырабатывается по робастному закону $\tilde{U}(t, \mathbf{x})$ обратной связи в дискретной схеме управления с шагом $\Delta = 0.05$.

Для моделирования движения следует указать начальное положение и управление второго игрока.

В качестве начальной точки примем

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0.5).$$

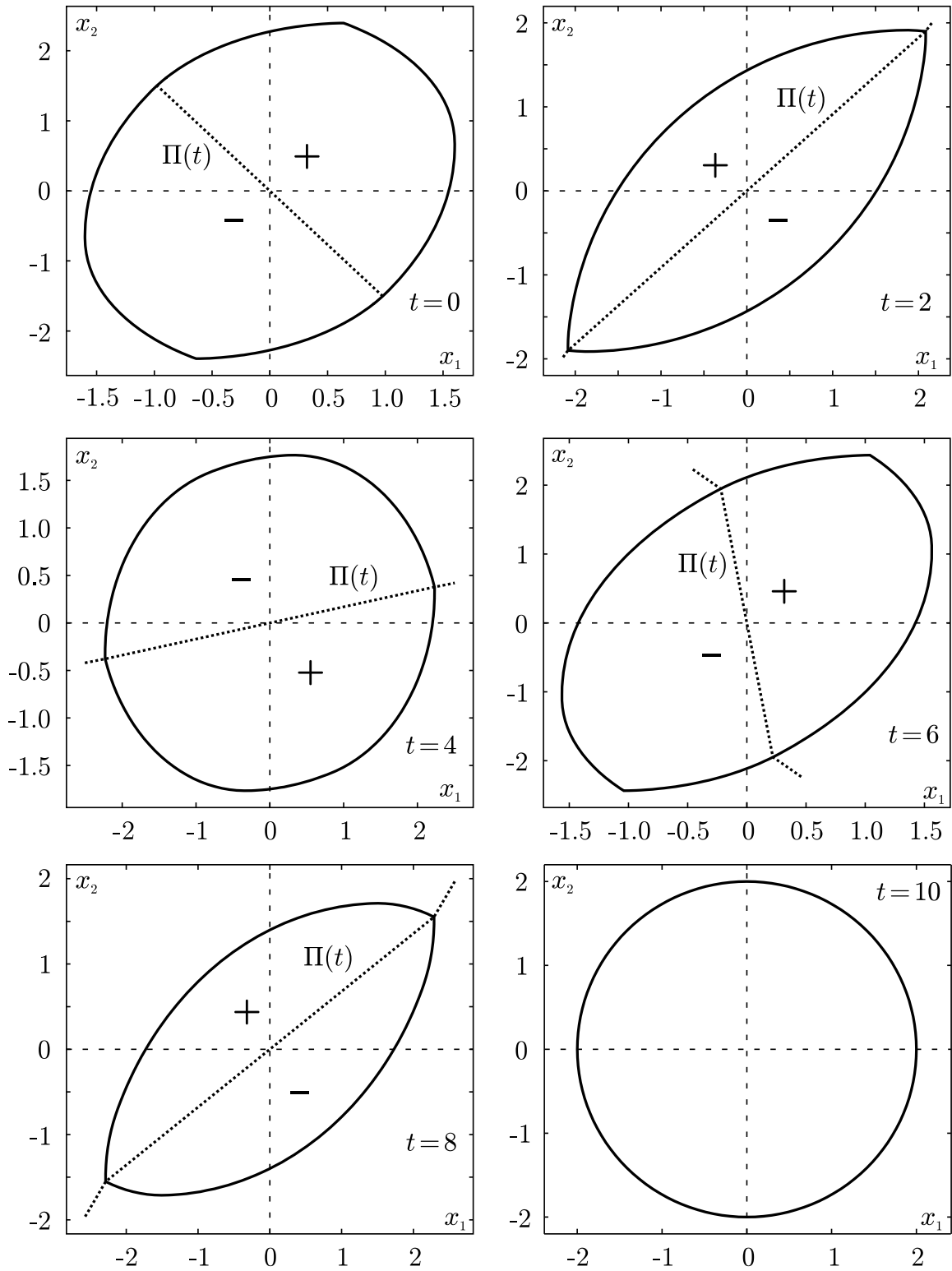


Рис. 2: Пример 1. Сечения $W(t)$ максимального стабильного моста W , изображенные вместе с линиями переключения $\Pi(t)$

Можно проверить, что

$$x(0) = X_{2,2}(10, 0)\mathbf{x}(0) \in W(0).$$

Было взято два вида управлений второго игрока. Один из них — программные синусоидальные управления с фиксированной частотой и различной амплитудой. Второй — управление обратной связи, формируемое на основе вспомогательной дифференциальной игры. Эта игра имеет фиксированный момент окончания, геометрические ограничения на управления обоих игроков и терминальную плату в виде функции Минковского, определяемой множеством M . Алгоритм построения оптимальной стратегии второго игрока при помощи поверхностей переключения для игр такого типа описан в [3, 4, 6, 7].

Рассмотрим следующие три варианта ограничения на управление второго игрока:

- $|v| \leq 0.5$ — помеха с уровнем, меньшим выбранного нами максимального уровня;
- $|v| \leq 1$ — помеха с уровнем, равным выбранному максимальному уровню;
- $|v| \leq 1.5$ — помеха с уровнем, большим выбранного максимального уровня (в этом случае не гарантируется приведение системы на терминальное множество).

Итого получаем 6 вариантов помехи (два вида помехи и три уровня для каждого из них). На рис. 3–8 для каждого из вариантов показаны: траектория системы на фоне терминального множества в плоскости $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ (точкой отмечено конечное положение в момент окончания $\vartheta = 10$) и реализации управлений первого и второго игроков. Подчеркнем, что по постановке задачи качество управления определяется положением системы в момент окончания: внутри или вне терминального множества находится конечная точка траектории.

Рис. 3–5 относятся к случаю синусоидальной помехи. Рис. 6–8 соответствуют экстремальной (оптимальной для заданного уровня) помехе, вырабатываемой по принципу обратной связи на основе решения вспомогательной дифференциальной игры.

3.3 Обсуждение результатов моделирования

Из рис. 3–8 видно, что робастное управление успешно противостоит помехе в случае, если она укладывается в ограничение Q_{\max} .

Видно также, что при переходе от синусоидальной помехи к экстремальной результаты значительно ухудшаются. При этом, однако, реализовавшийся максимум управления и положение системы в конечный момент времени соответствуют теоретическим результатам.

Тип помехи:

синусоида

Уровень помехи:

0.5 (0.5ν)

Завершение:

успешное

Максимум управления:

0.39 (0.39μ)

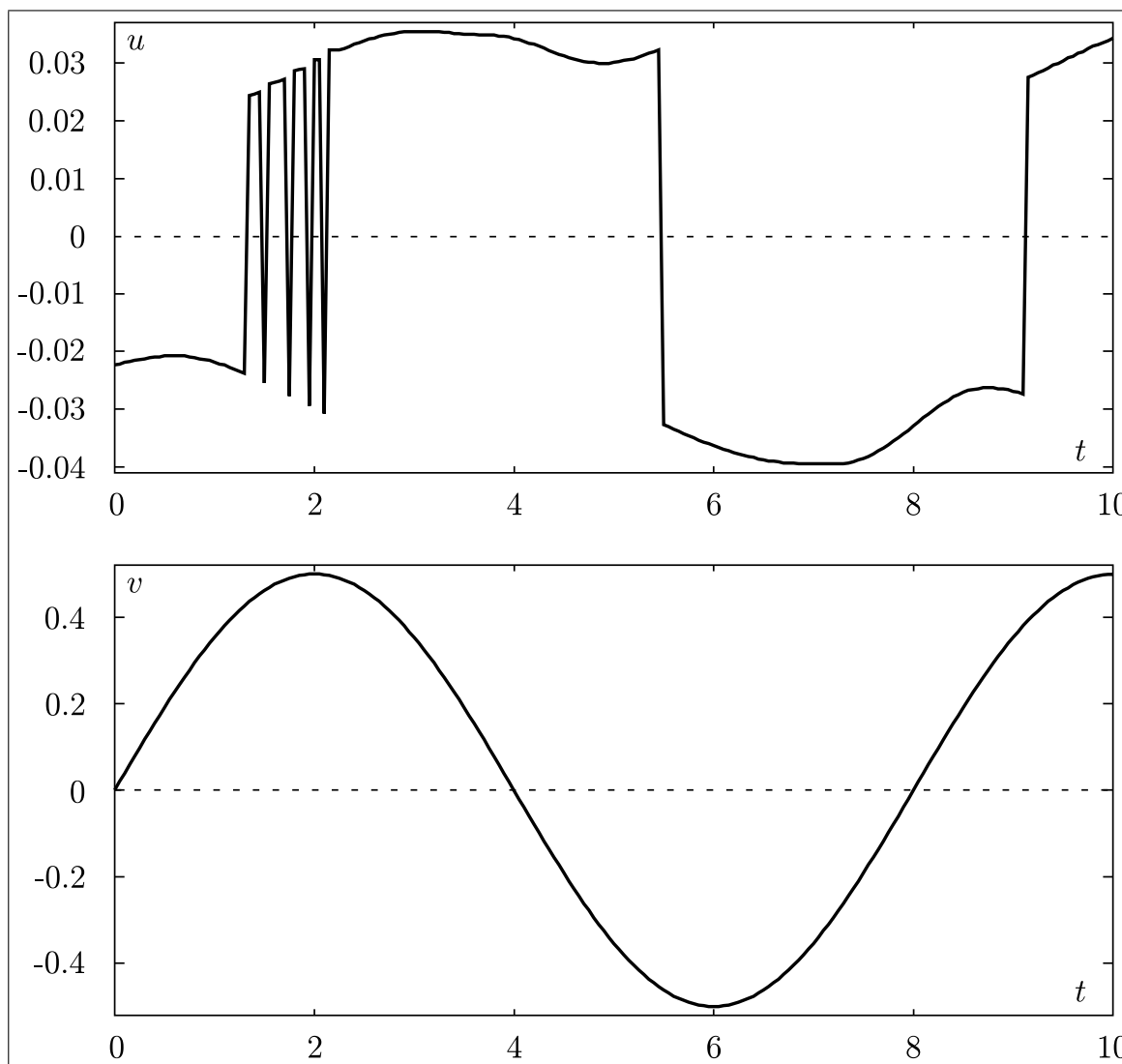
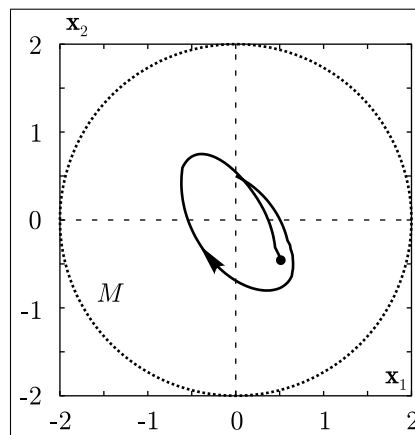


Рис. 3: Пример 1. Траектория системы (в исходных координатах x_1, x_2) и ее положение в момент окончания (черный кружок на верхнем рисунке); графики реализаций управлений игроков: первого (средний рисунок) и второго (нижний рисунок)

Тип помехи: синусоида
 Уровень помехи: $1.5 (1.5\nu)$
 Завершение: неуспешное
 Максимум управления: $1.0 (1.0\mu)$

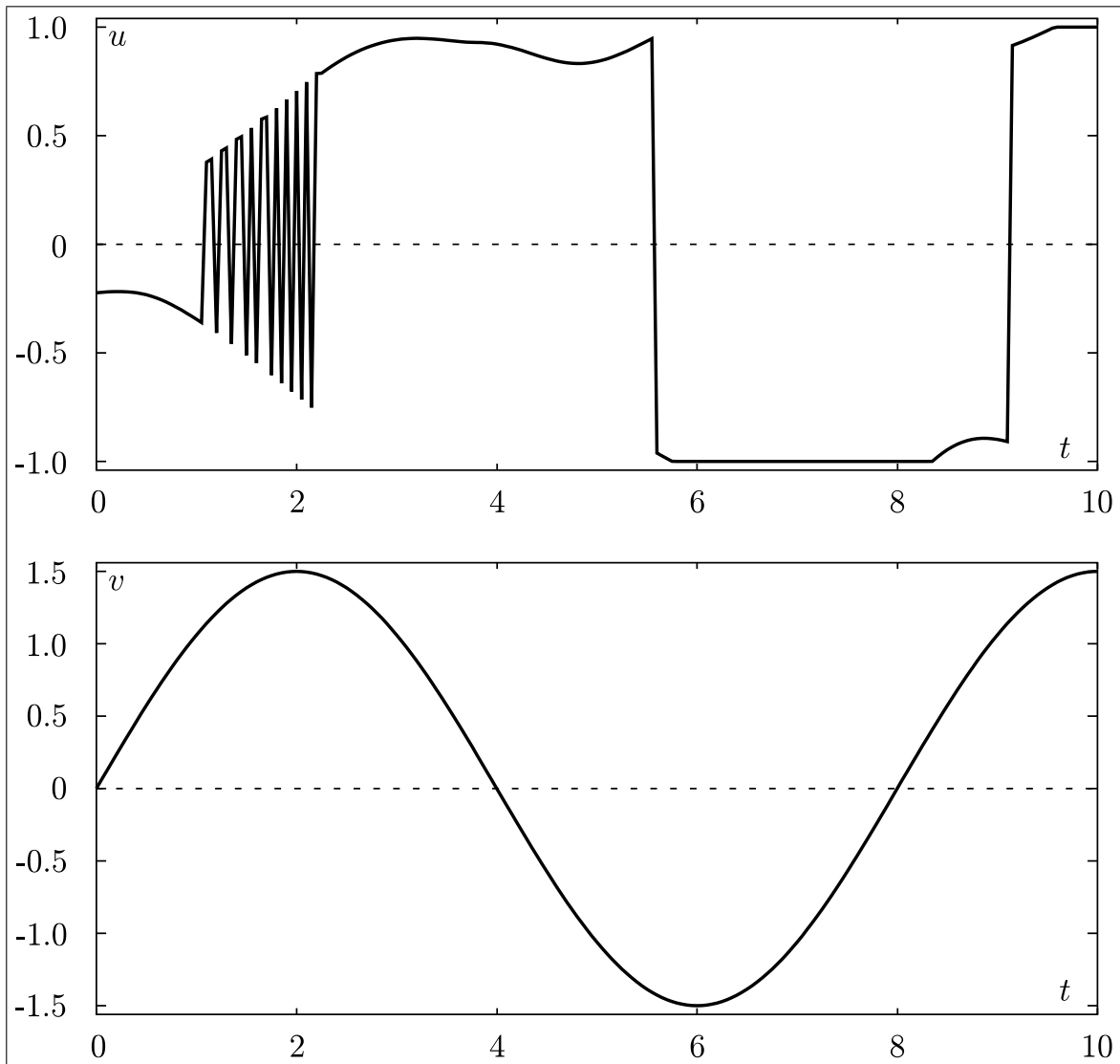
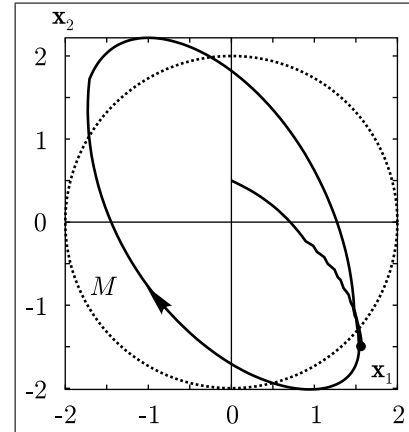


Рис. 5: Пример 1. Траектория системы (в исходных координатах x_1, x_2) и ее положение в момент окончания (черный кружок на верхнем рисунке); графики реализаций управлений игроков: первого (средний рисунок) и второго (нижний рисунок)

Тип помехи:

экстремальная

Уровень помехи:

0.5 (0.5ν)

Завершение:

успешное

Максимум управления:

0.48 (0.48μ)

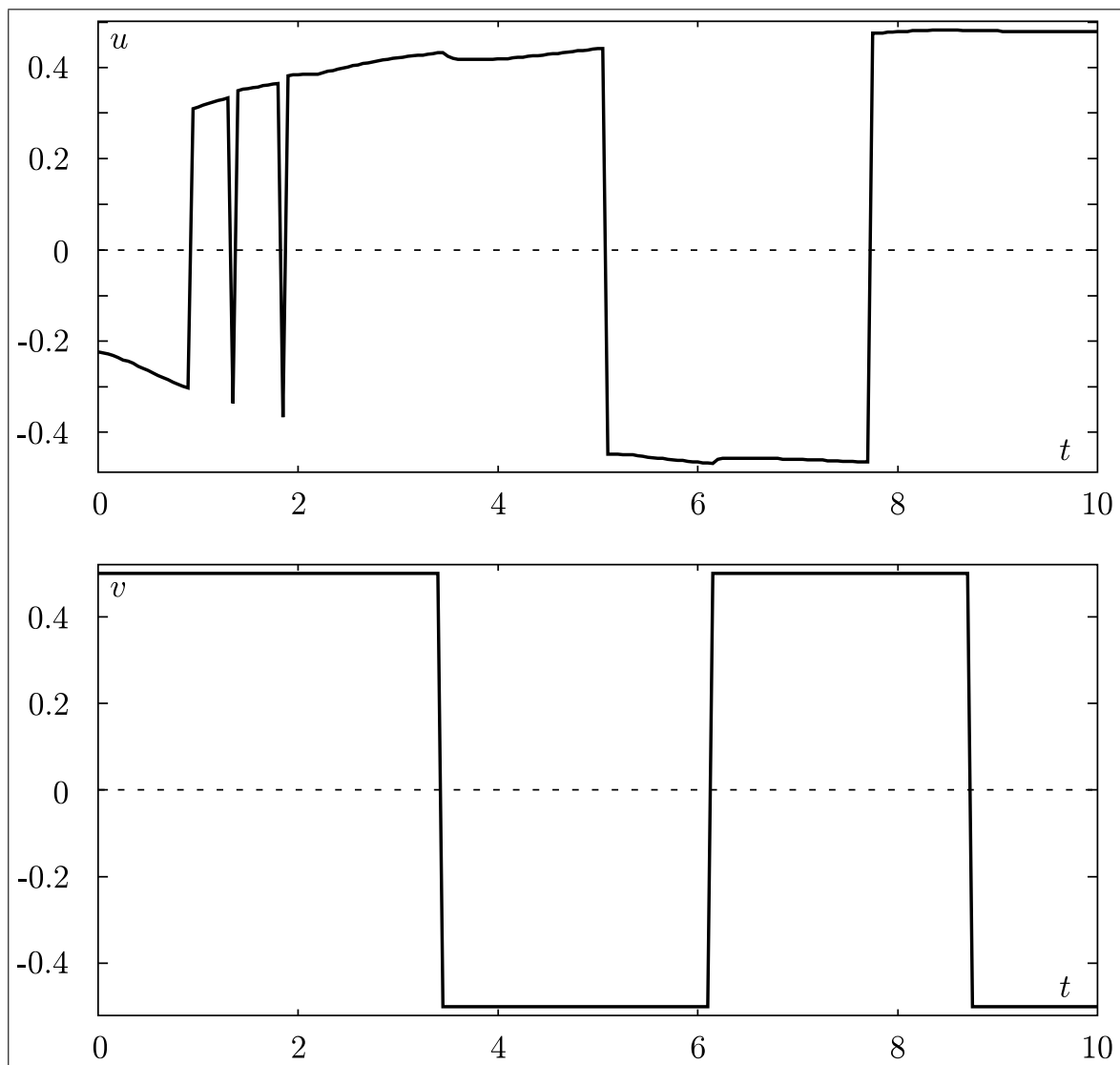
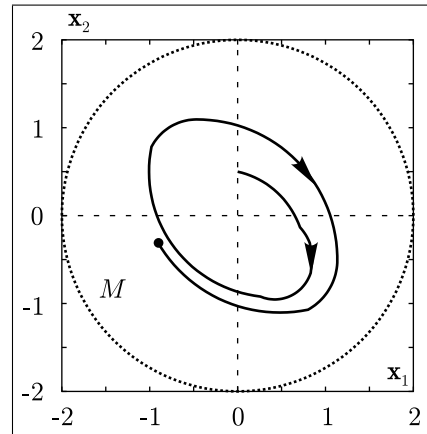


Рис. 6: Пример 1. Траектория системы (в исходных координатах x_1, x_2) и ее положение в момент окончания (черный кружок на верхнем рисунке); графики реализаций управлений игроков: первого (средний рисунок) и второго (нижний рисунок)

Тип помехи:

экстремальная

Уровень помехи:

1.0 (1.0ν)

Завершение:

успешное

Максимум управления:

0.98 (0.98μ)

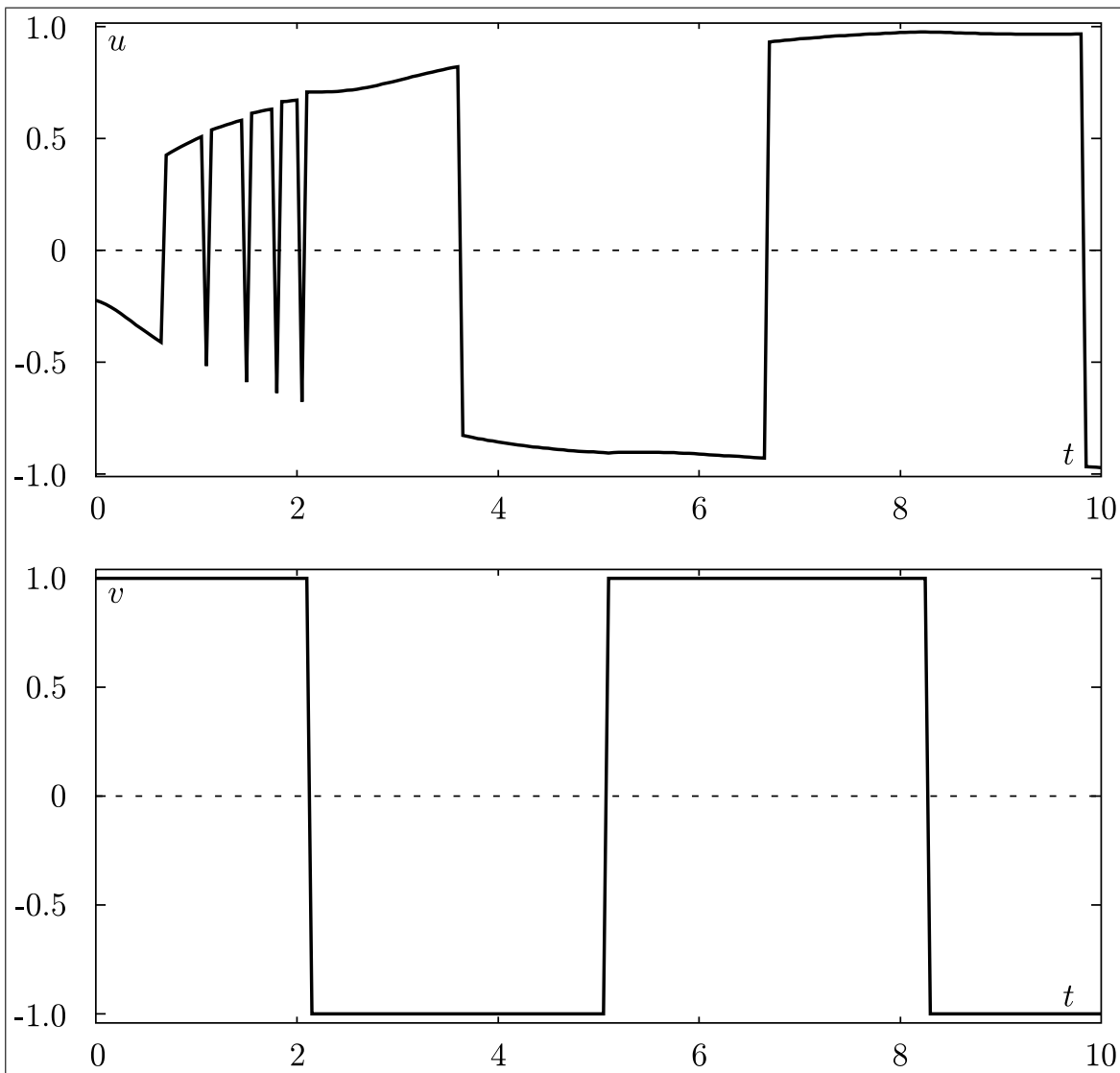
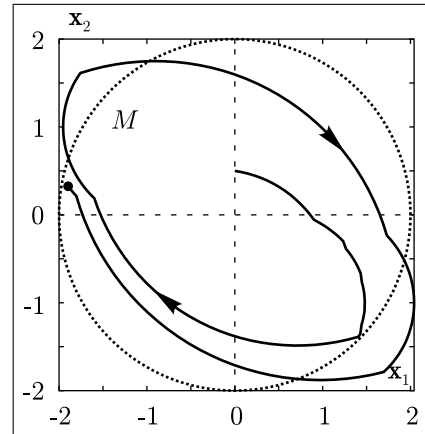


Рис. 7: Пример 1. Траектория системы (в исходных координатах x_1, x_2) и ее положение в момент окончания (черный кружок на верхнем рисунке); графики реализаций управлений игроков: первого (средний рисунок) и второго (нижний рисунок)

Тип помехи: экстремальная
 Уровень помехи: $1.5 (1.5\nu)$
 Завершение: неуспешное
 Максимум управления: $1.0 (1.0\mu)$

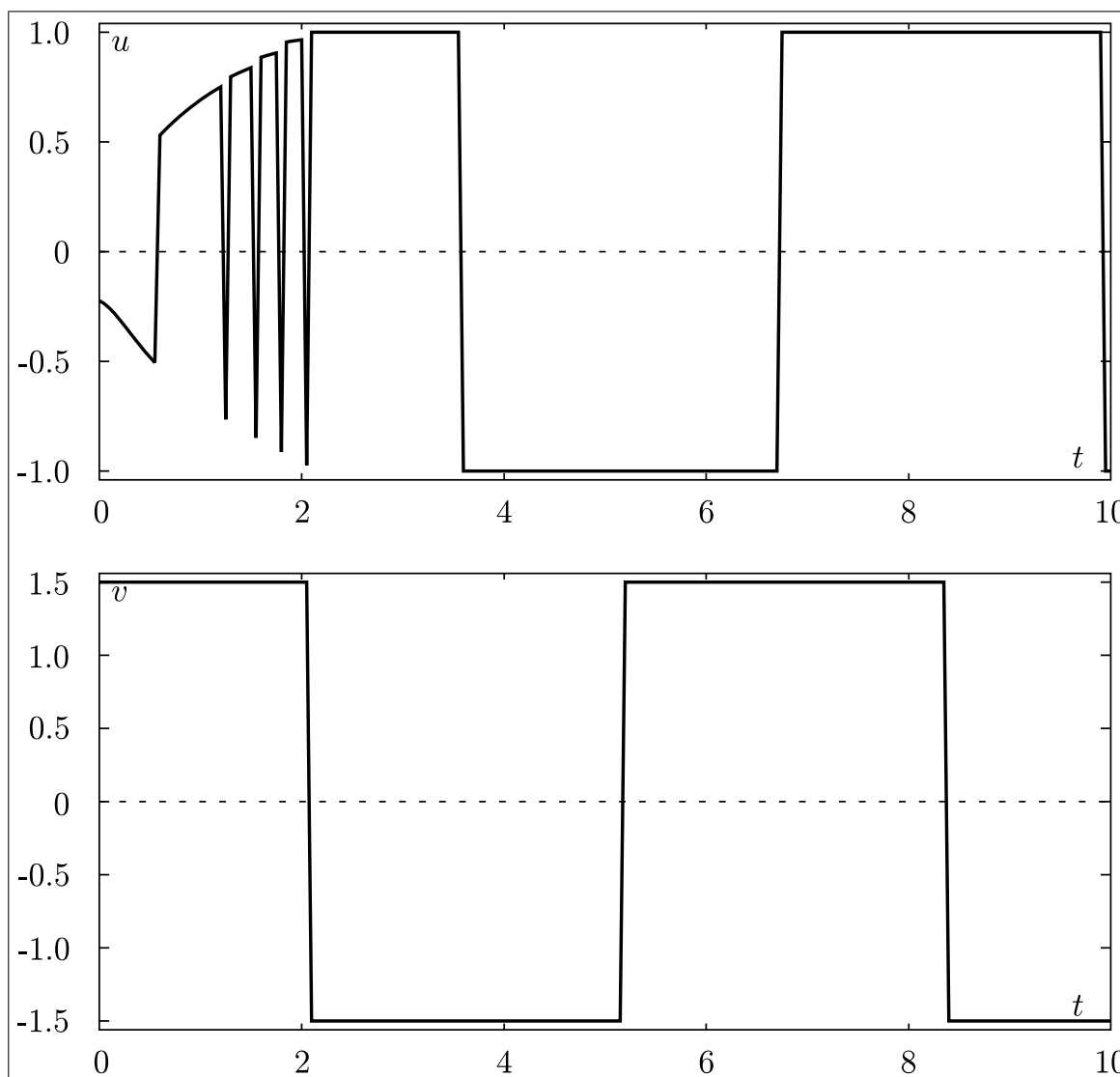
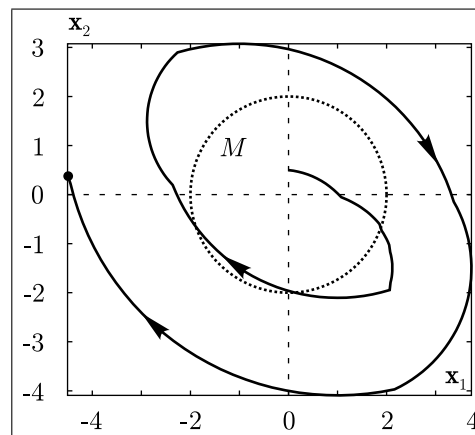


Рис. 8: Пример 1. Траектория системы (в исходных координатах x_1, x_2) и ее положение в момент окончания (черный кружок на верхнем рисунке); графики реализаций управлений игроков: первого (средний рисунок) и второго (нижний рисунок)

4 Пример 2. Робастное управление в задаче о посадке самолета

4.1 Постановка задачи о посадке самолета

В течение последних 20 лет опубликовано много работ, посвященных применению методов современной теории управления и дифференциальных игр к задачам посадки и взлета самолета в присутствии ветровых помех (см., например, [16, 21, 22, 23, 24, 25] и библиографию в них).

Рассмотрим задачу управления боковым движением среднего транспортного самолета на завершающей стадии посадки. Линеаризованную систему, описывающую динамику движения, возьмем [3, 4, 9] в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -0.0762\mathbf{x}_2 - 5.34\mathbf{x}_3 + 9.81\mathbf{x}_5 + 0.0762v, \\ \dot{\mathbf{x}}_3 &= \mathbf{x}_4, \\ \dot{\mathbf{x}}_4 &= -0.0056\mathbf{x}_2 - 0.392\mathbf{x}_3 - 0.0889\mathbf{x}_4 - 0.0378\mathbf{x}_5 - 0.17\mathbf{x}_6 + \\ &\quad + 0.0378\mathbf{x}_7 + 0.0056v, \\ \dot{\mathbf{x}}_5 &= -\mathbf{x}_5 + \mathbf{x}_7, \\ \dot{\mathbf{x}}_6 &= -0.0129\mathbf{x}_2 - 0.9016\mathbf{x}_3 - 0.2045\mathbf{x}_4 - 0.0869\mathbf{x}_5 - 0.89\mathbf{x}_6 + \\ &\quad + 0.0869\mathbf{x}_7 + 0.0129v, \\ \dot{\mathbf{x}}_7 &= -\mathbf{x}_7 + u.\end{aligned}\tag{47}$$

Компоненты фазового вектора \mathbf{x} имеют следующий физический смысл:

- \mathbf{x}_1 — боковое отклонение центра масс самолета от оси взлетно-посадочной полосы (ВПП);
- \mathbf{x}_2 — скорость бокового отклонения;
- \mathbf{x}_3 — угол рыскания (отсчитываемый по часовой стрелке от оси ВПП);
- \mathbf{x}_4 — скорость изменения угла рыскания;
- \mathbf{x}_5 — угол крена;
- $\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7$ — вспомогательные переменные.

Управляющий параметр u трактуется как заданный (командный) угол крена, параметр v — боковая составляющая скорости ветра. Боковое отклонение измеряется в метрах, углы — в радианах, время — в секундах.

Поведение системы будем изучать на отрезке времени $[0, \vartheta]$, где ϑ — момент пролета торца ВПП. В дальнейшем положим $\vartheta = 15$ с.

Заданный угол крена ограничен по модулю:

$$|u| \leq \mu = 0.2613 \text{ рад.}$$

Это ограничение задает множество P .

На плоскости фазовых переменных $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ определим множество

$$M = \left\{ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) : \frac{\mathbf{x}_1^2}{216} - \frac{2\mathbf{x}_1}{9} - \frac{3}{2} \leq \mathbf{x}_2 \leq -\frac{\mathbf{x}_1^2}{216} - \frac{2\mathbf{x}_1}{9} + \frac{3}{2} \right\}.$$

Будем считать, что если в момент ϑ боковое отклонение $\mathbf{x}_1(\vartheta)$ и скорость бокового отклонения $\mathbf{x}_2(\vartheta)$ таковы, что $(\mathbf{x}_1(\vartheta), \mathbf{x}_2(\vartheta)) \in M$, то после момента ϑ гарантируется успешное завершение посадки; если же $(\mathbf{x}_1(\vartheta), \mathbf{x}_2(\vartheta)) \notin M$, то такой гарантии нет. Таким образом, множество M является допуском для координат $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ в момент пролета торца ВПП.

В качестве максимального ограничения Q_{\max} на ветровую помеху, при котором мы гарантируем приведение на множество M , выберем

$$|v| \leq \nu = 10 \text{ м/с.}$$

На рис. 9 для моментов $t = 0, 3, 6, 9, 12, 15$ с показаны сечения $W(t)$ максимального стабильного моста W , соответствующего параметрам P, Q_{\max} и M . Также приведены линии переключения, определяющие знак управления первого игрока; соответствующие области отмечены символами «+» и «-». Изображения даны в координатах x_1, x_2 игры (2).

4.2 Моделирование движений

Предполагаем, что управление u в системе (47) вырабатывается по робастному закону $\tilde{U}(t, \mathbf{x})$ обратной связи в дискретной схеме управления с некоторым шагом Δ .

Для моделирования движения укажем начальное положение фазового вектора и управление второго игрока.

Будем считать, что начальная точка имеет боковое отклонение 30 м:

$$\mathbf{x}(0) = (30, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Можно проверить, что

$$x(0) = X_{2,7}(15, 0)\mathbf{x}(0) \in W(0).$$

Здесь $X_{2,7}$ — матрица перехода к системе типа (2). Она состоит из первых двух строк фундаментальной матрицы Коши системы (47).

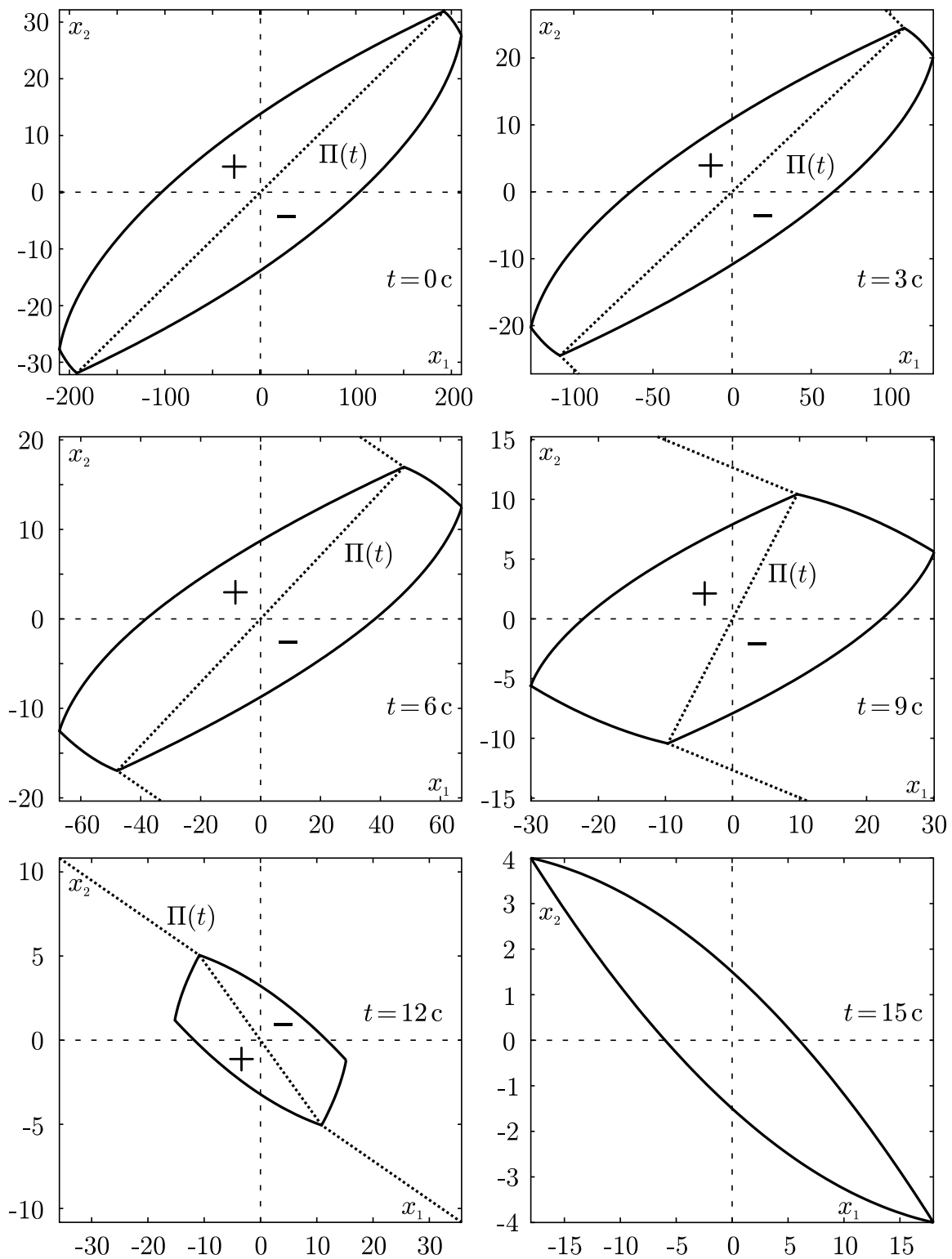


Рис. 9: Пример 2. Сечения $W(t)$ максимального стабильного моста W , изображенные вместе с линиями переключения $\Pi(t)$

Моделирование проводилось для двух видов управления второго игрока: синусоиды с одинаковой частотой, но разной амплитудой; оптимальное управление, взятое из вспомогательной дифференциальной игры. Эта игра имеет фиксированный момент окончания, геометрические ограничения на управления обоих игроков и терминальную плату в виде функции Минковского, определяемой множеством M .

Для обоих видов управления бралось три уровня помехи:

- 5 м/с — помеха с уровнем, меньшим выбранного нами максимального уровня 10 м/с;
- 10 м/с — помеха с уровнем, равным выбранному максимальному уровню;
- 15 м/с — помеха с уровнем, большим выбранного максимального уровня (в этом случае не гарантируется приведение системы на терминальное множество).

Таким образом, всего рассматривалось 6 вариантов помехи. Для этих вариантов рис. 10–15 показывают траекторию системы на фоне терминального множества в плоскости $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ (точкой отмечено конечное положение в момент окончания $\vartheta = 15$ с) и реализации управлений первого и второго игроков.

Рис. 10–12 относятся к случаю синусоидальной помехи. Рис. 13–15 соответствуют экстремальной (оптимальной для заданного уровня) помехе, вырабатываемой по принципу обратной связи на основе решения вспомогательной дифференциальной игры.

При моделировании движений шаг Δ дискретной схемы принимался равным 0.05 с.

4.3 Обсуждение результатов моделирования

Из рис. 10–12 видно, что робастное управление успешно противостоит синусоидальной ветровой помехе, в том числе и в случае, когда уровень ее превышает заранее оговоренный (т.е. 15 м/с вместо 10 м/с). При этом для первых двух вариантов 5 м/с и 10 м/с максимальное значение реализовавшегося управления $u(t)$ существенно меньше предельно допустимого уровня 0.2613 рад. В случае амплитуды 15 м/с близкий подход управления первого игрока к предельному уровню происходит лишь на промежутке времени, примыкающем к моменту окончания $\vartheta = 15$ с.

Результаты несколько ухудшаются при переходе к экстремальной ветровой помехе. Здесь при уровне помехи 15 м/с координаты $\mathbf{x}_1(\vartheta), \mathbf{x}_2(\vartheta)$

фазовой точки в момент окончания $\vartheta = 15$ с уже не принадлежат множеству M (рис. 15), хотя отклонение и не очень существенное. Реализация управляющего воздействия в конце процесса выходит на предельно допустимый уровень 0.2613 рад.

Во всех трех вариантах экстремальной помехи реализация управления u имеет частые переключения. Это означает, что фазовая точка идет вблизи поверхности переключения с частыми переходами с одной стороны на другую. Но поскольку $u(t)$ есть «заданный» угол крена, который через устройство привода преобразуется затем в отклонение элеронов, то частые переключения будут отфильтрованы устройством привода.

Тип помехи: синусоида
 Уровень помехи: 5 м/с (0.5ν)
 Завершение: успешное
 Максимум управления: 0.08 (0.31μ)

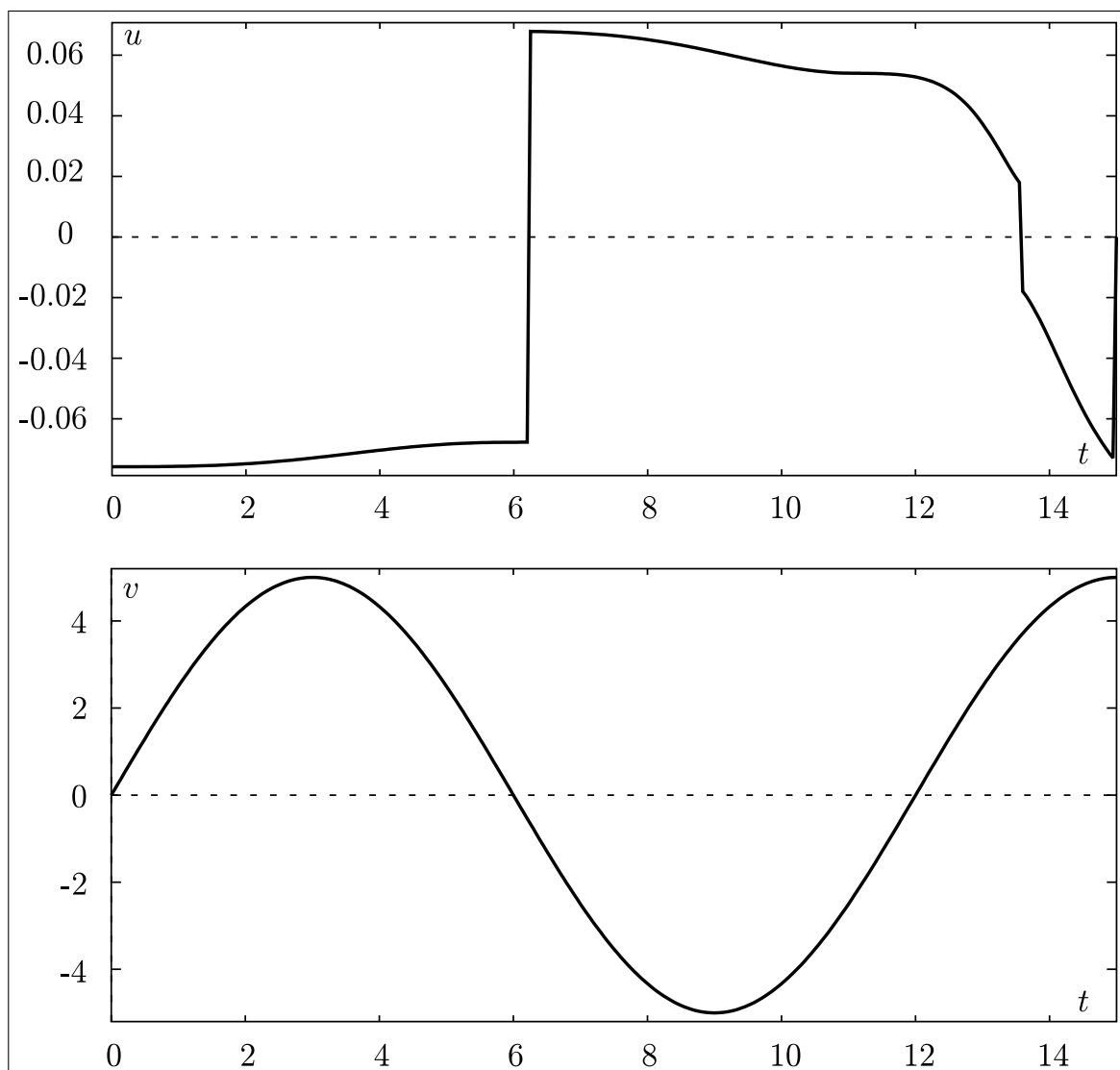
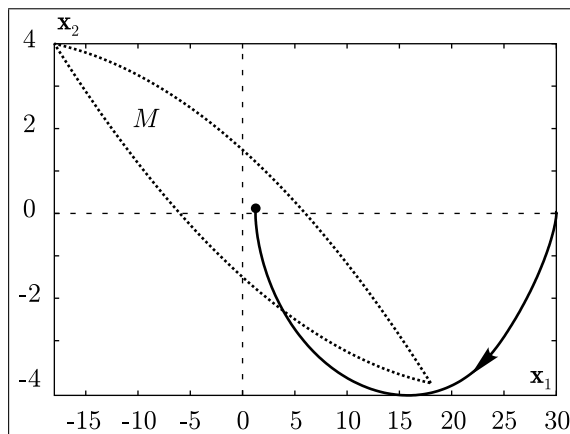


Рис. 10: Пример 2. Траектория системы (в исходных координатах x_1 , x_2) и ее положение в момент окончания (черный кружок на верхнем рисунке); графики реализаций управлений игроков: первого (средний рисунок) и второго (нижний рисунок)

Тип помехи: синусоида
 Уровень помехи: 10 м/с (1.0ν)
 Завершение: успешное
 Максимум управления: 0.16 (0.62μ)

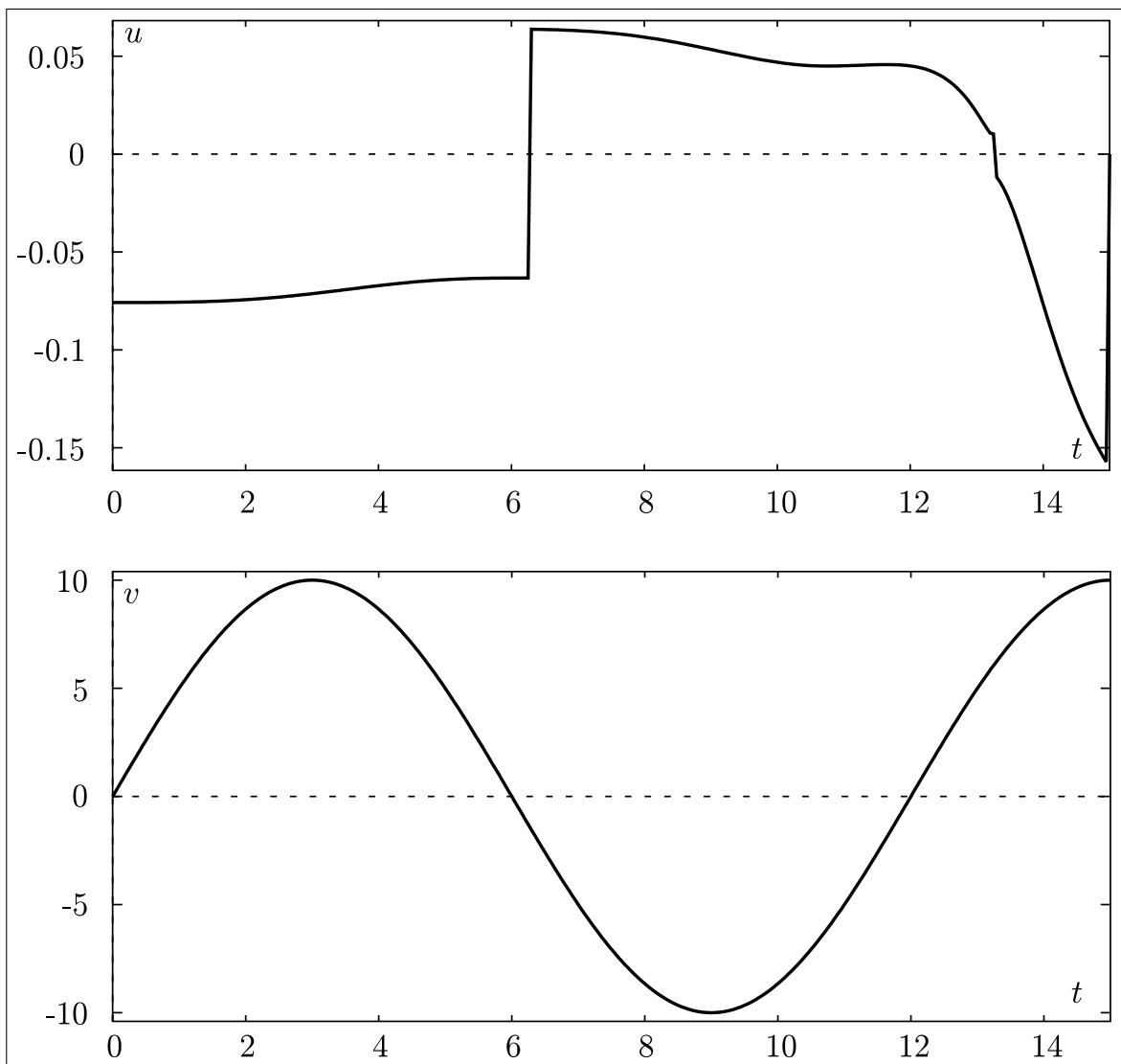
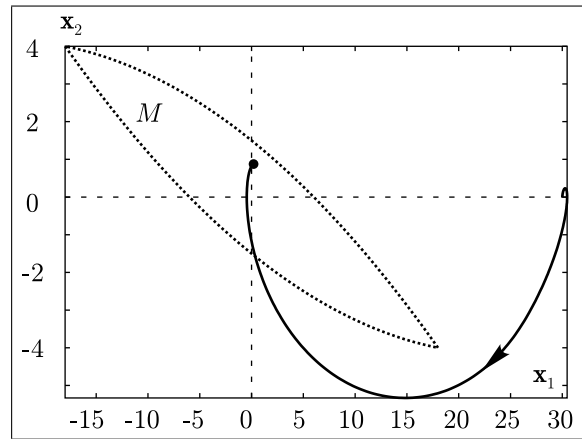


Рис. 11: Пример 2. Траектория системы (в исходных координатах x_1 , x_2) и ее положение в момент окончания (черный кружок на верхнем рисунке); графики реализаций управлений игроков: первого (средний рисунок) и второго (нижний рисунок)

Тип помехи:

синусоида

Уровень помехи:

15 м/с (1.5ν)

Завершение:

успешное

Максимум управления:

0.25 (0.96μ)

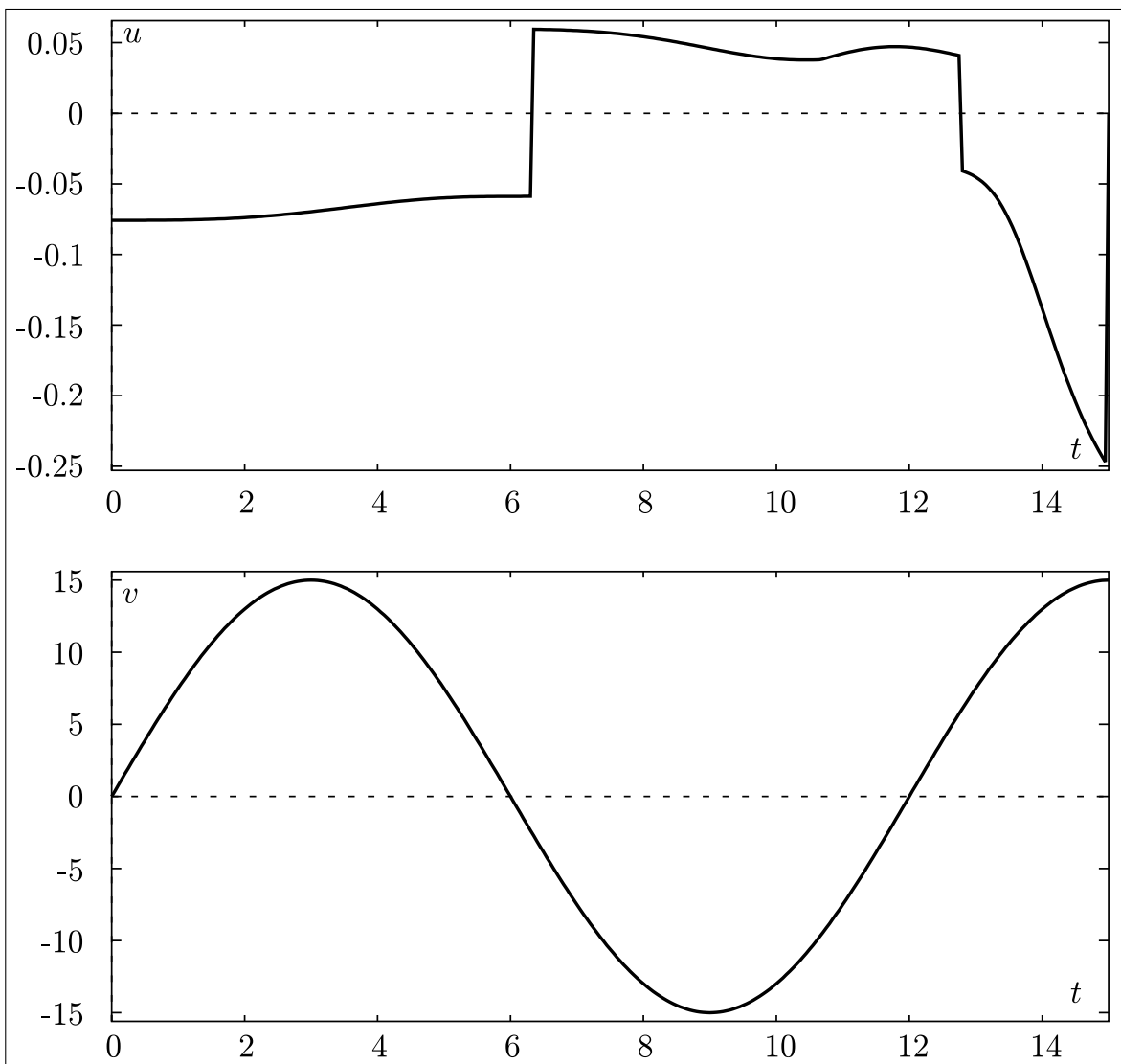
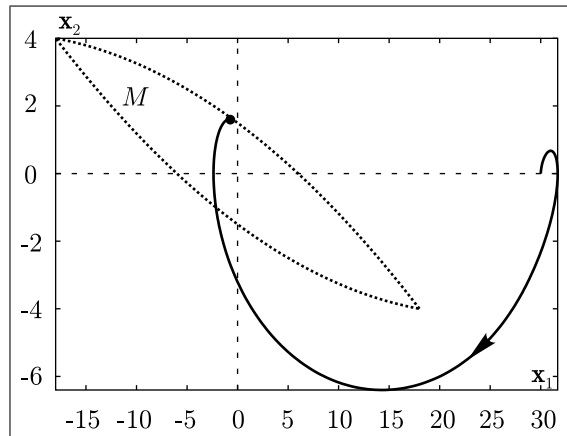


Рис. 12: Пример 2. Траектория системы (в исходных координатах x_1, x_2) и ее положение в момент окончания (черный кружок на верхнем рисунке); графики реализаций управлений игроков: первого (средний рисунок) и второго (нижний рисунок)

Тип помехи:

экстремальная

Уровень помехи:

5 м/с (0.5ν)

Завершение:

успешное

Максимум управления:

0.11 (0.42μ)

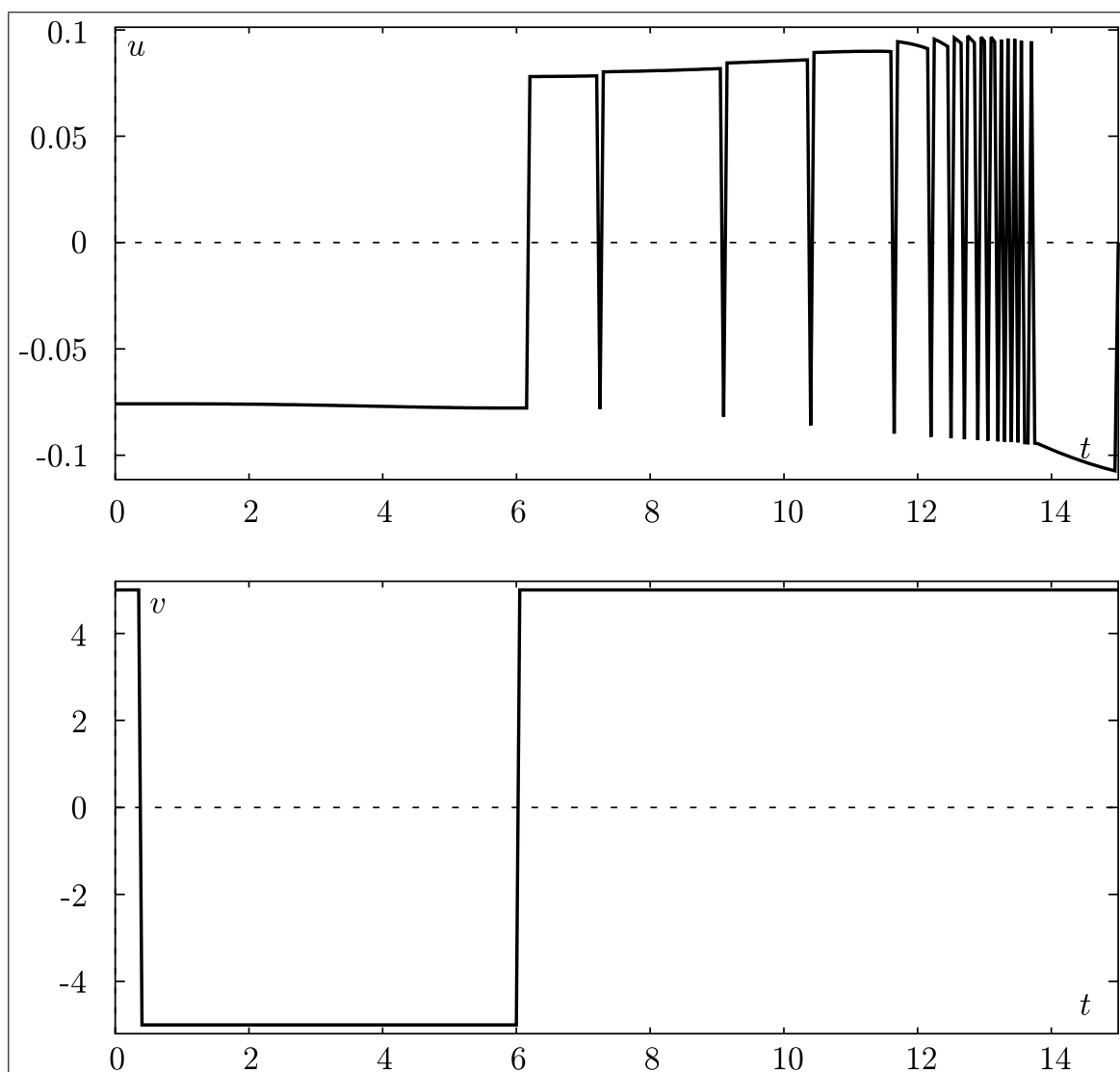
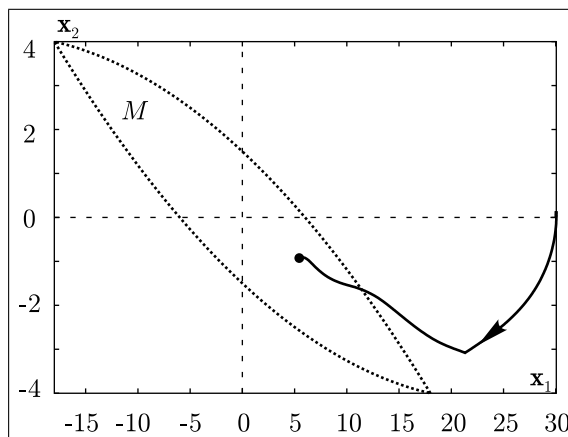


Рис. 13: Пример 2. Траектория системы (в исходных координатах x_1 , x_2) и ее положение в момент окончания (черный кружок на верхнем рисунке); графики реализаций управлений игроков: первого (средний рисунок) и второго (нижний рисунок)

Тип помехи: экстремальная
 Уровень помехи: 10 м/с (1.0ν)
 Завершение: успешное
 Максимум управления: 0.19 (0.73μ)

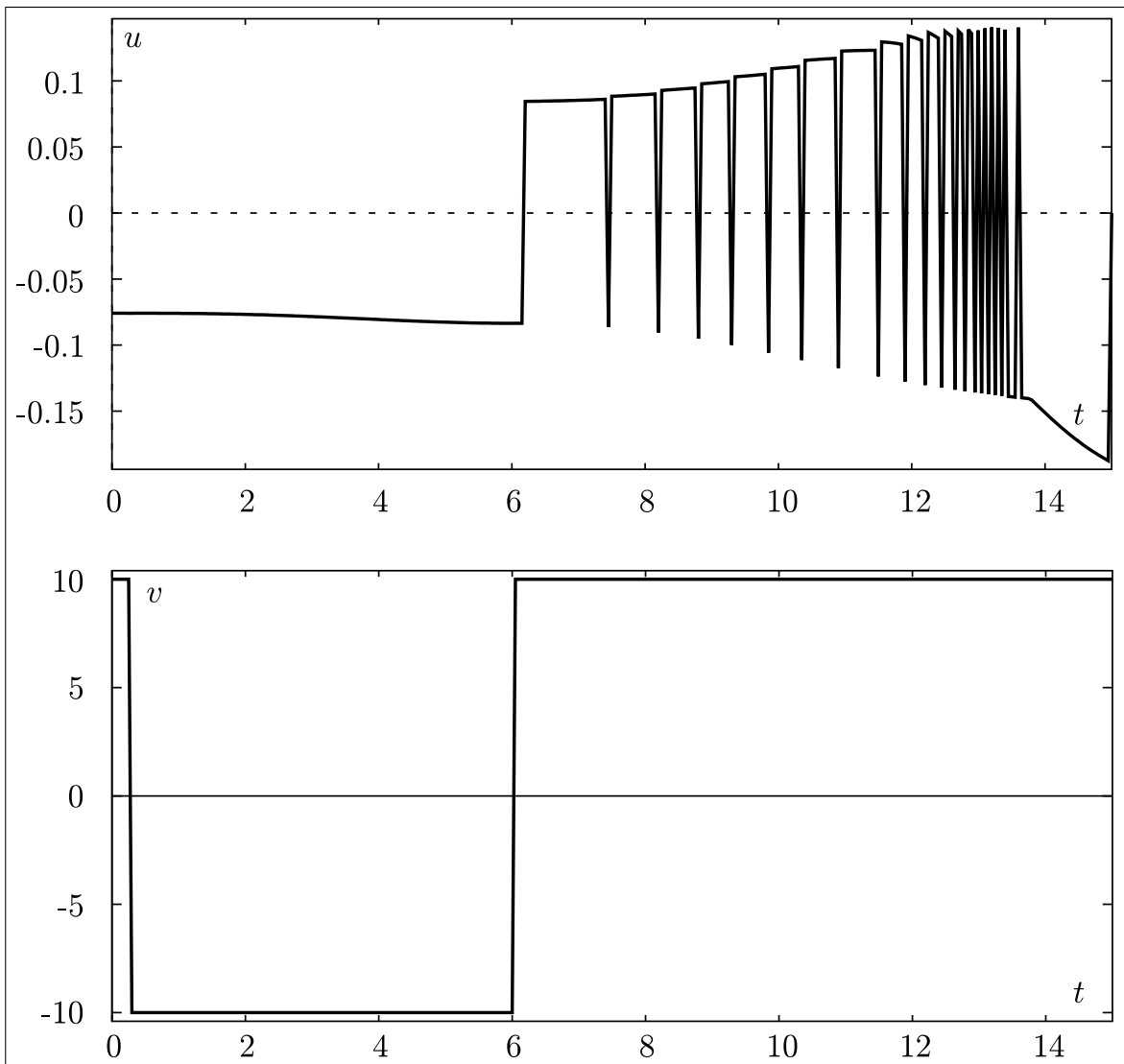
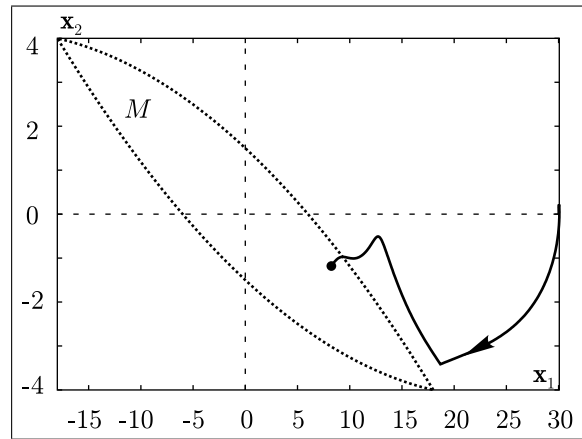


Рис. 14: Пример 2. Траектория системы (в исходных координатах x_1 , x_2) и ее положение в момент окончания (черный кружок на верхнем рисунке); графики реализаций управлений игроков: первого (средний рисунок) и второго (нижний рисунок)

Тип помехи: экстремальная
 Уровень помехи: 15 м/с (1.5ν)
 Завершение: почти успешное
 Максимум управления: 0.26 (1.0μ)

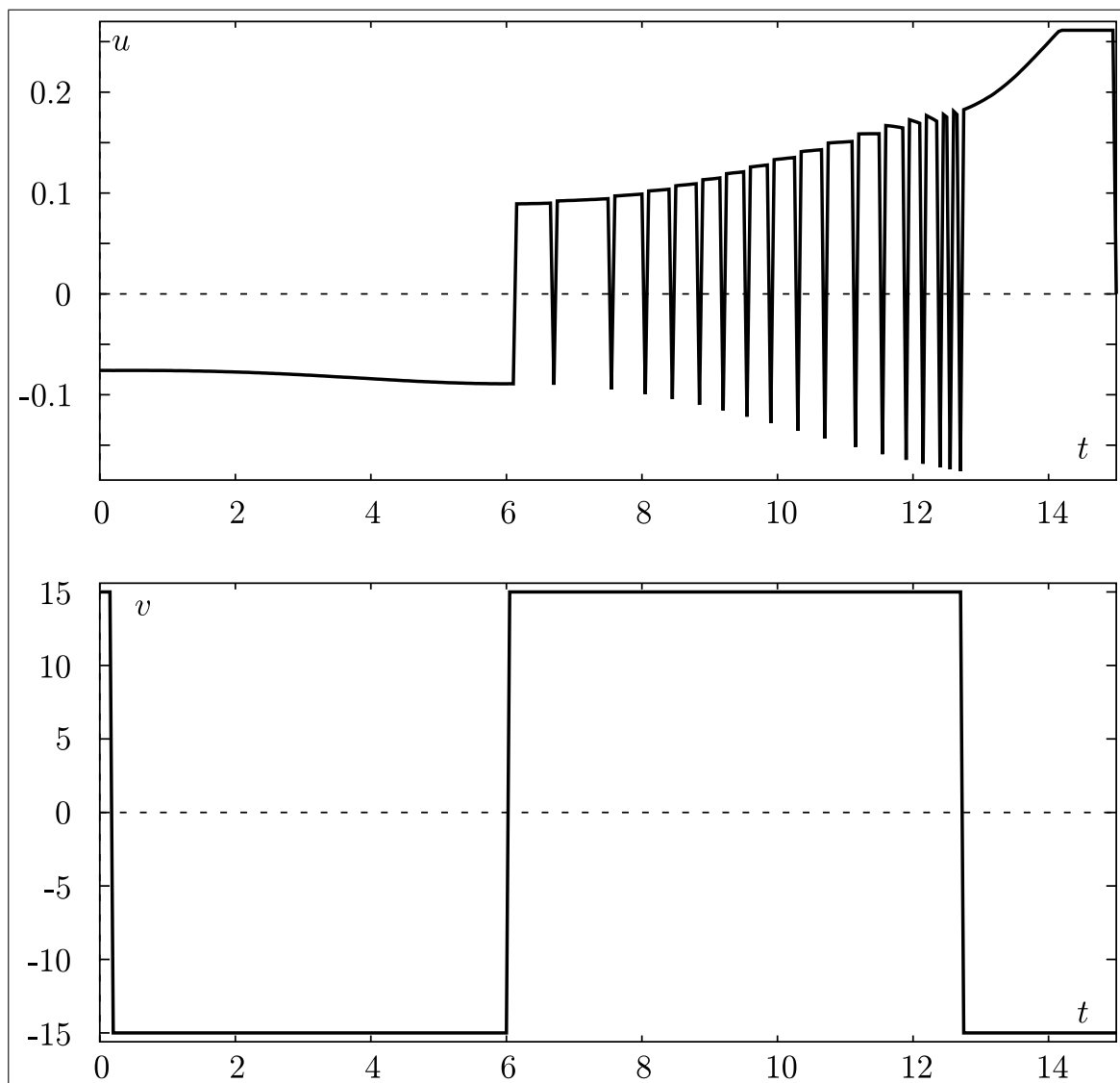
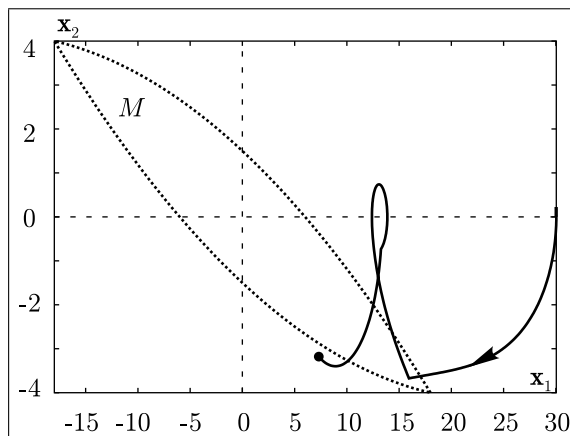


Рис. 15: Пример 2. Траектория системы (в исходных координатах x_1, x_2) и ее положение в момент окончания (черный кружок на верхнем рисунке); графики реализаций управлений игроков: первого (средний рисунок) и второго (нижний рисунок)

Заключение

В современной теории антагонистических дифференциальных игр хорошо изучены задачи, где управления обоих игроков — первого (минимизирующего) и второго (максимизирующего) — стеснены геометрическими ограничениями. В то же время типичны практические задачи, в которых геометрическое ограничение задается только для первого игрока, а разумно ограничить управление второго игрока (помехи) трудно или просто невозможно.

Чтобы охватить задачи такого типа, естественно рассмотреть семейство дифференциальных игр, где ограничение на управление второго игрока зависит от числового параметра. С каждым значением параметра свяжем свое стабильное множество («трубку») в пространстве *время* \times *фазовый вектор*. Первый игрок гарантирует удержание системы внутри каждой из таких трубок при соответствующем уровне помехи. Конструируем семейство трубок, упорядоченное по возрастанию параметра. Это семейство может рассматриваться как определение в пространстве игры некоторой функции Ляпунова, которая, в свою очередь, позволяет построить управление обратной связи для первого игрока и вычислить гарантию, обеспечиваемую этим управлением. Конструируемое управление называем робастным, поскольку оно рассчитано на работу в широком диапазоне помех.

Существенным является вопрос о том, необходимо ли запоминать все семейство трубок (на некоторой достаточно частой сетке по времени), чтобы вычислять текущее значение робастного управления в процессе движения системы. Часто запоминание значительных объемов данных может быть проблематично.

В данной работе рассматривается задача с линейной динамикой и ограниченным по модулю скалярным управлением первого игрока. Момент окончания предполагается фиксированным. Цель первого игрока состоит в приведении системы на заданное терминальное множество в момент окончания. При этом, если успешное окончание возможно, то лучше привести систему как можно ближе к центру терминального множества. Если же первый игрок не может гарантировать приведение системы на терминальное множество, то он пытается уменьшить промах.

Предложен метод построения семейства вложенных стабильных множеств, упорядоченных по возрастанию параметра, задающего геометрическое ограничение на управление второго игрока. Это семейство опре-

деляет гарантию первого игрока. Описан способ построения робастного управления обратной связи, обеспечивающего первому игроку такую гарантию.

При численных построениях робастного управления достаточно хранить в памяти компьютера только одну базовую трубку и изменяющуюся во времени поверхность переключения, определяющую знак управляющего воздействия.

Список литературы

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М: Мир, 1967.
2. *Барабанов А. Е.* Синтез минимаксных регуляторов. СПб.: Изд-во С.-Петербургского государственного университета, 1996.
3. *Боткин Н. Д., Кейн В. М., Красов А. И., Пацко В. С.* Управление боковым движением самолета на посадке в условиях ветрового возмущения. Ленинград–Свердловск, 1983. (Отчет зарегистрирован в ВИНТИ, № гос. регистрации 81104592, инв. № 02830078880)
4. *Боткин Н. Д., Кейн В. М., Пацко В. С.* Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке // ПММ, Т. 48, № 4, 1984, С. 560–567.
5. *Боткин Н. Д., Пацко В. С.* Позиционное управление в линейной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, № 4, 1983, С. 78–85.
6. *Зарх М. А.* Универсальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре // ПММ, Т. 54, № 3, 1990, С. 395–400.
7. *Зарх М. А., Пацко В. С.* Построение управления второго игрока в линейной дифференциальной игре на основе свойства отталкивания / Управление с гарантированным результатом, под ред. Субботина А. И., Ушакова В. Н., Институт математики и механики УНЦ АН СССР, Свердловск, 1987, С. 37–70.
8. *Исакова Е. А., Логунова Г. В., Пацко В. С.* Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания / Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр, под ред. Субботина А. И., Пацко В. С., Институт математики и механики, Свердловск, 1984, С. 127–158.
9. *Кейн В. М., Париков А. Н., Смуров М. Ю.* Об одном способе оптимального управления по методу экстремального прицеливания // ПММ, Т. 44, № 3, 1980, С. 434–440.
10. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М: Наука, 1974.

11. Пацко В. С. Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх / Препринт. Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, 2004.
12. Пацко В. С. Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания // ПММ, Т. 68, № 4, 2004, С. 653–666.
13. Соколов В. Ф. Робастное управление в l_1 -постановке: верификация модели и оценивание весов возмущений // АиТ, № 11, 2003, С. 138–151.
14. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. Boston: Birkhauser, 1997.
15. Basar T., Bernhard P. H^∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems. A Dynamic Game Approach. Boston: Birkhauser, 1991.
16. Bulirsch R., Montrone F., Pesch H. J. Abort landing in the presence of windshear as a minimax control problem, part 1: necessary conditions // Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 70, No. 1, 1991, pp. 1–23.
17. Dahleh M. A., Pearson J. B. L^1 -optimal compensators for continuous-time systems // IEEE Transactions on Automatic Control, AC-32, October 1987, pp. 889–895.
18. Fleming W. H. Future Directions in Control Theory. A Mathematical Perspective. Report of the Panel on Future Directions in Control Theory, SIAM Reports on Issues in the Mathematical Sciences Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1988.
19. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1988.
20. Kumkov S. S., Patsko V. S. Construction of singular surfaces in linear differential games / Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 6: Advances in Dynamic Games and Applications, Altman E., Pourtallier O. (Eds.), Birkhauser, Boston, 2001, pp. 185–202.
21. Leitmann G., Pandey S. Aircraft control for flight in an uncertain environment: take-off in windshear // Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 70, No. 1, 1991, pp. 25–55.

22. *Miele A., Wang T., Melvin W. W.* Optimal take-off trajectories in the presence of windshear // *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 49, No. 1, 1986, pp. 1–45.
23. *Miele A., Wang T., Wang H., Melvin W. W.* Optimal penetration landing trajectories in the presence of windshear // *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 57, No. 1, 1988, pp. 1–40.
24. *Patsko V. S., Botkin N. D., Kein V. M., Turova V. L., Zarkh M. A.* Control of an aircraft landing in windshear // *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 83, No. 2, 1994, pp. 237–267.
25. *Seube N., Moitie R., Leitmann G.* Aircraft taking-off in windshear: a viability approach // *Set-Valued Analysis*, Vol. 8, 2000, pp. 163–180.
26. *Turetsky V., Glizer V. Y.* Robust state-feedback controllability of linear systems to a hyperplane in a class of bounded controls // *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 123, No. 3, 2004, pp. 639–667.

Оглавление

Введение	3
Основные обозначения	4
1 Построение робастного управления	6
1.1 Постановка задачи	6
1.2 Управляемая система без фазовой переменной в правой части	7
1.3 Стабильные мосты. Операции сложения и умножения на коэффициент	7
1.4 Робастное управление обратной связи. Теорема о гарантии	10
1.5 Построение робастного управления для случая двумерной системы вида (2)	15
2 Доказательство теоремы	18
2.1 Вспомогательные утверждения	18
2.2 Завершение доказательства теоремы	25
3 Пример 1. Конфликтно-управляемый маятник	29
3.1 Постановка задачи	29
3.2 Моделирование движений	29
3.3 Обсуждение результатов моделирования	32
4 Пример 2. Робастное управление в задаче о посадке самолета	39
4.1 Постановка задачи о посадке самолета	39
4.2 Моделирование движений	40
4.3 Обсуждение результатов моделирования	42
Заключение	50
Список литературы	52

Научное издание

Сергей Александрович Ганебный

Сергей Сергеевич Кумков

Валерий Семенович Пацко

Сергей Григорьевич Пятко

**Робастное управление в игровых задачах
с линейной динамикой**

Препринт

Рекомендовано к изданию Ученым советом
Института математики и механики и НИСО УрО РАН

ЛР N 020764 от 24.04.98 г.

Ответственный за выпуск Л.В. Камнева

НИСО УрО РАН N 74(05)

Подписано в печать 08.08.05. Формат 60 × 84/16.

Бумага типографская. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 3,5. Уч-изд. л. 3,5. Тираж 200. Заказ

620219, Екатеринбург, ГСП–384, ул. С.Ковалевской, 16,
Институт математики и механики УрО РАН

Размножено с готового оригинал-макета в типографии
«Уральский центр академического обслуживания»
620219, Екатеринбург, ГСП–169, ул. Первомайская, 91.