

УДК 517.977

ББК 22.18

# МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ МАШИНЫ ДУБИНСА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ

ВАЛЕРИЙ С. ПАЦКО

Институт математики и механики

им. Н.Н. Красовского УрО РАН

620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

ГЕОРГИЙ И. ТРУБНИКОВ

Уральский федеральный университет

620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

АНДРЕЙ А. ФЕДОТОВ

Институт математики и механики

им. Н.Н. Красовского УрО РАН

620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

e-mail: patsko@imm.uran.ru, andreyfedotov@mail.ru

Исследуется трехмерное множество достижимости для нелинейного управляемого объекта «машина Дубинса». Управлением является угловая скорость поворота вектора линейной скорости. Управляющее воздействие стеснено интегральным квадратичным ограничением. На основе принципа максимума Понтрягина дано описание движений, порождающих границу множества достижимости. Движения, ведущие на границу, представляют собой оптимальные эластики Эйлера. Приводятся результаты моделирования.

*Ключевые слова:* машина Дубинса, интегральное ограничение на управление, трехмерное множество достижимости, принцип максимума Понтрягина, эластики Эйлера, численные построения.

*Поступила в редакцию:* 01.05.23 *После доработки:* 17.05.23 *Принята к публикации:* 05.06.23

## 1. Введение

Под математической «машиной Дубинса» понимаем объект,двигающийся на плоскости с постоянной величиной линейной скорости. Фазовое состояние включает в себя две координаты геометрического положения и угол направления вектора скорости. Скалярное управление  $u$  имеет смысл мгновенной угловой скорости поворота. Управление стеснено на промежутке  $[0, t_f]$  интегральным квадратичным ограничением

$$\int_0^{t_f} u^2(t) dt \leq \mu \quad (1.1)$$

с заданным значением  $\mu > 0$ . Цель работы — исследование трехмерного множества достижимости  $G(t_f)$  в момент  $t_f$ .

Любое ненулевое управление, ведущее на границу множества  $G(t_f)$ , доставляет равное  $\mu$  минимальное значение функционала

$$J(u(\cdot)) = \int_0^{t_f} u^2(t) dt \quad (1.2)$$

при фиксированных краевых условиях. Соответствующие функционалу (1.2) экстремальные движения были классифицированы Л. Эйлером [6] и называются эластичками Эйлера.

Исследуя задачу о построении множества  $G(t_f)$ , опираемся на опыт [4, 7] аналитического описания и численного построения множества достижимости для случая геометрических ограничений  $|u(t)| \leq \mu$ . Принципиальное отличие состоит в том, что в случае геометрических ограничений многие вычисления можно производить явно при помощи элементарных функций, а в случае интегральных ограничений аналитические вычисления затруднены в силу необходимости использования специальных эллиптических функций. Тем не менее, численные построения множества достижимости  $G(t_f)$  возможны. Полученные при построении границы множества  $G(t_f)$  результаты дополняют исследования М.И. Зеликина [3], Ю.Л. Сачкова и А.А. Ардентова [1], связанные с эластичками Эйлера.

## 2. Постановка задачи

Пусть движение управляемого объекта на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u. \quad (2.1)$$

Здесь  $x, y$  — координаты геометрического положения,  $\varphi$  — угол наклона вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси  $x$ . Величина скорости равна единице. Значения угла  $\varphi$  рассматриваем на промежутке  $(-\infty, \infty)$ . Начальный момент времени  $t_0$  полагаем равным нулю. Начальные значения  $x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0)$  также считаем нулевыми. Допустимыми являются измеримые интегрируемые управления  $u(\cdot)$ , удовлетворяющие ограничению (1.1).

Множество достижимости  $G(t_f)$  при  $t_f > t_0$  есть совокупность всех точек  $(x, y, \varphi)^T$ , в каждую из которых возможен перевод системы (2.1) в момент  $t_f$  при помощи некоторого допустимого управления. Обозначим через  $G_\varphi(t_f)$  двумерное сечение множества  $G(t_f)$ , отвечающее значению  $\varphi$  угловой координаты. Пусть  $\partial$  — символ границы множества. Если некоторая точка  $(x, y)^T$  принадлежит  $\partial G_\varphi(t_f)$ , то точка  $(x, y, \varphi)^T$  принадлежит  $\partial G(t_f)$ . Обратное, вообще говоря, неверно.

Требуется построить множество достижимости  $G(t_f)$ . Ради краткости положим  $z = (x, y, \varphi)^T$ . Обозначим через  $z^0(t_f)$  точку на  $\partial G(t_f)$ , в которую ведет управление  $u(t) \equiv 0$ .

## 3. Симметрия сечений множества $G(t_f)$ по угловой координате

Пусть  $t \rightarrow u(t)$  — допустимое управление, ведущее в момент  $t_f$  в некоторую точку  $z(t_f)$  множества  $G(t_f)$ . Введем «реверсивное» управление  $u^\#(t) = u(t_f - t)$ ,  $t \in [0, t_f]$ . Очевидно, что новое управление будет допустимым с прежним значением интеграла от квадрата управления.

Рассмотрим движение  $t \rightarrow z^\#(t)$  в силу управления  $u^\#(\cdot)$ . Имеем

$$\varphi(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad \varphi^\#(t) = \int_0^t u^\#(\tau) d\tau = \int_0^t u(t_f - \tau) d\tau = \int_{t_f-t}^{t_f} u(\tau) d\tau. \quad (3.1)$$

Поэтому  $\varphi^\#(t_f) = \varphi(t_f)$ . Через начало координат системы  $x, y$  проведем ось  $X$  под углом  $\varphi(t_f)/2$  по отношению к направлению оси  $x$ . Считаем, что ось  $Y$  ортогональна оси  $X$ . Символами  $(X(t_f), Y(t_f))^T$  и  $(X^\#(t_f), Y^\#(t_f))^T$  обозначим положения точек  $(x(t_f), y(t_f))^T$  и  $(x^\#(t_f), y^\#(t_f))^T$  во вспомогательной системе координат  $X, Y$ .

**Лемма 3.1.** *Справедливы соотношения  $X^\#(t_f) = X(t_f)$ ,  $Y^\#(t_f) = -Y(t_f)$ .*

*Доказательство.* Из формул (3.1) получаем  $\varphi^\#(t) = \varphi(t_f) - \varphi(t_f - t)$ . Введем углы, отсчитываемые от оси  $X$ :

$$\varphi_X(t) = \varphi(t) - \frac{\varphi(t_f)}{2},$$

$$\varphi_X^\#(t) = \varphi^\#(t) - \frac{\varphi(t_f)}{2} = \varphi(t_f) - \varphi(t_f - t) - \frac{\varphi(t_f)}{2} = -\left(\varphi(t_f - t) - \frac{\varphi(t_f)}{2}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y(t_f) &= \int_0^{t_f} \sin\left(\varphi(t) - \frac{\varphi(t_f)}{2}\right) dt, \\ Y^\#(t_f) &= \int_0^{t_f} \sin\left[-\left(\varphi(t_f - t) - \frac{\varphi(t_f)}{2}\right)\right] dt = \\ &= -\int_0^{t_f} \sin\left(\varphi(s) - \frac{\varphi(t_f)}{2}\right) ds = -Y(t_f). \end{aligned}$$

Заменяя в интегралах  $\sin$  на  $\cos$  и учитывая четность функции  $\cos$ , получим  $X^\#(t_f) = X(t_f)$ .  $\square$

Из леммы 3.1 следует, что любое  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(t_f)$  симметрично относительно оси  $X$  вспомогательной системы координат. Отметим также симметрию  $\varphi$ -сечений  $G_\varphi(t_f)$  при  $\varphi > 0$  и  $\varphi < 0$ . А именно,  $\varphi$ -сечение  $G_{\bar{\varphi}}(t_f)$  при  $\bar{\varphi} < 0$  связано с  $\varphi$ -сечением  $G_{\tilde{\varphi}}(t_f)$ , где  $\tilde{\varphi} = -\bar{\varphi}$ , зеркальным отражением относительно оси  $x$ . Это вытекает из того, что движения системы (2.1) из начальной нулевой точки  $z(t_0)$  в силу управлений  $\bar{u}(\cdot)$  и  $\tilde{u}(\cdot) = -\bar{\varphi}$  связаны соотношениями  $\bar{x}(\cdot) = \tilde{x}(\cdot)$ ,  $\bar{y}(\cdot) = -\tilde{y}(\cdot)$ ,  $\bar{\varphi}(\cdot) = -\tilde{\varphi}(\cdot)$ .

#### 4. Принцип максимума Понтрягина

Из общих результатов математической теории управления следует, что множество  $G(t_f)$  замкнуто и ограничено. В [2] показано, что для любой точки  $z(t_f) \neq z^0(t_f)$  на  $\partial G(t_f)$  выполнен принцип максимума Понтрягина (ПМП), записанный для задачи минимизации функционала (1.2) на движениях системы (2.1) с фиксированными краевыми условиями  $z(t_0) = 0$  и  $z(t_f)$ . При этом минимум функционала равен  $\mu$ .

Запишем соотношения ПМП для задачи минимизации функционала (1.2) с фиксированными краевыми условиями в системе (2.1) (см., например, [3], [1]). Пусть  $u(\cdot)$  — не равное тождественно нулю допустимое управление,  $(x(\cdot), y(\cdot), \varphi(\cdot))^T$  — соответствующее движение системы (2.1) на промежутке  $[t_0, t_f]$ . Дифференциальные уравнения сопряженной системы имеют вид

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \varphi(t) - \psi_2 \cos \varphi(t). \quad (4.1)$$

ПМП означает, что если  $u(\cdot)$  — минимизирующее управление, то существует ненулевое решение  $(\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), \psi_3(\cdot))^T$  системы (4.1), для которого почти всюду на  $[t_0, t_f]$  выполнено равенство  $u(t) = \psi_3(t)/2$ . В дальнейшем управление, удовлетворяющее ПМП, полагаем непрерывным.

Функции  $\psi_1(\cdot)$  и  $\psi_2(\cdot)$  есть константы. Обозначим их  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Если  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_2 = 0$ , то  $\psi_3(t) = \text{const} \neq 0$  на  $[t_0, t_f]$ . Следовательно, в этом случае  $u(t) \equiv \text{const}$  и задается формулой  $u(t) = \sqrt{\mu/t_f}$ . Такое управление определяет одноточечное сечение  $G_\varphi(t_f)$  для максимально возможного значения  $\varphi = \varphi_{\max} = \sqrt{\mu t_f}$ .

Пусть теперь хотя бы одно из чисел  $\psi_1, \psi_2$  не равно нулю. Опираясь на (2.1) и (4.1), можно записать выражение  $\psi_3(t) = \psi_1 y(t) - \psi_2 x(t) + C$ . Отсюда следует, что  $\psi_3(t) = 0$  тогда и только тогда, когда точка  $(x(t), y(t))^T$  геометрического положения в момент  $t$  удовлетворяет уравнению прямой

$$\psi_1 y - \psi_2 x + C = 0. \quad (4.2)$$

Прямая переключения (4.2) не является универсальной: при изменении управления, удовлетворяющего ПМП, изменяется и прямая переключения. В дальнейшем вместо «прямая переключения» пишем ПП.

Дополнив систему (2.1), (4.1) соотношением

$$u(t) = \psi_3(t)/2, \quad (4.3)$$

приходим к замкнутой системе дифференциальных уравнений, для которой выполнены стандартные условия теорем существования и единственности решения. Поэтому, в частности, не может быть движений на плоскости  $x, y$ , которые подходили бы по касательной к ПП за конечное время. Аналогично, не может быть движений, которые сходят с ПП после некоторого движения по ней. Возможно лишь пересечение ПП под ненулевым углом, либо сход с нее в начальный момент (соответственно, вход в последний момент) под ненулевым углом. Перебирая дополнительно к фиксированному начальному условию  $z(t_0) = 0$  значения  $\psi_1, \psi_2, \psi_3(t_0)$ , получаем совокупность движений  $t \rightarrow z(t)$ , среди которых необходимо должны быть все движения, ведущие на  $\partial G(t_f)$ .

С учетом (4.3) уравнения для  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}_3$  (при оговоренных постоянных  $\psi_1$  и  $\psi_2$ ) запишем в виде одного уравнения второго порядка:

$$\ddot{\varphi}(t) = \rho \sin(\varphi(t) - \beta).$$

Здесь  $\rho$  — длина вектора с компонентами  $\psi_1/2, \psi_2/2$ , а  $\beta$  — угол наклона этого вектора, отсчитываемый против часовой стрелки от оси  $x$ . Таким образом, перебор переменных  $\psi_1, \psi_2, \psi_3(0)$  заменяем на перебор переменных  $\rho, \beta$  и  $\dot{\varphi}(0) = \psi_3(0)/2$ .

Применим соотношение из работы [3]:

$$\frac{d(\dot{\varphi}(t))^2}{dt} = 2\dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t) = 2\dot{\varphi}(t)\rho \sin(\varphi(t) - \beta).$$

Стало быть,

$$(\dot{\varphi}(t))^2 = c_* - 2\rho \cos(\varphi(t) - \beta). \quad (4.4)$$

При  $\dot{\varphi}(t) \neq 0$  получаем

$$\dot{\varphi}(t) = \pm \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi(t) - \beta)}. \quad (4.5)$$

Эту формулу используем на участках движения, где  $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ . Знак «+» соответствует управлению  $u(t) > 0$ , знак «-» означает, что  $u(t) < 0$ . Вспоминая выражение (4.2) для ПП и учитывая, что  $\psi_3(t)/2 =$

$\dot{\varphi}(t)$ , получаем, что знак «+» перед корнем соответствует одной полуплоскости, определяемой ПП, а знак «-» отвечает другой полуплоскости. Условимся направление ПП выбирать так, чтобы полуплоскость, где  $u > 0$ , лежала слева, а полуплоскость с  $u < 0$  справа. Угол  $\beta$  равен углу (отсчитываемому против часовой стрелки) между направлением оси  $x$  и направлением ПП. Константы  $C$  в (4.2) и  $c_*$  в (4.4) связаны соотношением  $c_* = 2\rho \cos \beta + C^2/4$ .

Из (4.5) имеем

$$dt = \frac{d\varphi}{\pm \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta)}}. \quad (4.6)$$

Формула (4.6) позволяет заменить интегрирование по  $t$  интегрированием по  $\varphi$  в полуплоскостях с постоянным знаком управления.

### 5. Простые следствия из ПМП. Теорема об управлениях, ведущих на границу множества достижимости

В приводимых ниже утверждениях предполагается, что расход интегрального ресурса на рассматриваемом допустимом управлении равен  $\mu$ .

**Утверждение 5.1.** Пусть движение  $z(\cdot)$  системы (2.1) на промежутке  $[t_0, t_f]$  порождается непрерывным управлением  $u(\cdot)$  (не равным тождественно нулю) и при этом выполнен ПМП. Тогда управление  $u(\cdot)$  изменяет знак не более чем конечное число раз. Кроме того:

а) точки геометрического положения системы (2.1) на плоскости  $x, y$  в моменты смены знака управления  $u(\cdot)$  лежат на ПП;

б) если  $z(\cdot)$  таково, что движение  $(x(\cdot), y(\cdot))^T$  пересекает ПП не менее трех раз, то время между соседними моментами пересечения ПП одинаково; одинаковым также является соответствующее приращение угла по модулю;

в) если  $z(\cdot)$  таково, что движение  $(x(\cdot), y(\cdot))^T$  пересекает ПП хотя бы один раз, то на каждом участке постоянства знака управления накопленный угол по модулю не превосходит  $2\pi$ .

**Лемма 5.1.** Пусть движение  $z(\cdot)$  системы (2.1) на промежутке  $[t_0, t_f]$  порождается непрерывным управлением  $u(\cdot)$ , удовлетворяю-

щим ПМП с двумя моментами  $t_1, t_2$  смены знака управления, причем  $t_0 < t_1 < t_2 < t_f$ . Предположим, что

$$|(\varphi(t_1) - \varphi(t_0)) + (\varphi(t_f) - \varphi(t_2))| > |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|. \quad (5.1)$$

Тогда  $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$ .

*Доказательство.* Не теряя общности, примем следующую последовательность знаков управления  $u(\cdot)$ :  $-, +, -$ . Тогда условие (5.1) запишется в виде

$$-(\varphi(t_1) - \varphi(t_0)) - (\varphi(t_f) - \varphi(t_2)) > \varphi(t_2) - \varphi(t_1).$$

Предположим от противного, что  $z(t_f) \in \partial G(t_f)$ . Тогда любое управление, ведущее в эту точку, удовлетворяет ПМП.

Выберем моменты  $\bar{t} \in (t_0, t_1)$  и  $\hat{t} \in (t_2, t_f)$  так, чтобы выполнялось равенство

$$-(\varphi(t_1) - \varphi(\bar{t})) - (\varphi(\hat{t}) - \varphi(t_2)) = \varphi(t_2) - \varphi(t_1).$$

Возможность такого выбора следует из непрерывности  $\varphi(t)$ . Имеем  $\varphi(\bar{t}) = \varphi(\hat{t})$ .

Рассмотрим на участке  $[\bar{t}, \hat{t}]$  реверсивное управление  $u^\#(t) = u(\hat{t} - t)$ . Заменяя в лемме 3.1 начальное условие  $z(t_0) = 0$  на  $z(\bar{t})$  и учитывая равенство  $\varphi(\bar{t}) = \varphi(\hat{t})$ , получаем, что  $(x(\hat{t}), y(\hat{t}))^T = (x^\#(\hat{t}), -y^\#(\hat{t}))^T$ . Возьмем теперь управление  $\tilde{u}(t) = -u^\#(t), t \in [\bar{t}, \hat{t}]$ . Для соответствующего движения, выходящего из точки  $z(\bar{t})$ , получаем  $\tilde{z}(\hat{t}) = z(\hat{t})$ . Доопределим управление  $\tilde{u}(\cdot)$  и соответствующее ему движение  $\tilde{z}(\cdot)$  на промежутке  $[t_0, t_f]$ , полагая  $\tilde{u}(t) = u(t)$  при  $t \in [t_0, \bar{t}] \cup (\hat{t}, t_f]$ . Интегральный расход управления  $\tilde{u}(\cdot)$  на  $[t_0, t_f]$  совпадает с расходом управления  $u(\cdot)$ . Имеем  $\tilde{z}(t_f) = z(t_f)$ . Стало быть, управление  $\tilde{u}(\cdot)$  также ведет на  $\partial G(t_f)$ . Однако оно не удовлетворяет ПМП, поскольку является разрывным в моменты  $\bar{t}, \hat{t}$ .  $\square$

**Лемма 5.2.** Пусть движение  $z(\cdot)$  системы (2.1) на промежутке  $[t_0, t_f]$  порождается непрерывным управлением  $u(\cdot)$ , которое удовлетворяет ПМП с тремя моментами  $t_1, t_2, t_3$  смены знака управления, причем  $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_f$ . Тогда  $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$ .



*Доказательство.* В силу утверждения 5.1б имеем  $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \varphi(t_2) - \varphi(t_3)$ . Стало быть, на промежутке  $[t_1, t_f]$  выполнены условия леммы 5.1 (при интегральном ограничении, равным разности исходного ограничения и интеграла от квадрата управления на  $[t_0, t_1]$ .) Поэтому рассматриваемое движение в момент  $t_f$  приходит во внутренность множества достижимости в момент  $t_f$ , построенного на промежутке  $[t_1, t_f]$  от начального состояния  $z(t_1)$ . Стало быть,  $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$ .  $\square$

Введем типы непрерывных управлений  $u(\cdot)$  с не более чем двумя моментами смены знака управления. Тип  $U_1$  характеризуется тем, что  $u(t) > 0$  на всем промежутке  $[t_0, t_f]$ . Аналогично определяем тип  $U_4$  с заменой положительного управления на отрицательное. Тип  $U_2$  имеет один момент смены знака управления, при этом вначале идет знак «+», потом «-». Тип  $U_3$  также имеет один момент смены знака, но только с «-» на «+». Тип  $U_5$  задается двумя моментами смены знака и последовательностью +, -, +. Тип  $U_6$  имеет два момента смены знака управления и последовательность -, +, -.

**Теорема 5.1.** *В любую точку  $z(t_f) \neq z^0(t_f)$  на  $\partial G(t_f)$  ведет непрерывное управление, удовлетворяющее ПМП и относящееся к одному из типов  $U_1 - U_6$ . Других вариантов управлений, ведущих на границу, нет.*

*Если  $\varphi(t_f) > 0$ , то в перечне шести типов оставляем лишь четыре:  $U_1, U_2, U_3, U_6$ . В случае  $\varphi(t_f) < 0$  ограничиваемся четырьмя типами  $U_2, U_3, U_4, U_5$ . Если  $\varphi(t_f) = 0$ , оставляем типы  $U_2, U_3, U_5, U_6$ ; при этом управления типов  $U_5$  и  $U_6$  порождают одну и ту же совокупность точек.*

*Доказательство.* В любую точку  $z(t_f) \neq z^0(t_f)$  на  $\partial G(t_f)$  ведет управление, удовлетворяющее ПМП. В силу утверждения 5.1 оно имеет не более конечного числа моментов смены знака управления.

Предположим от противного, что на  $\partial G(t_f)$  есть точка  $\hat{z}$ , перевод в которую возможен при помощи управления с тремя или более моментами смены знака. Если таких управлений несколько, то возьмем управление  $u^\diamond(\cdot)$  с наименьшим числом моментов смены знака. Порождаемое им движение обозначим  $z^\diamond(\cdot)$ . Рассмотрим движение  $z^\diamond(\cdot)$  на четырех последних участках постоянства знака управления. В силу леммы 5.2 получаем  $z^\diamond(t_f) \in \text{int}G(t_f)$ .

Таким образом, в любую точку  $z(t_f) \neq z^0(t_f)$  на  $\partial G(t_f)$  можно перейти при помощи управления, относящегося к одному из типов  $U_1 - U_6$ . С учетом лемм 3.1 и 5.1 этот факт можно уточнить следующим образом в зависимости от знака угла  $\varphi$  для рассматриваемой точки  $z(t_f) = (x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f))^T$ .

Любое управление типа  $U_1$  ведет в точку с  $\varphi(t_f) > 0$ . Для управлений типа  $U_4$  имеем  $\varphi(t_f) < 0$ . Поэтому типы  $U_1, U_4$  при  $\varphi(t_f) = 0$  исключаем. В силу леммы 3.1 управления  $U_5$  и  $U_6$  для  $\varphi(t_f) = 0$  порождают одну и ту же совокупность точек  $(x(t_f), y(t_f))^T$ .

Пусть  $\varphi(t_f) > 0$ . Управления типа  $U_4$  исключаем. Управления типа  $U_5$  также исключаем, поскольку в силу леммы 5.1 такие управления ведут во внутренность множества достижимости.

Случай  $\varphi(t_f) < 0$  разбирается аналогично. Здесь также получаем четыре варианта управлений:  $U_2, U_3, U_4, U_5$ .  $\square$

## 6. Соотношения для расчета движений в силу управлений типа $U_1 - U_6$

Для описания кривых, из которых набирается граница  $\varphi$ -сечения при  $\varphi = \varphi(t_f) \in [0, \sqrt{\mu t_f}]$ , будем использовать кривые  $A_1, A_2, A_3, A_6$ , соответствующие типам управлений  $U_1, U_2, U_3, U_6$ .

1) Кривая  $A_1$  состоит из точек, в каждую из которых ведет положительное управление. Для таких управлений справедливы соотношения

$$t_f = \int_0^{\varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta_1)}}, \quad (6.1)$$

$$\mu = \int_0^{\varphi(t_f)} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta_1)} d\varphi. \quad (6.2)$$

Здесь  $\beta_1$  — угол, отсчитываемый от оси  $x$  (по которой направлен вектор скорости в начальный момент) против часовой стрелки до направления ПП. Константу  $c_*$  представим в виде  $2\rho k_1$ , где  $k_1 > 0$ . Это позволяет, рассматривая умножение  $t_f \cdot \mu$ , получить из формул (6.1), (6.2) при фиксированном  $\beta_1$  уравнение с одним неизвестным  $k_1$ :

$$t_f \cdot \mu = \int_0^{\varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{k_1 - \cos(\varphi - \beta_1)}} \cdot \int_0^{\varphi(t_f)} \sqrt{k_1 - \cos(\varphi - \beta_1)} d\varphi. \quad (6.3)$$

Первый и второй интегралы в этом соотношении несложным преобразованием сводятся к эллиптическим интегралам 1-го и 2-го рода [5]. Определив  $k_1$ , находим  $\rho$  из соотношения (6.2). Далее интегрируем на  $[0, t_f]$  первые два уравнения системы (2.1) с учетом (4.5). Получаем движение на плоскости  $x, y$ , кончик которого обозначим  $A_1(\beta_1)$  и отнесем к кривой  $A_1$  для рассматриваемого  $\beta_1$ .

Если  $\beta_1 = \varphi(t_f)/2$ , то соответствующее движение приходит на ось  $X$ . При этом направление ПП совпадает с направлением оси  $X$ . Построение кривой  $A_1$  удобно начать именно с этой точки, перебирая  $\beta_1$  в диапазоне  $[\frac{\varphi(t_f)}{2}, \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi]$ . Увеличиваем  $\beta_1$  от значения  $\varphi(t_f)/2$ . Символом  $\tilde{\beta}_1$  обозначим наибольшее  $\beta_1$ , при котором существует решение уравнения (6.3). Геометрически значение  $\tilde{\beta}_1$  выделяется тем, что отвечающая ему ПП проходит через точку  $A_1(\tilde{\beta}_1)$ . Для любого  $\beta_1 \in [\frac{\varphi(t_f)}{2}, \tilde{\beta}_1)$  движение, ведущее в точку  $A_1(\beta_1)$ , находится на промежутке  $[0, t_f]$  строго слева от ПП. Если  $\tilde{\beta}_1 < \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi$ , то угол между вектором скорости в точке  $A_1(\tilde{\beta}_1)$  и направлением ПП больше нуля. Обозначим его  $\tilde{\beta}_3$ . Если  $\tilde{\beta}_1 = \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi$ , этот угол равен нулю. Значение  $\tilde{\beta}_1 = \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi$  реализуется лишь при  $\varphi(t_f) = 2\pi$ , т.е. когда направление оси  $X$  противоположно оси  $x$ .

При численном построении диапазон  $[\frac{\varphi(t_f)}{2}, \tilde{\beta}_1]$  разделяется на три части, в каждой из которых специальным способом учитываются особенности эллиптических интегралов [5].

Построив описанную часть кривой  $A_1$ , отражаем ее относительно оси  $X$  (согласно лемме 3.1) и получаем симметричную часть. Объединение таких двух частей составляет кривую  $A_1$ . При  $\tilde{\beta}_1 = \frac{\varphi(t_f)}{2} + \pi$  кривая  $A_1$  становится замкнутой. Если  $\varphi(t_f) = 0$ , то кривая  $A_1$  не строится.

2) При построении кривой  $A_3$  перебираем все управления с одним моментом смены знака с «+» на «-», дающие в момент  $t_f$  значение угла равное  $\varphi(t_f)$ . Каждая траектория полностью определяется значениями  $t_f, \mu, \varphi(t_f)$  и углом  $\beta_3$  наклона траектории в момент пересечения ПП (угол отсчитывается против часовой стрелки от направления вектора скорости до направления ПП). Поэтому можем, взяв вспомогательную начальную точку на ПП, отдельно рассмотреть участок движения из такой точки в прямом времени с отрицательным управлением, удовлетворяющим ПМП, и заданным углом

$\beta_3$ . Строим такой участок до тех пор, пока изменение угла  $\varphi$  на нем не достигнет по модулю зафиксированного числа  $\varphi_3 \geq 0$ . Затем в обратном времени из той же вспомогательной точки при том же угле  $\beta_3$  рассматриваем движение с положительным управлением на промежутке времени, на котором изменение угла  $\varphi$  будет  $\varphi_3 + \varphi(t_f)$ . Значение  $\varphi_3$  при взятом  $\beta_3$  выбираем так, чтобы суммарное время на двух участках равнялось  $t_f$  и расход интегрального ресурса был равен  $\mu$ . Склеив две полученные траектории в одну через их общую начальную точку, получим траекторию на промежутке  $[0, t_f]$ , итоговое изменение угла вдоль которой равно  $\varphi(t_f)$ . Перенеся ее начало в начало координат исходной системы  $x, y$  и совместив направление вектора скорости в начальный момент с направлением оси  $x$ , получим требуемое движение. Его конечную точку обозначим  $A_3(\beta_3)$ . Кривую  $A_3$  набираем, изменяя угол  $\beta_3 \geq \tilde{\beta}_3$ . Контролируем, чтобы ветвь кривой, строящейся в обратном времени, не выходила вторично на ПП. Последнее определяет наибольший угол  $\hat{\beta}_3 \in [\tilde{\beta}_3, \pi]$  наклона вектора скорости к ПП во вспомогательной начальной точке.

Перечисленные условия приводят к следующей системе соотношений:

$$t_f = \int_0^{\varphi_3} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_3)}} + \int_0^{\varphi_3 + \varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_3)}}, \quad (6.4)$$

$$\mu = \int_0^{\varphi_3} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_3)} d\varphi + \int_0^{\varphi_3 + \varphi(t_f)} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_3)} d\varphi. \quad (6.5)$$

Учитывая  $\psi_3(0) = 0$  во вспомогательной начальной точке на ПП, имеем  $c_* = 2\rho \cos \beta_3$ . Перемножая равенства (6.4) и (6.5), получаем уравнение относительно  $\varphi_3$ . При каждом  $\beta_3 \in [\tilde{\beta}_3, \hat{\beta}_3]$  находим из такого уравнения единственное  $\varphi_3$ , а затем единственное  $\rho$  из соотношения (6.5). На базе полученных значений  $\varphi_3$  и  $\rho$  строим две ветви искомой геометрической кривой. Обе ветви выходят из вспомогательной начальной точки на ПП. Переносим склеенную кривую в начало координат исходной системы.

Перебор  $\beta_3 \in [\tilde{\beta}_3, \hat{\beta}_3]$  дает кривую  $A_3$ . Ей соответствует симметричная относительно оси  $X$  кривая  $A_2$ , в каждую точку которой ведет реверсивное управление. Кривая  $A_3$  не строится если  $\tilde{\beta}_3 = \hat{\beta}_3$ .

3) Пусть  $\widehat{\varphi}_{6,1} > 0$  есть значение  $\varphi_3$ , получаемое для  $\beta_3 = \widehat{\beta}_3$ . При построении кривой  $A_6$  в качестве одномерного параметра возьмем  $\varphi_{6,1}$ , уменьшая его от значения  $\widehat{\varphi}_{6,1}$ . Движение, ведущее при рассматриваемом  $\varphi_{6,1}$  в точку  $A_6(\varphi_{6,1})$ , состоит из трех участков, равных по угловой величине соответственно  $-\varphi_{6,2}$  (участок лежит справа от ПП),  $+\varphi_{6,2} + \varphi_{6,1} + \varphi(t_f)$  (участок лежит слева от ПП),  $-\varphi_{6,1}$  (справа от ПП). Здесь  $\varphi_{6,2}, \varphi_{6,1}, \varphi(t_f)$  считаются положительными. Справедливо равенство

$$2\pi - 2\beta_6 - \varphi_{6,2} - \varphi_{6,1} = \varphi(t_f). \quad (6.6)$$

Угол  $\beta_6$  определяется так же, как угол  $\beta_3$ , но соответствует второму попаданию движения на ПП.

Составляем соотношения

$$\begin{aligned} t_f &= \int_0^{\varphi_{6,2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)}} + \\ &+ \int_0^{\varphi_{6,1}} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)}} + \int_0^{\varphi_{6,2} + \varphi_{6,1} + \varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)}}, \\ \mu &= \int_0^{\varphi_{6,2}} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)} d\varphi + \\ &+ \int_0^{\varphi_{6,1}} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)} d\varphi + \int_0^{\varphi_{6,2} + \varphi_{6,1} + \varphi(t_f)} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)} d\varphi. \end{aligned}$$

Полагаем в них  $c_* = 2\rho \cos \beta_6$ . Эти соотношения с учетом равенства (6.6) дают систему относительно  $\beta_6$  и  $\rho$  при фиксированном  $\varphi_{6,1}$ . Строим кривую  $A_6$ , доведя ее до попадания на ось  $X$  с осуществлением равенства  $\varphi_{6,1} = \varphi_{6,2}$ . Рассматривая в силу леммы 3.1 симметричную относительно оси  $X$  кривую, получаем объединенную кривую  $A_6$ . Кривая  $A_6$  соединяет концы кривых  $A_3$  и  $A_2$ . Кривая  $A_6$  гладко сопрягается с кривыми  $A_3$  и  $A_2$ . Кривая  $A_6$  не строится, если  $\widehat{\varphi}_{6,1} = 0$ .

## 7. Результаты моделирования

На рис. 1 слева показано трехмерное множество достижимости  $G(t_f)$ , просчитанное при  $\mu = 100$  для момента  $t_f = 0.95$ . Цветом выделены участки границы, на которые ведут различные типы управлений:  $U_1$  — положительное управление (синий цвет),  $U_4$  — отрицательное управление (желтый цвет),  $U_3$  — управление с одним моментом

смены знака с «+» на «-» (зеленый цвет),  $U_2$  — управление с одним моментом смены знака с «-» на «+» (фиолетовый цвет). Точка  $z^0(t_f)$ , в которую ведет тождественно равное нулю управление, лежит на стыке четырех указанных участков. Участки, соответствующие  $U_3$  и  $U_2$ , стыкуются между собой негладко. Черными линиями намечены с некоторым шагом по оси  $\varphi$  контуры сечений трехмерного множества  $G(t_f)$ . Множество  $G(t_f)$  не является односвязным: имеется полость ему не принадлежащая. Она не видна, когда смотрим на множество снаружи.

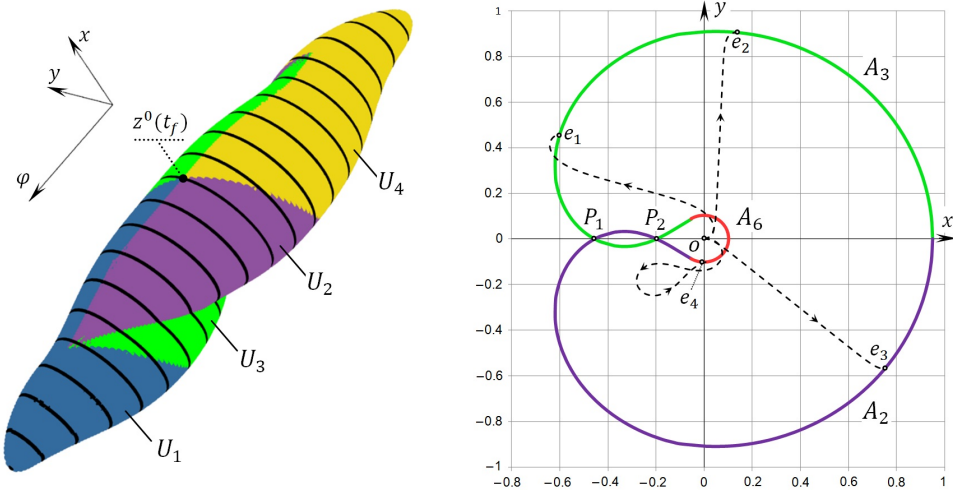


Рисунок 1. Трехмерное множество достижимости  $G(t_f)$  при  $\mu = 100$  для момента  $t_f = 0.95$  и его  $\varphi$ -сечение при  $\varphi = 0$ .

Чтобы показать ее, на рис. 1 справа представлено  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(t_f)$  множества  $G(t_f)$  при  $\varphi = 0$ . Поскольку  $\varphi = 0$ , то вспомогательная ось  $X$ , относительно которой  $\varphi$ -сечение является симметричным, совпадает с осью  $x$ . Кривая  $A_1$  на  $\partial G_\varphi(t_f)$  отсутствует. Точка  $z^0(t_f)$  принадлежит данному  $\varphi$ -сечению и расположена на оси  $x$ . От оси  $x$  отходят симметричные друг другу кривые  $A_3$  и  $A_2$ . Их дуги до точки  $P_1$  первого пересечения дают «внешнюю» границу  $\varphi$ -сечения. Дуги  $A_3$  и  $A_2$  от точки  $P_1$  до точки  $P_2$  второго пересечения лежат во внутренности  $\varphi$ -сечения. Кривая  $A_6$  и примыкающие к ней участки кривых  $A_3$  и  $A_2$  после точки  $P_2$  составляют границу «дырки», не принадлежащей  $G_\varphi(t_f)$ . На плоскости  $x, y$  пунктиром показаны траектории четырех

движений, ведущих на границу  $\varphi$ -сечения (а стало быть, и на границу трехмерного множества достижимости). Траектории, ведущие в точки  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ , имеют одну точку перегиба (точка смены знака управления). Такие кривые представляют собой глобально оптимальные эластики Эйлера. Траектория, ведущая в точку  $e_4$  на кривой  $A_6$ , имеет две точки перегиба (две точки смены знака управления) и является локально оптимальной эластикой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ардентов А.А., Сачков Ю.Л. *Решение задачи Эйлера об эластиках* // *АиТ*. 2009. Вып. 4. С. 78–88.
2. Гусев М.И., Зыков И.В. *Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях* // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2017. Т. 23, № 1. С. 103–115.
3. Зеликин М.И. *Теория и приложения задачи об эйлеровых эластиках* // *УМН*. 2012. Т. 67, вып. 2, С. 93–108.
4. Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. *Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы* // *Известия РАН. ТиСУ*. 2003. № 3. С. 8–16.
5. Сикорский Ю.С. *Элементы теории эллиптических функций: С приложениями к механике*. М.: КомКнига, 2006.
6. Эйлер Л. *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле*. М.; Л.: Гостехиздат, 1934.
7. Patsko V.S., Fedotov A.A. *Three-dimensional reachable set for the Dubins car: Foundation of analytical description* // *Commun. Optim. Theory*. 2022. V. 2022. P. 1–42.

## REACHABLE SET OF THE DUBINS CAR WITH AN INTEGRAL CONSTRAINT ON CONTROL

**Valerii S. Patsko**, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS, Cand.Sc. (patsko@imm.uran.ru),  
**Georgii I. Trubnikov**, Ural Federal University,  
**Andrey A. Fedotov**, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS, Cand.Sc. (andreyfedotov@mail.ru).

*Abstract:* A three-dimensional reachable set for a nonlinear controlled object “Dubins car” is investigated. The control is the angular velocity of rotation of the linear velocity vector. The control action is constrained by an integral quadratic constraint. Based on the Pontryagin maximum principle, a description of the motions generating the boundary of the reachable set is given. The motions leading to the boundary are optimal Euler elastics. Simulation results are presented.

*Keywords:* Dubins car, integral constraint on control, three-dimensional reachable set, Pontryagin maximum principle, Euler elastics, numerical constructions.