

Трёхмерное множество достижимости для машины Дубинса: обоснование аналитического описания

В.С. ПАЦКО*, А.А. ФЕДОТОВ†

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского,
Екатеринбург, Россия

Посвящается памяти профессора Рафаила Фёдоровича Габасова

Аннотация. Машина Дубинса — модель движения, в которой скалярное управление u определяет мгновенную угловую скорость поворота. В работе рассматривается симметричный вариант ограничений $u \in [u_1, u_2]$, где $u_1 = -u_2$ и $u_2 = 1$. Исследуется трёхмерное множество достижимости в заданный момент времени $t_f > 0$. Дается аналитическое описание двумерных сечений множества по угловой координате φ . Граница каждого φ -сечения образуется при помощи некоторого набора кривых, полученных при помощи принципа максимума Понтрягина. Этот набор включает в себя дуги окружностей, а также эвольвенты круга. Установлено свойство симметрии каждого φ -сечения относительно некоторой прямой. Предложена классификация возможных типов φ -сечений. Наибольшую трудность представляет анализ случая с неодносвязными φ -сечениями. Указана область значений φ и t_f , при которых возникает неодносвязность φ -сечений.

Ключевые слова. Машина Дубинса; Экстремальное кусочно-постоянное управление; Принцип максимума Понтрягина; Сечения множества достижимости по угловой координате; Трёхмерное множество достижимости.

1 Введение

Математическая “машина Дубинса” — это модель управляемого движения, в которой две фазовые переменные x, y являются координатами точечного геометрического положения на плоскости, третья переменная φ есть угол, составляемый вектором скорости относительно положительного направления оси x . Величина линейной скорости считается постоянной и равной 1. Скалярное управление u имеет смысл угловой скорости поворота (или, что эквивалентно, мгновенного радиуса поворота) и стеснено ограничением $u \in [-1, 1]$.

Название модели связано с работой [1], в которой L. Dubins установил свойства кривых минимальной длины с ограниченным снизу радиусом кривизны, соединяющих две точки на плоскости с заданными направлениями выхода и входа. Это соответствует задаче быстрого действия для объекта, движущегося с постоянной скоростью и ограниченным снизу радиусом поворота. Результаты, полученные Дубинсом, были передоказаны и дополнены с использованием принципа максимума Понтрягина в работах [2, 3].

Говоря о предшествующей истории подобных задач, следует отметить статью [4] А.А. Маркова, в которой он рассмотрел 4 математические задачи, связанные с проектированием железных дорог. В 1951 г. R. Isaacs, работая в Rand Corporation, представил свой первый отчет [5] по теории дифференциальных игр, в котором поставил и

*patsko@imm.uran.ru.

†andreyfedotov@mail.ru.

наметил решение задачи «шофер-убийца». Именно Р. Айзекс первым стал называть словом «car» описываемый управляемый объект.

Эта модель часто называется “simplified unicycle” и используется при рассмотрении движений самолёта в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью и малыми углами крена (см. например, [6, глава 4, раздел 8.4], [7]). Такая модель также применяется при упрощенном описании движения наземных управляемых колесных “тележек” [8] и автономных подводных аппаратов [9]. Перечень содержательных задач на плоскости, математическое описание которых (после некоторых преобразований) сводится к модели Дубинса, имеется в книге [10].

Литература, посвящённая решению конкретных задач управления с использованием “Dubins car”, огромна. Наиболее популярны различные варианты задачи быстродействия [11–16] в том числе с фазовыми ограничениями. Задачи быстродействия с требованием прохождения через заданные точки рассмотрены в работах [17–20]. Синтез оптимального по времени управления для машины Дубинса при стандартном трёхмерном условии окончания представлен в статье [7]. Рассматриваются задачи о возможности удлинения кривых, решающих задачу быстродействия с трёхмерным условием окончания, на некоторый промежуток времени [21]. В некоторых работах (см., например, [22–24]) исследуются решения близких к игровым задач преследования, где догоняющий объект обладает динамикой машины Дубинса. Изучается связь стандартной задачи о переводе объекта за наименьшее время на заданное множество в пространстве геометрических координат с решением дифференциальной игры “шофёр-убийца” [25–27].

Заслуживает внимания также работа [28], в которой автомобиль Дубинса нашел неожиданное применение для гибких манипуляторов.

Ограничение на управляющее воздействие не обязательно имеет вид $u \in [-1, 1]$. Более общий вариант записывается в виде $u \in [u_1, u_2]$. Для случая $u_1 < 0$, $u_2 > 0$ синтез управления в задаче быстродействия построен в работе [29]. Исследуются и другие модели движения, описание которых явно идёт от машины Дубинса, но является более сложным [10, глава 13], [30–33]. При этом часто структура оптимальных управлений наследует оптимальную структуру аналогичной задачи с динамикой машины Дубинса (см., например, работу [34]).

Множество достижимости в момент t_f при оговоренном начальном фазовом состоянии в момент t_0 есть совокупность всех фазовых состояний, в каждое из которых можно перевести систему при помощи некоторого допустимого программного управления точно в момент t_f . Множество достижимости в момент t_f отличается от множества достижимости *к моменту*. Последнее состоит из фазовых состояний, в каждое из которых возможен перевод в некоторый момент из промежутка $[t_0, t_f]$.

Для численного построения трёхмерных множеств достижимости можно использовать сеточные методы, разработанные в рамках теории дифференциальных игр и уравнений Hamilton-Jacobi-Bellman в частных производных. Примеры таких построений приведены в работах [35–38].

В статье исследуется множество достижимости в момент t_f . Обозначим его $G(t_f)$. Для ограничения $u \in [-1, 1]$ приводится аналитическое описание границы двумерных сечений $G_\varphi(t_f)$ множества $G(t_f)$ по угловой координате φ . Такие φ -сечения, вообще говоря, являются невыпуклыми и могут быть неодносвязными. Их структура зависит от момента t_f и значения φ . Описание двумерного множества достижимости в момент t_f в геометрических координатах x, y (то есть, проекция трёхмерного множества $G(t_f)$ на плоскость x, y) было получено в работе [39].

Представленные в данной статье результаты базируются на утверждениях из статьи [40], в которой на основе принципа максимума Понтрягина [41, 42] доказаны утверждения о 6 типах кусочно-постоянного программного управления. Только этими типами можно ограничиться при построении границы множества $G(t_f)$. Выделенные типы в главном совпадают с вариантами, полученными Л. Дубинсом в работе [1].

Используя 6 типов программного управления, анализируем при зафиксированном t_f концы соответствующих движений, реализующие заданное значение φ . Тем самым в φ -сечении множества $G(t_f)$ выделяем набор кривых, на основе которых строим границу φ -сечения. При $\varphi \geq 0$ рассматриваем 5 различных случаев формирования границы φ -сечения. Анализ некоторых из этих случаев является весьма трудоёмким.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 даётся постановка задачи. В разд. 3 приводятся сведения о 6 типах экстремальных движений, используемых при построении границы множества достижимости $G(t_f)$. Для $\varphi \geq 0$ выводятся формулы кривых в φ -сечениях, порождаемых экстремальными движениями. Рассматривается вспомогательная система координат, более удобная, чем исходная, для анализа свойств кривых в φ -сечениях. Описываются кривые, из участков которых составляется граница φ -сечений. Анализируются свойства этих кривых. В частности, устанавливается, что две кривые представляют собой участки эвольвент круга. Разд. 4 посвящён утверждениям об экстремальных движениях, ведущих во внутренность множества $G(t_f)$. Вспомогательные утверждения, опирающиеся на теорему Жордана, приведены в разд. 5. В разд. 6. даётся классификация φ -сечений в зависимости от значений t_f и φ . Все возможные варианты разбиты на 5 случаев. В разд. 7–10 даётся детальный разбор каждого из этих случаев. Особый интерес представляет случай 2, для которого φ -сечения не являются односвязными. В разд. 12 описывается свойство симметрии, которое позволяет находить φ -сечения при $\varphi < 0$, опираясь на построенные φ -сечения для $\varphi \geq 0$.

2 Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad \dot{y} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = u; \quad u \in [-1, 1]. \quad (1)$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения на плоскости, u — скалярное управление. Условимся, что положительное значение угла φ отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки (рис. 1). Фазовый вектор $(x, y, \varphi)^T$ системы (1) обозначим через z .

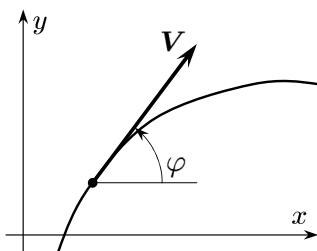


Рис. 1: Система координат, $V = (x, y)^T$

В качестве начального состояния в момент $t_0 = 0$ полагаем $x_0 = y_0 = \varphi_0 = 0$. Величину угла φ в момент t подсчитываем в виде интеграла

$$\int_0^t u(\tau) d\tau$$

от реализовавшегося на промежутке $[0, t]$ программного управления. Таким образом, $\varphi \in (-\infty, +\infty)$. В качестве допустимых программных управлений принимаем измеримые функции времени, удовлетворяющие ограничению на управление u .

Множество достижимости $G(t_f)$ определим как совокупность всех фазовых состояний системы (1), которые можно получить в момент t_f при переборе всех допустимых измеримых программных управлений на промежутке $[0, t_f]$. Выбор измеримых управлений в качестве допустимых обусловлен желанием говорить о замкнутости множества достижимости $G(t_f)$ в рамках постановки задачи.

Символом $G_\varphi(t_f)$ обозначим φ -сечение множества $G(t_f)$:

$$G_\varphi(t_f) = \{(x, y)^\top : (x, y, \varphi)^\top \in G(t_f)\}.$$

Цель работы – получить аналитическое описание φ -сечений.

Символ ∂ будет означать границу множества, символ int – внутренность. Отметим, что если некоторая точка P принадлежит $\partial G_\varphi(t_f)$, то точка $(P, \varphi)^\top$ принадлежит $\partial G(t_f)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

3 Свойства кривых, порождаемых экстремальными движениями

3.1 Типы экстремальных движений

Мы применяем принцип максимума Понтрягина (ПМП) для программных управлений, переводящих систему (1) на границу множества достижимости. При этом устанавливаем, что для любой точки на границе существует некоторое *кусочно-постоянное* управление, ведущее в эту точку. Соответствующие выкладки приведены в [40, 43]. Показано, что в любую точку на границе трёхмерного множества $G(t_f)$ можно попасть при помощи программного управления, принимающего значения в трёхэлементном множестве $\{-1, 0, 1\}$ и имеющего не более двух моментов переключения. Были выделены 6 типов управлений, которыми можно ограничиться при исследовании границы.

Перечислим эти 6 типов. Моменты переключения обозначим через t_1 и t_2 . Считаем, что $t_0 = 0$, $t_f > 0$ and $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_f$.

Любое управление типа $U1$ принимает значение $u = 1$ на некотором первом интервале $[0, t_1)$ времени, значение $u = 0$ на некотором втором интервале $[t_1, t_2)$ и значение $u = 1$ на третьем промежутке $[t_2, t_f]$. Если один или два из указанных промежутков отсутствуют, то полученное управление также относим к типу $U1$. Типы $U2 - U6$ определяются аналогично. Отмечая значения управления на каждом из трёх промежутков, соответствующую таблицу запишем в виде

$$\begin{aligned} U1 : & 1, 0, 1; & U2 : & -1, 0, 1; & U3 : & 1, 0, -1; \\ U4 : & -1, 0, -1; & U5 : & 1, -1, 1; & U6 : & -1, 1, -1. \end{aligned} \tag{2}$$

Указанные типы управлений совпадают с теми, что были выделены Л.Дубинсом в работе [1] для решения задачи быстродействия. По отношению к управлениям типа $U5$ и $U6$ в работе Л.Дубинса оговорены дополнительные условия, специфические именно для задачи быстродействия. В задаче о построении границы множества достижимости $G(t_f)$ дополнительное требование для управлений типа $U5$ и $U6$ имеет следующий вид [40, стр. 11]:

$$t_2 - t_1 \geq (t_1 - t_0) + (t_f - t_2). \quad (3)$$

В [40] показано, что при нарушении неравенства (3) программное управление типа $U5$ или $U6$ ведет во внутренность множества достижимости $G(t_f)$.

Поскольку управления $U1 - U6$ удовлетворяют ПМП, мы называем их и соответствующие движения экстремальными. Для управлений $U5$ и $U6$ будем предполагать в дальнейшем выполненным неравенство (3).

Для каждого типа возможно вырождение (сведение к нулю) одного или двух интервалов постоянства управления. Формально такие управления будем относить к более чем одному типу управлений $U1 - U6$, задаваемых в (2).

Совокупность возможных значений φ системы (1) в момент $t_f > 0$ определяется ограничением $u \in [-1, 1]$ и представляет собой отрезок $[-t_f, t_f]$. Крайние значения $\varphi = \mp t_f$ реализуются на управлениях $u(t) \equiv \mp 1$. Получаем одноточечные φ -сечения с координатами $x(t_f) = \sin t_f$, $y(t_f) = \mp(1 - \cos t_f)$.

При $\varphi > 0$ на границу $\partial G_\varphi(t_f)$ соответствующего φ -сечения могут вести управления только четырёх ($U1, U2, U3, U6$) из шести типов, указанных в (2). Действительно, любое управление типа $U4$ даёт в момент t_f значение $\varphi \leq 0$. Для любого управления типа $U5$ при $\varphi > 0$ нарушено условие (3). Подчеркнём, что для любого управления типа $U6$ при $\varphi \geq 0$ условие (3) выполнено.

Пусть $\varphi = 0$ в момент t_f . Тогда управление типа $U4$ тождественно равно нулю и может быть отнесено также и к типу $U1$. Рассмотрим теперь произвольное управление типа $U5$ с моментами переключения t_1, t_2 . Имеем $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_f$ и $t_2 - t_1 = (t_f - t_2) + (t_1 - t_0)$. Сформируем управление типа $U6$ с переключениями в моменты $t_1^* = t_f - t_2$ и $t_2^* = t_1^* + (t_2 - t_1)$. Интегрируя систему (1), нетрудно убедиться, что построенное управление типа $U6$ ведёт в ту же точку $(x(t_f), y(t_f))^T$, что и исходное управление типа $U5$. Стало быть, при $\varphi = 0$ управления типа $U5$ порождают тот же набор точек $(x, y)^T$ в момент t_f , что и управления типа $U6$.

Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 3.1. При $\varphi \in [0, t_f)$ для построения границы φ -сечений множества достижимости $G(t_f)$ можно ограничиться четырьмя типами управлений $U1, U2, U3, U6$.

Далее при исследовании φ -сечений подробные выкладки сделаны в предположении $0 \leq \varphi < t_f$. Построенные φ -сечения с учётом симметрии системы (1) определяют φ -сечения для условия $-t_f < \varphi < 0$ при помощи некоторого линейного преобразования.

3.2 Формулы в исходных координатах для кривых в φ -сечениях

Фиксируя некоторое значение φ в момент $t_f > 0$, получаем связь между моментами переключения t_1 и t_2 , обеспечивающую данное φ . Тем самым для каждого типа управления, реализующего выбранное φ , получаем соответствующую однопараметрическую кривую на плоскости x, y .

Считаем, что $\varphi \geq 0$. В соответствии с Леммой 3.1 для построения границы φ -сечений используем управление типа $U1, U2, U3, U6$.

Введём обозначение $\theta = (t_f - \varphi)/2$. Очевидно, что при $\varphi \in [0, t_f)$ выполнены неравенства $\theta > 0, \theta + \varphi > 0$.

Приведём формулы, описывающие геометрические положения на плоскости x, y в силу управлений $U1, U2, U3, U6$ при выбранных значениях t_f и φ . Соответствующие одномерные параметры s_1, s_2, s_3, s_6 определим с помощью формул

$$s_1 = 2t_1 - \varphi, \quad s_2 = -t_1, \quad s_3 = t_1 - \varphi, \quad s_6 = 2t_1 - \theta. \quad (4)$$

Диапазоны допустимых значений этих параметров возьмём (отмечая начальные и конечные значения) в виде

$$\begin{aligned} s_1 \in [s_1^b, s_1^e] &= [-\varphi, \varphi], & s_2 \in [s_2^b, s_2^e] &= [-\theta, 0], \\ s_3 \in [s_3^b, s_3^e] &= [0, \theta], & s_6 \in [s_6^b, s_6^e] &= [-\theta, \theta]. \end{aligned} \quad (5)$$

Интегрируя систему (1) для рассматриваемых четырёх типов управлений, мы получаем четыре кривые на плоскости x, y :

$$\begin{pmatrix} x_{U1}(s_1) \\ y_{U1}(s_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + (t_f - \varphi) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{s_1 + \varphi}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{s_1 + \varphi}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} x_{U2}(s_2) \\ y_{U2}(s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 2 \left((\theta + s_2) \begin{pmatrix} \cos s_2 \\ \sin s_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin s_2 \\ 1 - \cos s_2 \end{pmatrix} \right), \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} x_{U3}(s_3) \\ y_{U3}(s_3) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 2 \left((\theta - s_3) \begin{pmatrix} \cos (s_3 + \varphi) \\ \sin (s_3 + \varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin (s_3 + \varphi) \\ 1 - \cos (s_3 + \varphi) \end{pmatrix} \right), \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} x_{U6}(s_6) \\ y_{U6}(s_6) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 4 \sin \left(\frac{t_f + \varphi}{4} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\varphi - s_6}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{\varphi - s_6}{2} \right) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

В работе [44] были получены другие, но эквивалентные формулы параметрического представления указанных кривых в исходной системе координат x, y . Там они были использованы для аналитического описания φ -сечений в предположении $t_f \leq 2\pi$. Соотношения (6)–(9) являются более компактными и более эффективными для анализа φ -сечений при любом значении $t_f > 0$.

$$A6(s_6) = \begin{pmatrix} X_{U6}(s_6) \\ Y_{U6}(s_6) \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \sin\left(\frac{t_f + \varphi}{4}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{-s_6}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{-s_6}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Параметры s_1, s_2, s_3, s_6 и соответствующие диапазоны их изменения определены в (4), (5).

Дальнейший анализ φ -сечений множества достижимости $G(t_f)$ будет проводиться во вспомогательной системе координат.

3.4 Простейшие свойства кривых A1, A2, A3, A6

Кривые A1 и A6 представляют собой дуги окружностей. Каждая из них симметрична относительно оси X , поскольку справедливы соотношения

$$\begin{aligned} X_{U1}(s_1) &= X_{U1}(-s_1), & Y_{U1}(s_1) &= -Y_{U1}(-s_1); \\ X_{U6}(s_6) &= X_{U6}(-s_6), & Y_{U6}(s_6) &= -Y_{U6}(-s_6). \end{aligned}$$

Центр окружности, дугой которой является кривая A1, совпадает с началом вспомогательной системы координат. Радиус R_{A1} окружности подсчитывается по формуле

$$R_{A1} = 2\theta = t_f - \varphi. \quad (15)$$

Угловой размах дуги A1 равен φ . Поэтому при $\varphi \in [0, 2\pi)$ кривая A1 не имеет самопересечений. При $\varphi \geq 2\pi$ кривая A1 охватывает всю окружность. В точки “перехлёста” можно попасть при различных значениях параметра s_1 , отличающихся на 4π . Если $\varphi = 0$, то кривая A1 вырождается в точку $(t_f, 0)^T$. Обозначим символом C_{A1} круг радиусом R_{A1} с центром в начале отсчёта вспомогательной системы координат.

Центр окружности, дугой которой является кривая A6, находится в точке

$$H = -4 (\sin(\varphi/2), 0)^T, \quad (16)$$

расположенной на оси X . Радиус R_{A6} окружности равен

$$R_{A6} = 4 |\sin((t_f + \varphi)/4)|. \quad (17)$$

Его величина зависит от t_f, φ и становится нулевой, когда $(t_f + \varphi)$ кратно 4π . Угловой размах дуги A6 равен θ . Если $(t_f + \varphi) < 4\pi$, то $\theta < 2\pi$ и кривая A6 не имеет самопересечений. Символом C_{A6} обозначим круг радиусом R_{A6} с центром в точке H .

Кривые A2 и A3 взаимно симметричны относительно оси X . Это свойство определяется равенствами

$$X_{U2}(s_2) = X_{U3}(s_3), \quad Y_{U2}(s_2) = -Y_{U3}(s_3) \quad (18)$$

которые справедливы для любых значений параметров $s_2 = -s_3$ из диапазонов (5).

Проанализируем вырожденность участков постоянства управлений типа $U3$, образующих кривую A3. Первый участок является невырожденным при $s_3 > 0$, поскольку в силу (4) и (5) имеем $t_1 = \varphi + s_3 > 0$. Длительность второго участка

определяется формулой $t_2 - t_1 = t_f - \varphi - 2s_3$. Она обращается в нуль только при $s_3 = (t_1 - \varphi)/2 = \theta$, то есть в последней точке кривой А3. Длительность третьего участка равна $t_f - t_2 = s_3$. Следовательно, третий участок вырождается только в начальной точке кривой А3. Таким образом, ни один из участков постоянства управления не является вырожденным для внутренних точек кривой А3. Аналогичное свойство справедливо для кривой А2.

На рис. 3 показана кривая А3, соответствующая $\varphi = 0.3\pi$ и $t_f = 2.7\pi$. Для нескольких значений параметра s_3 пояснён геометрический способ построения точек $A3(s_3)$ с помощью управлений типа $U3$. Движения выходят из начальной точки o с направлением, указанным стрелкой. На промежутке $[0, t_1)$ каждое движение идёт при $u = +1$ по пунктирной окружности против часовой стрелки. Затем оно продолжается на промежутке $[t_1, t_2)$ прямолинейным движением при $u = 0$. Третий участок на $[t_2, t_f]$ соответствует движению по дуге окружности при $u = -1$ по часовой стрелке.

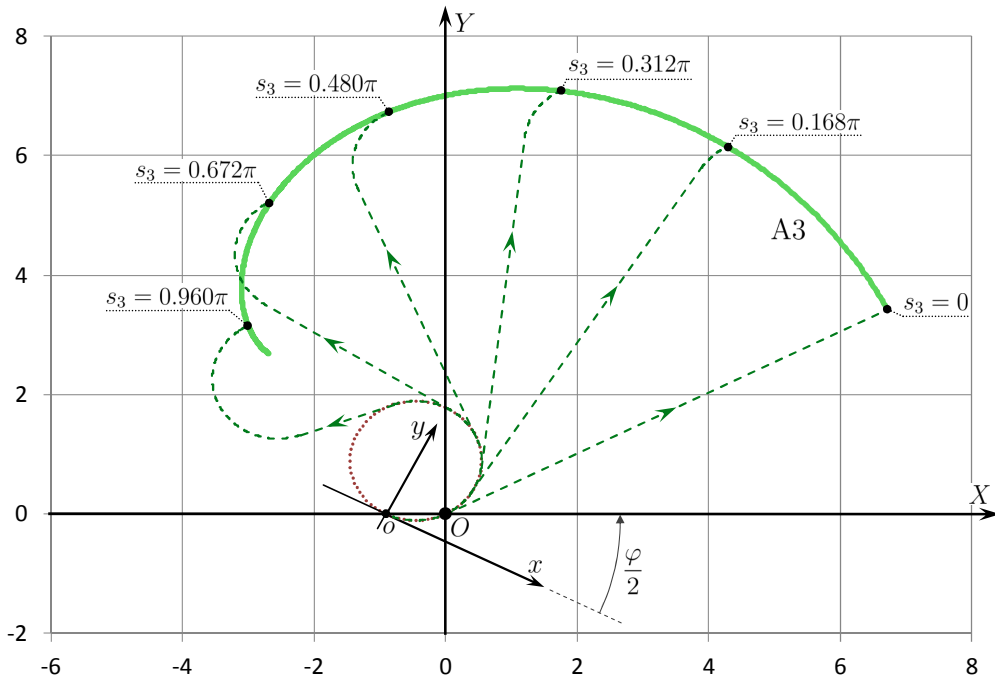


Рис. 3: Формирование кривой А3 посредством управлений типа $U3$

Рассмотрим кривые А1, А2, А3, А6 в последовательности А1, А3, А6, А2 с обходом их по возрастанию параметров s_1, s_2, s_3, s_6 . При крайних значениях параметров имеем

$$A1(s_1^e) = A3(s_3^b), \quad A3(s_3^e) = A6(s_6^b), \quad A6(s_6^e) = A2(s_2^b), \quad A2(s_2^e) = A1(s_1^b).$$

Перечисленные точки стыковки обозначим $\mathcal{P}_{1,3}, \mathcal{P}_{3,6}, \mathcal{P}_{2,6}, \mathcal{P}_{1,2}$. В результате склейки получаем непрерывную кусочно-гладкую замкнутую кривую, которую обозначим символом $A_\varphi(t_f)$.

В силу Леммы 3.1 граница φ -сечения при $\varphi \in [0, t_f)$ является подмножеством кривой $A_\varphi(t_f)$. При выделении участков кривых А1, А3, А6, А2, которые образуют границу φ -сечения, существенную трудность составляет наличие самопересечений кривой $A_\varphi(t_f)$.

На рис. 4 даны примеры кривой $A_\varphi(t_f)$. Точки сочленения кривых A1, A3, A6, A2 отмечены рисками. Для значений $t_f = 3\pi$ и $\varphi = 0.4\pi$ (Fig. 4a) кривая $A_\varphi(t_f)$ не имеет самопересечений. Для значений $t_f = 10\pi$ и $\varphi = 0.4\pi$ (Fig. 4b) точек самопересечения много. При изменении s_6 в диапазоне $[-\theta; \theta]$ точки A6(s_6) идут по границе круга C_{A6} по часовой стрелке от точки стыковки с кривой A3 до точки стыковки с кривой A2. При этом на рис. 4b точка A6(s_6) делает более двух оборотов.

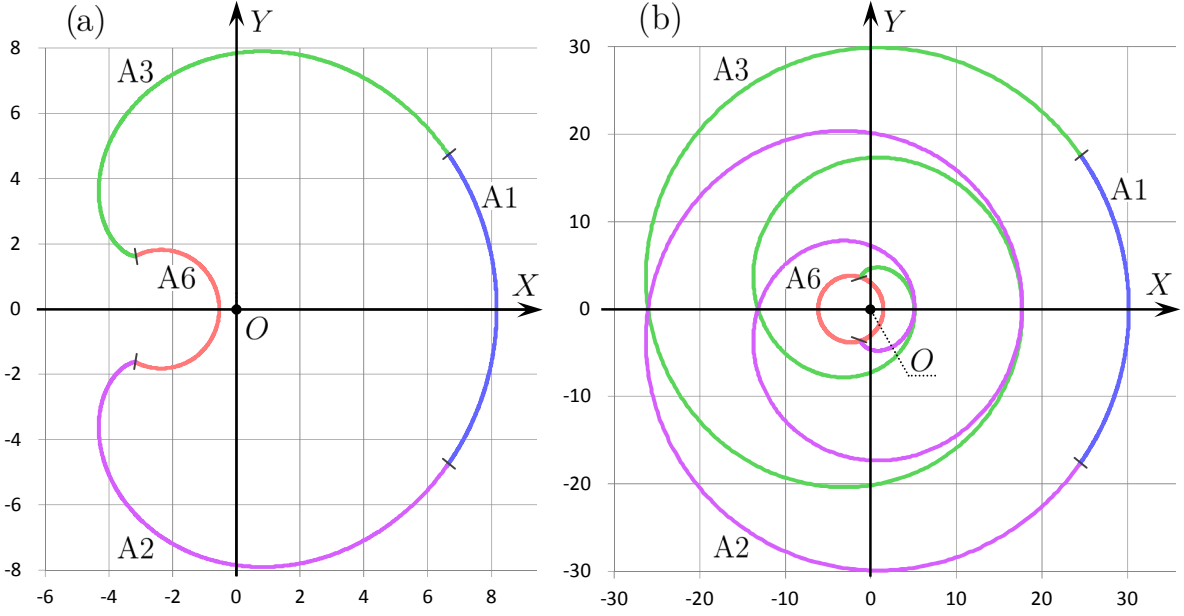


Рис. 4: Два вида кривой $A_\varphi(t_f)$ для $t_f = 3\pi$, $\varphi = 0.4\pi$ (a) и $t_f = 10\pi$, $\varphi = 0.4\pi$ (b)

Структура кривой $A_\varphi(t_f)$ (при фиксированном φ) усложняется с ростом t_f .

Далее в этом разделе будет исследовано расположение кривых A1, A2, A3, A6 на плоскости X, Y .

3.5 Кривые A2 и A3 – участки эвольвент круга

Каждая из кривых A2 и A3 является частью эвольвенты круга. Покажем это для кривой A2. Перепишем уравнение (12) для кривой A2 в эквивалентном виде, используя тригонометрическое преобразование последнего слагаемого:

$$A2(s_2) = 2(\theta + s_2) \begin{pmatrix} \cos\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\sin\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Каноническую форму параметрического представления эвольвенты круга возьмём в следующем виде (см. [45, стр. 252, формула (1)], [46, §11, стр. 43]):

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \tau + r\tau \sin \tau, \\ x_2 &= r \sin \tau - r\tau \cos \tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь x_1, x_2 – прямоугольные координаты, $\tau \geq 0$ – параметр. Радиус основной окружности равен r , её центр расположен в начале координат. Эвольвента при $\tau = 0$ выходит из точки $(0, r)^T$.

Представим кривую A2, заданную формулой (19), в виде (20) с помощью операций поворота и сдвига. Сдвиг реализуется третьим слагаемым в (19), оно не зависит от s_2 . Далее сделаем замену переменных $\tau = \theta + s_2, \tau \in [0, \theta]$. После этого первые два слагаемых в (19) (после их перестановки) запишутся следующим образом:

$$2 \begin{pmatrix} -\sin\left(\tau - \theta - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(\tau - \theta - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} + 2\tau \begin{pmatrix} \cos\left(\tau - \theta - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\tau - \theta - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Введём матрицу поворота

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

и умножим её на вектор (21). Полагая $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\varphi}{2}$, получим для (21) представление вида (20):

$$2 \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix} + 2\tau \begin{pmatrix} \sin \tau \\ -\cos \tau \end{pmatrix}.$$

Таким образом, кривая A2 есть начальный участок эвольвенты круга. Как следствие, она не имеет самопересечений. Центр основной окружности расположен в точке $2(-\sin(\varphi/2), -\cos(\varphi/2))^T$, её радиус равен 2. Начальная точка эвольвенты соответствует значению параметра $s_2 = -\theta$.

Кривая A3 симметрична кривой A2 и также представляет собой начальный участок эвольвенты круга. Для неё радиус основной окружности такой же, как и для кривой A2, а её центр находится в симметричной относительно оси X точке $2(-\sin(\varphi/2), \cos(\varphi/2))^T$.

Заметим, что точка O начала координат вспомогательной системы X, Y всегда принадлежит обоим основным окружностям.

На рис. 5 для $t_f = 2.5\pi$ и $\varphi = \pi/3$ показаны основные окружности, соответствующие эвольвентам A3 и A2. Точечные прямые линии порождают точки кривой A3 (соответственно, кривой A2) в виде точек эвольвенты круга. Изображены также кривые A1 и A6.

Подчеркнём, что точечные линии, ведущие к кривой A3 или кривой A2 не являются траекториями системы (1) из начальной фазовой точки $x_0 = y_0 = \varphi_0 = 0$ и не удовлетворяют краевому условию по φ при попадании на кривую A3 или на кривую A2.

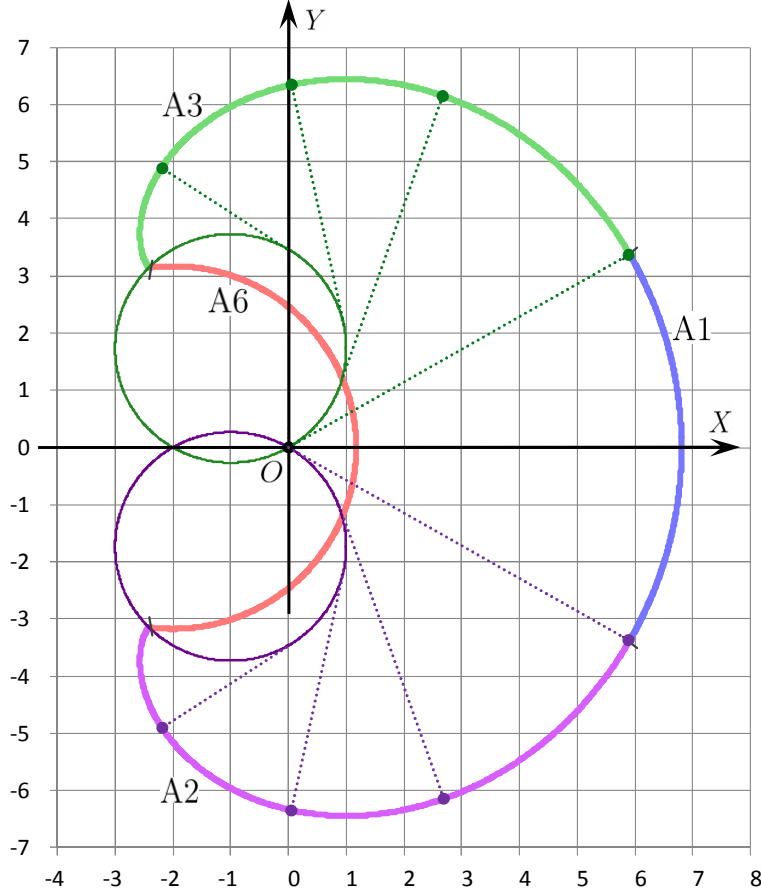


Рис. 5: Представление кривых A3 и A2 в виде эвольвент

3.6 Взаимное расположение кривых A1, A2, A3, A6

Обозначим символом $R_{1,6}(s_6)$ расстояние от центра кривой A1 (он совпадает с началом координат вспомогательной системы) до точек кривой A6. Пусть $R_{6,1}(s_1)$, $R_{6,2}(s_2)$, $R_{6,3}(s_3)$ — соответственно расстояния от центра H кривой A6 до точек кривых A1, A2, A3.

Используемые здесь обозначения поясняются на рис.6, просчитанному для $t_f = 2.4\pi$ и $\varphi = 0.8\pi$.

1) Начнём с анализа взаимного расположения кривых A1, A6. Покажем, что выполнено соотношение

$$(R_{A1})^2 - (R_{1,6}(s_6))^2 > 0, \quad s_6 \in [s_6^b, s_6^e] = [-\theta, \theta]. \quad (22)$$

Поэтому кривая A6 принадлежит $\text{int}C_{A1}$.

В силу формул (11) и (14) получаем $(R_{A1})^2 - (R_{1,6}(s_6))^2 = 4D_{1,6}(s_6)$, где

$$D_{1,6}(s_6) = \theta^2 - 4 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 8 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi + \theta}{2}\right) \cos\left(\frac{s_6}{2}\right) - 4 \sin^2\left(\frac{\varphi + \theta}{2}\right).$$

Знак неравенства (22) определяется выражением для $D_{1,6}(s_6)$.

Видно, что $D_{1,6}(s_6) > 0$, если $\theta > 4$. Пусть теперь $0 < \theta \leq 4$. Учитывая диапазон возможных значений s_6 , имеем $-2 \leq -\theta/2 \leq s_6/2 \leq \theta/2 \leq 2$. Следовательно, $\cos(\theta/2) \leq \cos(s_6/2) \leq \cos(0) = 1$. Выражение $\cos(s_6/2)$ входит линейно в определение функции $D_{1,6}(s_6)$. Поэтому её минимум достигается либо при $s_6 = 0$, либо

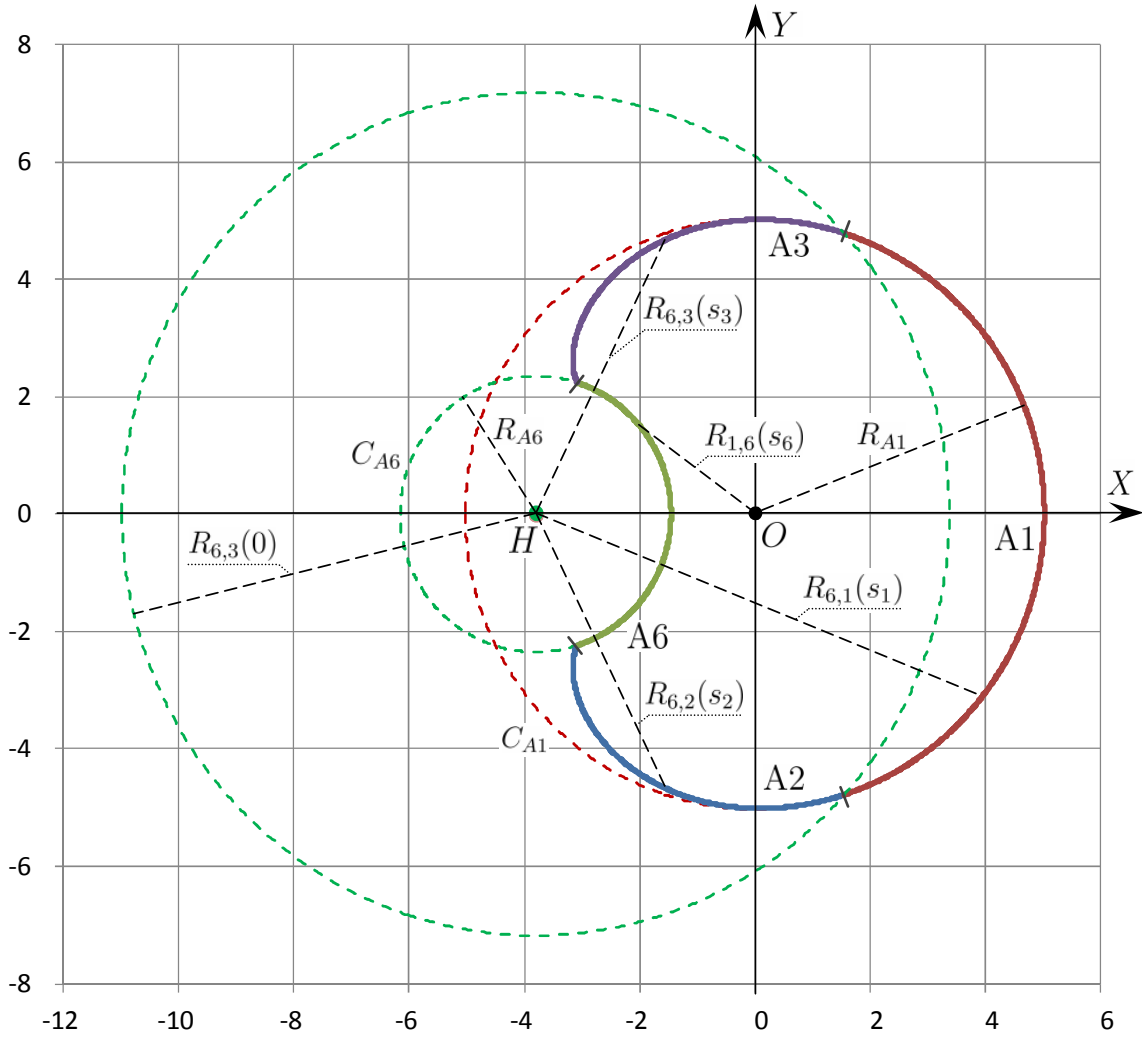


Рис. 6: Пояснение обозначений при исследовании взаимного расположения кривых A1, A2, A3, A6

при $s_6 = \pm\theta$. Учитывая чётность функции $D_{1,6}(s_6)$, условие $D_{1,6}(s_6) > 0$ достаточно проверить лишь для двух значений $s_6 = 0$ и $s_6 = \theta$.

С использованием тригонометрических преобразований получаем

$$D_{1,6}(0) = \theta^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + 8 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right) - 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right)$$

$$= \theta^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 4 \left(\left(\frac{\theta}{2} \right)^2 - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) > 0,$$

$$D_{1,6}(\theta) = \theta^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) + 8 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right)$$

$$= \theta^2 - 4 \left(\sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right) \right)^2$$

$$= \theta^2 - 4 \left(2 \sin \left(\frac{\theta}{4} \right) \cos \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right)^2 > \theta^2 - 16 \sin^2 \left(\frac{\theta}{4} \right) > 0.$$

Таким образом, при $\varphi \in [0, t_f)$ неравенство $D_{1,6}(s_6) > 0$ выполнено для всех $s_6 \in [s_6^b, s_6^e] = [-\theta, \theta]$. Это означает, что $A_6 \subset \text{int}C_{A_1}$. Как следствие, получаем, что дуги A_1 и A_6 не имеют общих точек.

2) Опишем стыковку кривых A_2 и A_3 с кривой A_1 .

Радиус кривизны эвольвенты в текущей точке есть расстояние от неё по производящей прямой до точки касания прямой с основной окружностью [45, стр. 252].

Для эвольвенты A_3 при текущем значении параметра s_3 точка касания производящей прямой с основной окружностью есть вектор, представляющий собой второе слагаемое в правой части формулы (13). Радиус кривизны кривой A_3 в текущей точке есть модуль первого слагаемого в (13), то есть, $2(\theta - s_3)$. Для начальной точки кривой A_3 (при $s_3 = 0$) точка касания производящей прямой с основной окружностью совпадает с началом координат плоскости X, Y , а радиус кривизны равен 2θ . Окружность, на которой лежит дуга A_1 , имеет такой же центр и такой же радиус. Следовательно, кривые A_1 и A_3 гладко стыкуются с совпадением кривизны. Поскольку на эвольвенте A_3 радиус кривизны монотонно уменьшается с ростом s_3 , то вся кривая A_3 , за исключением начальной точки, принадлежит $\text{int}C_{A_1}$ [47, теорема 2]. Отсюда следует, что кривые A_1 и A_3 имеют лишь одну общую точку (точку стыковки $\mathcal{P}_{1,3}$).

Аналогично, в силу симметрии, кривая A_2 , за исключением точки $\mathcal{P}_{1,2}$ (точка стыковки с кривой A_1), принадлежит $\text{int}C_{A_1}$.

3) Для оценки взаимного расположения кривых A_2 и A_6 рассмотрим функцию $s_2 \rightarrow (R_{6,2}(s_2))^2$. Исходя из (12) и (14), имеем

$$(R_{6,2}(s_2))^2 = 4 \left((\theta + s_2)^2 + \left(2 \sin\left(\frac{s_2}{2}\right)\right)^2 + \left(2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 - 4(\theta + s_2) \sin\left(\frac{s_2}{2}\right) \cos\left(\frac{s_2}{2}\right) + 4(\theta + s_2) \cos\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 8 \sin\left(\frac{s_2}{2}\right) \cos\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right).$$

Подставив $s_2 = s_2^b = -\theta$, получим

$$(R_{6,2}(-\theta))^2 = 4 \left(2 \sin\left(\frac{\varphi + \theta}{2}\right) \right)^2 = (R_{A_6})^2.$$

Выразим производную функции $(R_{6,2}(s_2))^2$ по параметру s_2 :

$$\left((R_{6,2}(s_2))^2 \right)'_{s_2} = 8(\theta + s_2) \left(1 - \cos(s_2) - 2 \sin\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right).$$

После тригонометрических преобразований имеем

$$\left((R_{6,2}(s_2))^2 \right)'_{s_2} = 8(\theta + s_2) (1 - \cos(s_2 - \varphi)) \geq 0.$$

Полученное неравенство обращается в равенство лишь в конечном числе значений параметра s_2 . Стало быть, функция $(R_{6,2}(s_2))^2$ является строго монотонно возрастающей по параметру s_2 . Поэтому при $\varphi < t_f$ для всех $s_2 \in (s_2^b, s_2^e]$ справедливо неравенство $R_{6,2}(s_2) > R_{A_6}$. Аналогичное неравенство $R_{6,3}(s_3) > R_{A_6}$ выполнено и для точек кривой A_3 .

4) Пусть $0 \leq \varphi < 2\pi$. Покажем, что кривая A_1 лежит вне внутренности круга, центр которого находится в точке H и радиус равен расстоянию от точки H до точек $\mathcal{P}_{1,3}$ и $\mathcal{P}_{1,2}$.

Квадрат расстояния от точки H до точки стыковки кривых $A1$ и $A3$ можно вычислить по формуле

$$(R_{6,3}(s_3 = 0))^2 = 4 \left(\theta^2 + \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 + 2\theta \sin \varphi \right).$$

Квадрат расстояния от точки H до точек кривой $A1$ находим по формуле

$$\begin{aligned} (R_{6,1}(s_1))^2 &= \left(X_{U1}(s_1) + 4 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right)^2 + (Y_{U1}(s_1))^2 \\ &= \left(2\theta \cos \frac{s_1}{2} \right)^2 + 16\theta \cos \frac{s_1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \left(4 \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 + \left(2\theta \sin \frac{s_1}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим разность

$$(R_{6,1}(s_1))^2 - (R_{6,3}(0))^2 = 16\theta \cos \frac{s_1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - 8\theta \sin \varphi = 16\theta \sin \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{s_1}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \right).$$

Учитывая неравенства $-\pi < -\varphi/2 \leq s_1/2 \leq \varphi/2 < \pi$ и свойства косинуса, получаем, что последний сомножитель записанной разности, как и сама разность, не может быть меньше нуля.

Стало быть, минимум расстояния от точки H до точек кривой $A1$ реализуется в точках $\mathcal{P}_{1,3}$ и $\mathcal{P}_{1,2}$, то есть, $R_{6,1}(-\varphi) = R_{6,1}(\varphi) \leq R_{6,1}(s_1)$ для любых $s_1 \in [-\varphi, \varphi]$.

5) Докажем, что кривые $A2$ и $A3$ могут пересекаться лишь в точках на оси X .

Предположим противное, то есть, вне оси X нашлась точка пересечения кривых $A2$, $A3$, и она соответствует некоторым параметрам \tilde{s}_2 и \tilde{s}_3 . Кривые $A2$ и $A3$ симметричны относительно оси X . Поэтому на кривой $A3$ есть точка, соответствующая некоторому параметру \hat{s}_3 , для которой $X_{U3}(\hat{s}_3) = X_{U2}(\tilde{s}_2)$, $Y_{U3}(\hat{s}_3) = -Y_{U2}(\tilde{s}_2)$. Поскольку $Y_{U3}(\hat{s}_3) = -Y_{U3}(\tilde{s}_3) \neq 0$, то $\hat{s}_3 \neq \tilde{s}_3$. Таким образом, на кривой $A3$ получили две разные точки, симметричные относительно оси X . Стало быть, они одинаково удалены от любой точки на оси X , в частности, от точки H . Выше была установлена строгая монотонность изменения расстояния от точки H до точек кривой $A3$. Поэтому точки кривой $A3$, задаваемые параметрами \tilde{s}_3 и \hat{s}_3 , имеют разное расстояние до точки H . Пришли к противоречию.

3.7 Перечень свойств кривых $A1$, $A2$, $A3$, $A6$

Подытожим свойства кривых $A1$, $A2$, $A3$, $A6$ на плоскости X, Y при $0 \leq \varphi < t_f$.

1. Каждая из кривых $A1$ и $A6$ симметрична относительно оси X и представляет собой дугу окружности, центр которой лежит на оси X . Раствор дуги может быть больше 2π . Кривая $A1$ вырождается в точку только при $\varphi = 0$. Кривая $A6$ вырождается в точку только когда $(t_f + \varphi)$ кратно 4π .

2. Каждая из кривых $A2$ и $A3$ представляет собой начальный участок эвольвенты круга, следовательно, не имеет самопересечений.

3. Кривые $A2$ и $A3$ взаимно симметричны относительно оси X и могут пересекаться лишь в точках на этой оси.

4. Все внутренние точки кривой $A2$ (соответственно $A3$) порождаются управлениями типа $U2$ ($U3$) с тремя невырожденными участками постоянства.

5. Расстояние $R_{6,2}(s_2)$ от центра H круга C_{A6} до точки на кривой $A2$, определяемой параметром s_2 , монотонно возрастает с ростом s_2 .

6. Расстояние $R_{6,3}(s_3)$ от центра H круга C_{A_6} до точки на кривой A_3 , определяемой параметром s_3 , монотонно убывает с ростом s_3 .
7. Кривые A_2 и A_3 гладко сопрягаются с кривой A_1 . Радиусы кривизны в точках стыковки одинаковы.
8. Кривые A_2 , A_3 , за исключением точек стыковки с кривой A_1 , а также кривая A_6 целиком лежат во внутренности круга C_{A_1} .
9. Кривые A_2 , A_3 , за исключением точек стыковки с кривой A_6 , лежат вне круга C_{A_6} .
10. При $\varphi \in [0, 2\pi)$ расстояние от центра H круга C_{A_6} до кривой A_1 реализуется в её крайних точках.
11. Склейка кривых A_1 , A_2 , A_3 , A_6 образует кусочно-гладкую замкнутую кривую, которая симметрична относительно оси X .

4 Вспомогательные утверждения об экстремальных движениях, ведущих во внутренность множества достижимости $G(t_f)$

В статье [40] присутствовали утверждения, характеризующие экстремальные движения, ведущие во внутренность множества достижимости $G(t_f)$. В данной работе потребуются дополнительные утверждения на эту тему. При рассмотрении их будем использовать следующее важное свойство [40, 43]. Пусть некоторое управление $u^*(\cdot)$ и соответствующее движение $z^*(\cdot)$ системы (1) удовлетворяют ПМП. Тогда, если управление $u^*(\cdot)$ имеет более двух моментов переключения, то геометрические положения $(x^*(t), y^*(t))^T$ в эти моменты лежат на одной прямой, которую называют прямой переключения. Кроме того, если управление $u^*(\cdot)$ имеет промежуток с $u^*(t) \equiv 0$, то соответствующий участок прямолинейного движения на плоскости x, y лежит на прямой переключения.

Докажем два утверждения об экстремальных движениях с циклами. Под циклом понимаем участок движения с постоянным управлением $u = \pm 1$ и протяжённостью больше или равной 2π .

Лемма 4.1. Пусть движение $z(\cdot)$ системы (1) с $\varphi(t_f) \geq 0$ порождается управлением типа $U2$ или $U3$ с тремя невырожденными участками постоянства управления. Если хотя бы один из двух крайних участков имеет длительность не меньше 2π , то $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$.

Доказательство. Из предположения о двух крайних интервалах постоянства управления вытекает наличие “цикла”, по крайней мере, на одном из них.

Рассмотрим управление $u(\cdot)$ типа $U3$: $u(t) = 1$ на интервале $t \in [0, t_1)$, $u(t) = 0$ при $t \in [t_1, t_2)$ и $u(t) = -1$ на интервале $t \in [t_2, t_f)$. Поскольку $\varphi(t_f) \geq 0$, то наличие цикла на третьем интервале влечёт за собой наличие цикла и на первом интервале. Поэтому достаточно рассмотреть лишь случай наличия цикла на первом интервале (рис. 7а), то есть $t_1 \geq 2\pi$. Выберем момент времени $\hat{t} \in (t_2, t_f)$ так, чтобы $\hat{t} - t_2 < 2\pi$.

Построим дополнительное движение $\tilde{z}(\cdot)$ с управлением

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_0, t_1 - 2\pi), \\ 0, & t \in [t_1 - 2\pi, t_2 - 2\pi), \\ -1, & t \in [t_2 - 2\pi, \hat{t} - 2\pi), \\ 1, & t \in [\hat{t} - 2\pi, \hat{t}), \\ -1, & t \in [\hat{t}, t_f]. \end{cases}$$

Такое движение приходит в момент t_f в ту же точку с тем же значением φ , что и исходное движение (рис. 7а). При этом дополнительное движение в момент переключения \hat{t} не лежит на прямой переключения (по которой идёт движение при $u = 0$). Стало быть, не выполнен ПМП. Поэтому $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$.

Для кривой А2 утверждение справедливо в силу симметрии кривых А2 и А3. \square

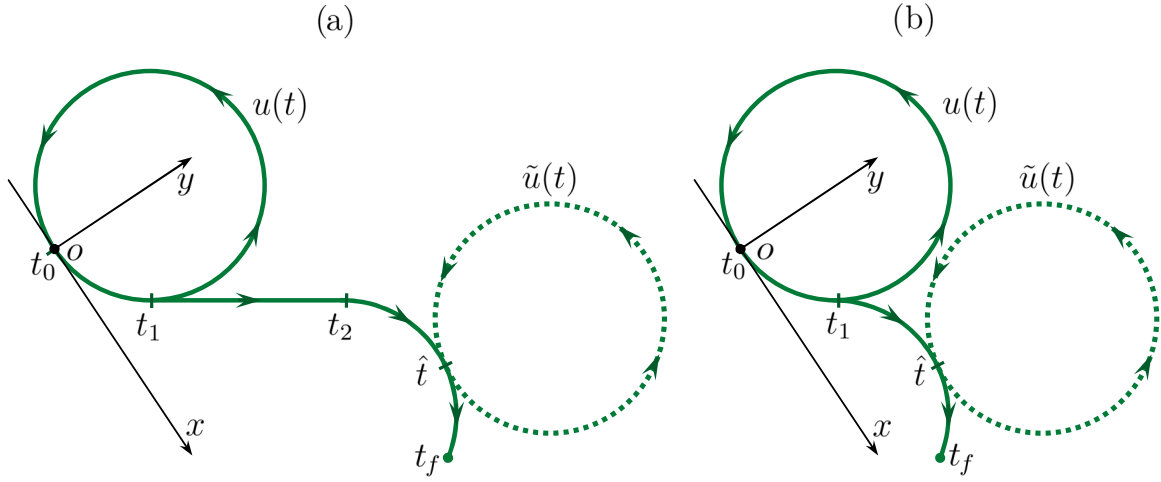


Рис. 7: Пояснение к доказательству Лемм 4.1 и 4.2

Лемма 4.2. Пусть движение $z(\cdot)$ системы (1) порождается управлением типа U6. При этом некоторые два соседних участка постоянства управления являются невырожденными. Если хотя бы один из них имеет длительность больше 2π , то $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$.

Доказательство. По предположению, имеем циклическое движение длительностью больше 2π на одном из двух невырожденных соседних участках (с постоянным управлением) исходного движения $z(\cdot)$. Переносим цикл длительностью 2π с этого участка в любую внутреннюю точку невырожденного соседнего участка. Получаем дополнительное движение $\tilde{z}(\cdot)$, идущее в ту же фазовую точку в момент t_f , что и исходное движение $z(\cdot)$. Дополнительное движение имеет не менее 4-х последовательных невырожденных участков постоянства управления со значениями ± 1 , то есть, не менее трёх моментов переключения. В силу Леммы 3 из [40] дополнительное движение ведёт в точку $\tilde{z}(t_f) \in \text{int}G(t_f)$. Поэтому $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$.

Доказательство поясняется на рис. 7б. Здесь на исходном движении невырожденными являются первый и второй участки. Цикл расположен на первом участке. Этот цикл переносится на второй участок в точку $(x(\hat{t}), y(\hat{t}))^T$ исходного движения. Получаем дополнительное движение с тремя моментами переключения. \square

Доказательство следующего утверждения является наиболее длинным.

Лемма 4.3. Пусть движение $z(\cdot)$ порождается управлением типа $U3$ и ведёт в точку $z(t_f) = (x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f))^T$, для которой $\varphi(t_f) \geq 0$. Предположим, что для точки $(x(t_f), y(t_f))^T$ после перевода её во вспомогательную систему X, Y выполнено неравенство $Y(t_f) < 0$. Кроме того, считаем, что все три участка постоянства управления являются невырожденными, а длительность как первого, так и третьего участков меньше 2π . Тогда $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$.

Доказательство. Геометрическое положение движения в момент t_f обозначим символом E . Метод доказательства будет такой. Наряду с исходным движением, ведущим в точку E с заданным значением φ в момент t_f , построим дополнительное движение, ведущее из той же начальной точки в точку E при тех же значениях φ и t_f . Дополнительное движение будет построено так, что для него не будет выполнен ПМП. Следовательно, $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$.

1) По предположению, управление типа $U3$ имеет три невырожденных участка со значениями $1, 0, -1$. Точки геометрического положения в моменты переключения t_1 и t_2 обозначим B и D (рис. 8–10). Окружность, по которой движение идёт на промежутке $[0, t_1]$, будем называть первой (отмечена символом $C1$), а окружность с движением на промежутке $[t_2, t_f]$ – второй (отмечена символом $C2$). Исходная система координат обозначена через x, y , вспомогательная – через X, Y . Точка O – начало координат вспомогательной системы. Ось X вспомогательной системы проходит через начальную точку движения и составляет угол $\varphi/2$ с направлением оси x . Угол отсчитывается от оси x против часовой стрелки. Точка E по предположению расположена ниже оси X . Вектор направления движения в точках O и E составляет угол $\varphi/2$ с осью X (отсчитывается от оси X против часовой стрелки).

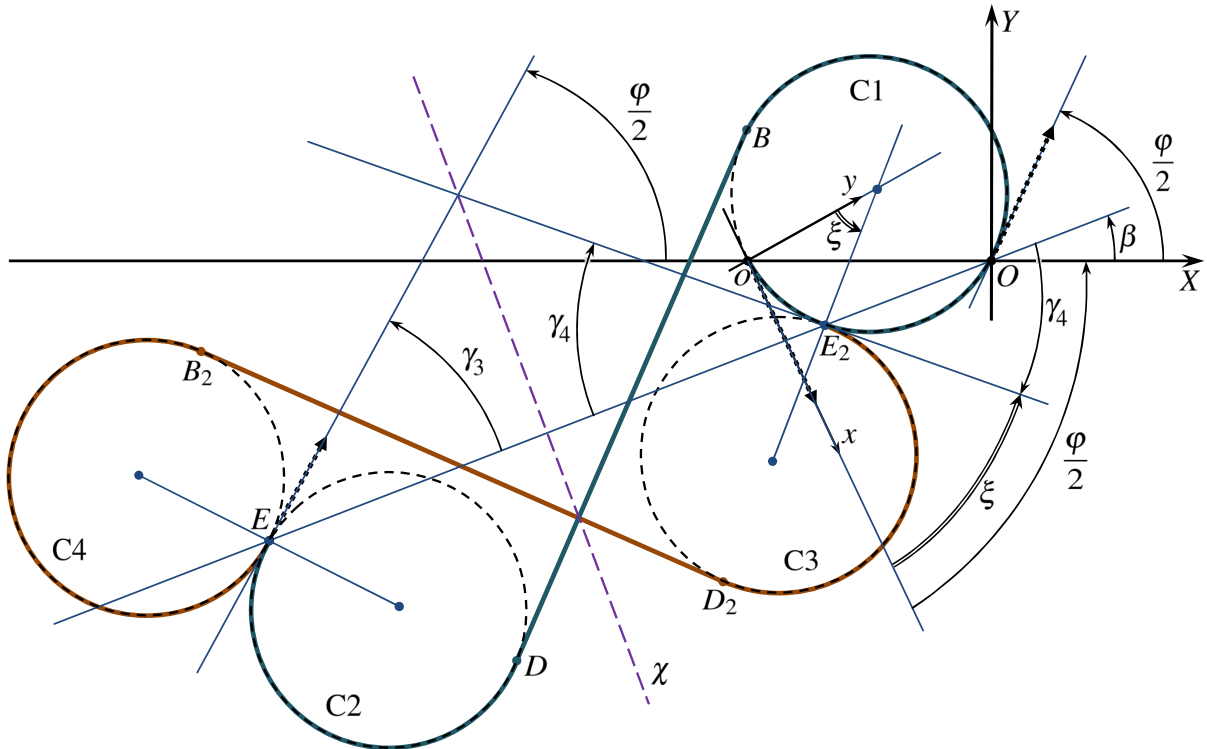


Рис. 8: Дополнительное движение при условии $\beta < \varphi/2$

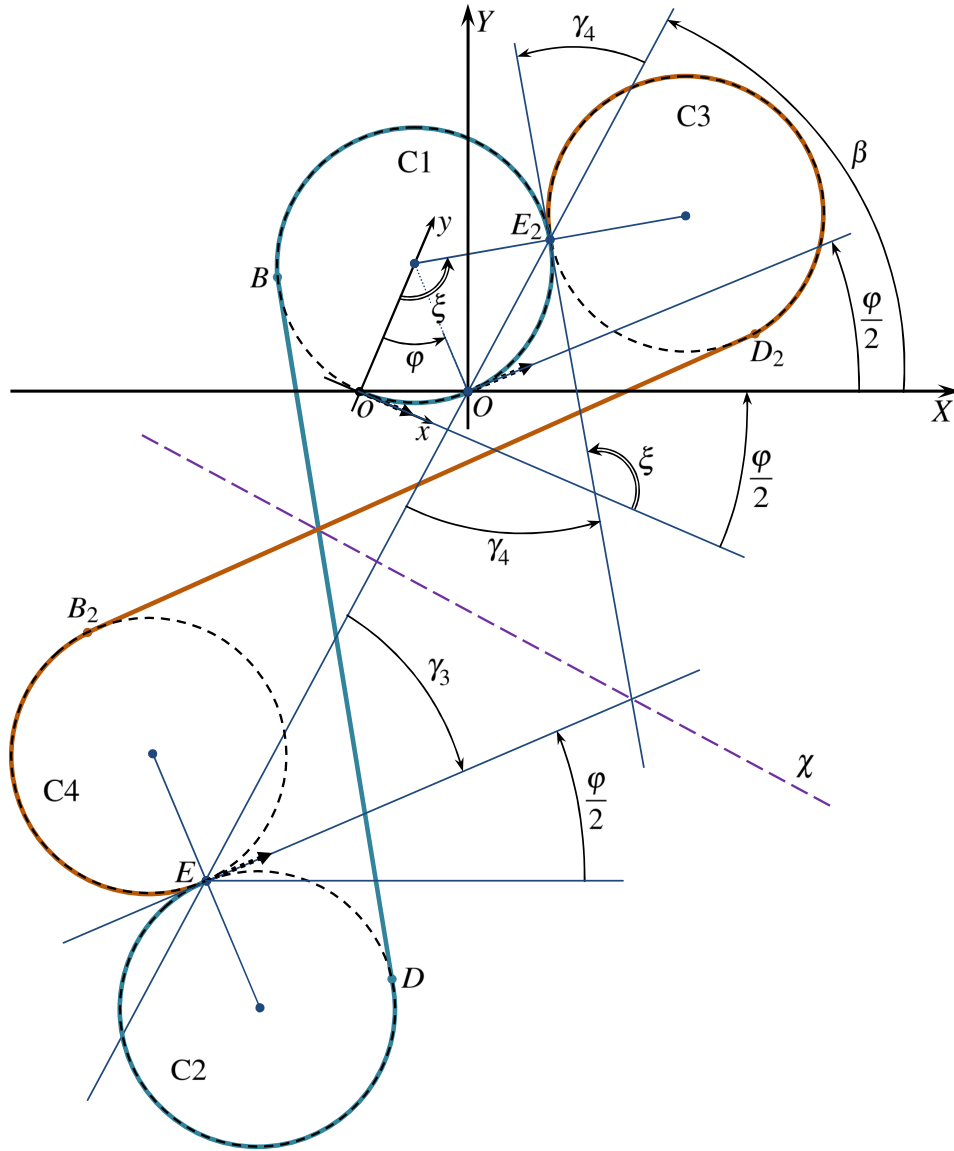


Рис. 9: Дополнительное движение при условии $\beta > \varphi/2$

2) Поскольку $\varphi \geq 0$ и исходное движение есть движение типа $U3$, то $t_1 \geq \varphi$. Для момента $t = \varphi$ соответствующее геометрическое положение в координатах x, y описывается соотношением $(x(t), y(t))^T = (\sin \varphi, 1 - \cos \varphi)^T$. Из формулы (10) видно, что такая точка совпадает с точкой O .

Рассмотрим прямую EO с направлением от E к O . Пусть β – угол, составляемый этой прямой с осью X . Угол отсчитываем против часовой стрелки от оси X . Поскольку точка E лежит ниже оси X , то $\beta \in (0, \pi)$. Помимо точки O прямая EO , вообще говоря, имеет вторую точку пересечения с первой окружностью. Обозначим такую точку символом E_2 . При $\beta = \varphi/2$ прямая EO касается первой окружности. В этой ситуации мы полагаем $E_2 = O$.

Обозначим символом ξ центральный угол первой окружности, опирающийся на дугу oE_2 , соответствующую повороту от точки o до точки E_2 . Покажем, что $\xi = 2\beta$. Если $\beta = \varphi/2$, то равенство $\xi = 2\beta$ выполнено по построению. Теперь рассмотрим два варианта: $\beta < \varphi/2$ (рис. 8) и $\beta > \varphi/2$ (рис. 9). В первом из них равенство $\xi = 2\beta$ следует из того, что вписанный в первую окружность угол с вершиной в точке O и опирающийся на дугу oE_2 , равен β . Во втором варианте рассмотрим центральный

участок исходного движения является невырожденным. Через середину отрезка $[E, E_2]$ проведём перпендикуляр и обозначим его буквой χ . Введём угол γ_3 между направлением скорости движения в точке E и прямой EO . Угол γ_3 отсчитывается от прямой EO с положительным направлением отсчёта против часовой стрелке. Аналогично рассмотрим угол γ_4 между направлением скорости движения в точке E_2 и прямой EO . Угол γ_4 также отсчитывается от прямой EO , но с положительным направлением отсчёта по часовой стрелке. На рис. 8 значения γ_3 и γ_4 положительные, а на рис. 9 отрицательные.

Покажем, что $\gamma_3 = \gamma_4$. По построению имеем $\gamma_3 = \varphi/2 - \beta$, $\gamma_4 = \varphi/2 - \xi + \beta$. Учитывая, что $\xi = 2\beta$, получаем $\gamma_4 = \varphi/2 - \beta = \gamma_3$.

Из равенства $\gamma_3 = \gamma_4$ следует зеркальная симметрия расположения окружностей $C1$ и $C4$, а также окружностей $C3$ и $C2$ относительно прямой ξ . При такой симметрии внутренняя касательная BD к окружностям $C1, C2$ переходит в касательную B_2D_2 к окружностям $C4, C3$ (рис. 8, 9).

5) Введём дополнительное движение. Оно начинается в той же точке o и с тем же направлением $\varphi(t_0) = 0$, что и исходное движение. На начальном интервале длиной 2β дополнительное движение так же, как и исходное, идёт с управлением $u = 1$ до точки E_2 . Момент попадания в точку E_2 обозначим t_1^* . Имеем $t_1^* = 2\beta$. После этого момента траектория дополнительного движения зеркально симметрична исходной траектории (рис. 8, 9) относительно прямой χ . А именно, на участке времени от t_1^* до $t_2^* = 2\beta + t_f - t_2$ дополнительное движение идёт с управлением $u = -1$ по окружности $C3$ по часовой стрелке от точки E_2 до точки D_2 . На промежутке от t_2^* до $t_3^* = 2\beta + t_f - t_1$ движение идёт с нулевым управлением по отрезку прямой длиной $t_3^* - t_2^* = t_2 - t_1$ от точки D_2 до точки B_2 . Заключительный этап движения от момента t_3^* до момента t_f происходит с управлением $u = 1$ по окружности $C4$ против часовой стрелки от точки B_2 до точки E . Построенная кривая ведёт в ту же точку E и с тем же направлением φ , что и исходная. Её длина совпадает с длиной исходной кривой.

По предположению, на исходном движении есть три невырожденных промежутка постоянства управления и отсутствуют циклы на первом и третьем участках. Учитывая неравенство $t_1 > 2\beta > 0$, получаем, что на дополнительном движении имеются три момента переключения, удовлетворяющие неравенствам $0 < t_1^* < t_2^* < t_3^* < t_f$. При этом на втором участке постоянства управления (движение от точки E_2 до точки D_2) нет циклов. Отсюда следует, что точки геометрического положения в моменты переключения дополнительного движения не лежат на одной прямой. Последнее противоречит ПМП. Поэтому $z(t_f) \in \text{int}G(t_f)$. \square

Замечание 1. Рис. 8–10, поясняющие доказательство Леммы 4.3, сделаны для $0 < \varphi < \pi$. Если $\varphi = 0$, то рассматриваем только вариант $\beta > \varphi/2 = 0$. Сохраняются все элементы доказательства, опирающиеся на рис. 9. Если $\pi \leq \varphi < 2\pi$, то имеем дело только с вариантом $\beta < \varphi/2$. Это вытекает из того, что выполнено неравенство $\beta < \pi/2$. Действительно, при $\beta \geq \pi/2$ длительность первого интервала постоянства управления превышает 2π . Это противоречит предположению об отсутствии циклов на исходном движении. При анализе варианта $\beta < \varphi/2$ сохраняются все элементы доказательства, которые были сделаны со ссылкой на рис. 8.

5 Утверждения о структуре φ -сечений

Доказательство формулируемых ниже Лемм 5.1 и 5.2 базируется на теореме Жордана [48, 49], характеризующей разбиение плоскости непрерывной замкнутой кривой S без самопересечений. По теореме Жордана множество $\mathbb{R}^2 \setminus S$ состоит из двух открытых, связных и непересекающихся компонент S^+ (внешняя неограниченная) и S^- (внутренняя ограниченная). Кривая S является границей каждой из этих компонент.

Леммы 5.1 и 5.2 используются в дальнейшем для построения границы φ -сечений. Также в последующих разделах будет использована Лемма 5.3.

Лемма 5.1. Зафиксируем некоторые значения $t_f > 0$ и $\varphi \in [0, t_f)$. Пусть S – непрерывная замкнутая кривая без самопересечений на плоскости x, y , в любую точку которой ведёт в момент t_f с заданным значением φ хотя бы одно из управлений типа $U1, U2, U3, U6$. Предположим, что множество S^+ не содержит точек, образованных управлениями типа $U1, U2, U3, U6$ для оговоренных значений t_f и φ . Тогда $S \subset \partial G_\varphi(t_f)$ и

$$G_\varphi(t_f) \cap S^+ = \emptyset. \quad (23)$$

Доказательство. Покажем выполнение соотношения (23). От противного, пусть в множестве S^+ есть некоторая точка $P \in G_\varphi(t_f)$. Множество достижимости $G(t_f)$ системы (1), а, стало быть, и его сечение $G_\varphi(t_f)$ ограничены. Выберем в неограниченном множестве S^+ некоторую точку $Q \notin G_\varphi(t_f)$. Соединим точки P и Q непрерывной кривой γ , целиком лежащей в S^+ . Это возможно за счёт связности множества S^+ . В силу непрерывности на кривой γ найдётся точка $E \in \partial G_\varphi(t_f)$. В соответствии с Леммой 3.1 в точку E ведёт хотя бы одно из управлений типа $U1, U2, U3, U6$. Но это невозможно по предположению доказываемой леммы. Стало быть, $E \notin \partial G_\varphi(t_f)$. Пришли к противоречию, то есть исходное предположение о том, что $P \in G_\varphi(t_f)$, неверно. Таким образом, соотношение (23) установлено.

Имеем $S = \partial S^+$, и (по условию леммы) в любую точку кривой S ведёт некоторое допустимое управление. С учётом (23) получаем, что $S \subset \partial G_\varphi(t_f)$. \square

Лемма 5.2. Зафиксируем некоторые значения $t_f > 0$ и $\varphi \in [0, t_f)$. Пусть S – непрерывная замкнутая кривая без самопересечений на плоскости x, y , в любую точку которой ведёт в момент t_f с заданным значением φ хотя бы одно из управлений типа $U1, U2, U3, U6$. Предположим, что множество S^- не содержит точек, порождённых управлениями типа $U1, U2, U3, U6$ для оговоренных значений t_f и φ . Предположим также, что в множестве S^- есть хотя бы одна точка F , которая не принадлежит множеству $G_\varphi(t_f)$. Тогда $S \subset \partial G_\varphi(t_f)$ и $G_\varphi(t_f) \cap S^- = \emptyset$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы с заменой множества S^+ на множество S^- и точки Q на точку F .

Лемма 5.3. Зафиксируем некоторые значения $t_f > 0$ и $\varphi \in [0, t_f)$. Пусть дано открытое связное множество M на плоскости геометрических координат x, y . Предположим, что выполнено одно из условий: 1) в множестве M отсутствуют точки кривых $A1, A2, A3, A6$, но есть хотя бы одна точка $P \in \text{int}G_\varphi(t_f)$; 2) в множестве M есть точки некоторых кривых $A1, A2, A3, A6$, и для всех таких точек, за исключением разве лишь одной, известно, что они принадлежат множеству $\text{int}G_\varphi(t_f)$. Тогда $M \subset \text{int}G_\varphi(t_f)$.

Доказательство. Пусть выполнено условие 1). Предположим, что в M есть хотя бы одна точка $K \in \partial G_\varphi(t_f)$. С учётом Леммы 3.1 в эту точку ведёт хотя бы одно из управлений типа $U1, U2, U3, U6$. Но тогда точка K лежит на одной из кривых $A1, A2, A3, A6$, что противоречит условию 1). Следовательно, $M \cap \partial G_\varphi(t_f) = \emptyset$.

Предположим, что в множестве M есть некоторая точка $L \notin G_\varphi(t_f)$. Соединим точки L и P непрерывной кривой, принадлежащей M . Тогда на этой кривой будет хотя бы одна точка из $\partial G_\varphi(t_f)$, что невозможно.

Таким образом, $M \subset \text{int}G_\varphi(t_f)$.

Пусть выполнено условие 2). Обозначим символом E особую точку, о которой говорится в этом условии. Рассмотрим множество $V = M \setminus \{E\}$. Если точка E отсутствует, считаем $V = M$. Множество V является открытым и связным. Повторяя использованную в первом абзаце доказательства схему рассуждений с учётом специфики условия 2), устанавливаем, что $V \cap \partial G_\varphi(t_f) = \emptyset$.

Из условия 2) с учётом непрерывности кривых $A1, A2, A3, A6$ следует существование в множестве V некоторой точки $F \in \text{int}G_\varphi(t_f)$. Предположим, что в множестве V есть точка $L \notin G_\varphi(t_f)$. Соединяем точки L и F непрерывной кривой, лежащей в V . Тогда на данной кривой найдётся точка из $\partial G_\varphi(t_f)$, что невозможно. Стало быть, $V \subset \text{int}G_\varphi(t_f)$.

Поскольку открытые, связные множества V и M различаются разве лишь одной точкой E , то $M \subset \text{int}G_\varphi(t_f)$. \square

6 Классификация φ -сечений при $\varphi \geq 0$

Форма φ -сечений определяется значениями φ и t_f . Будем предполагать, что $t_f > 0$ и $\varphi \in [0, t_f]$. Выделим в пространстве значений (φ, t_f) пять множеств. Соответственно, рассмотрим пять случаев

$$\text{Case 1: } 0 \leq \varphi < t_f, \quad t_f < 4\pi - \varphi, \quad t_f < 3\pi + 2 \cos(\varphi/2). \quad (24)$$

$$\text{Case 2: } 0 \leq \varphi < \pi, \quad t_f < 4\pi - \varphi, \quad t_f \geq 3\pi + 2 \cos(\varphi/2). \quad (25)$$

$$\text{Case 3: } 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t_f \geq 4\pi - \varphi. \quad (26)$$

$$\text{Case 4: } 2\pi \leq \varphi < t_f. \quad (27)$$

$$\text{Case 5: } \varphi = t_f. \quad (28)$$

Установим, что любая точка (φ, t_f) , удовлетворяющая условиям $t_f > 0$ и $0 \leq \varphi \leq t_f$, попадает в одно и только в одно из указанных множеств.

Если $\varphi = t_f$, то точка (φ, t_f) принадлежит множеству 5 (случай 5). При этом очевидно, что точка (φ, t_f) не попадает в множества 1 и 4. Из первого и третьего условий (25) в случае 2 следует, что $t_f > 3\pi$; в то же время $\varphi < \pi$. В случае 3 имеем $t_f > 2\pi$. Таким образом, рассматриваемая точка не попадает в множества 1–4.

Из первых двух неравенств в (24) следует, что в случае 1 выполнено неравенство $\varphi < 2\pi$. Поэтому при условии (27) точка (φ, t_f) попадает только в множество 4.

Если $0 \leq \varphi < \pi$, то справедливо неравенство

$$4\pi - \varphi > 3\pi + 2 \cos(\varphi/2). \quad (29)$$

Действительно, условие $0 \leq \varphi < \pi$ перепишем в виде $0 < (\pi - \varphi)/2 \leq \pi/2$. Стало быть, выполнено неравенство $(\pi - \varphi)/2 > \sin((\pi - \varphi)/2)$, которое эквивалентно (29).

Неравенство (29) означает, что при $0 \leq \varphi < \pi$ в (24) из третьего условия следует второе условие. Аналогично, при $\varphi \in [\pi, 2\pi)$ имеем

$$4\pi - \varphi \leq 3\pi + 2 \cos(\varphi/2), \quad (30)$$

то есть в (24) из второго условия следует третье.

Пусть $0 \leq \varphi < \pi$ и $\varphi < t_f$. Опираясь на неравенство (29), устанавливаем, что точка (φ, t_f) попадает при $t_f \in (\varphi, 3\pi + 2 \cos(\varphi/2))$ только в множество 1, соответственно, при $t_f \in [3\pi + 2 \cos(\varphi/2), 4\pi - \varphi)$ только в множество 2 и только в множество 3 при $t_f \in [4\pi - \varphi, \infty)$. Пусть $\varphi \in [\pi, 2\pi)$ и $\varphi < t_f$. Используя неравенство (30), получаем, что точка (φ, t_f) принадлежит только множеству 1 при $t_f < 4\pi - \varphi$ и только множеству 3 при $t_f \geq 4\pi - \varphi$.

Таким образом, свойство разбиения сектора $\{(\varphi, t_f) : 0 \leq \varphi \leq t_f, t_f > 0\}$ на множества 1–5 установлено.

Множества 1–5 показаны на рис. 11. При $0 \leq \varphi < \pi$ множество 1 отделяется от множества 2 линией $t_f = 3\pi + 2 \cos(\varphi/2)$ (линия включается в множество 2), а множество 2 отделяется от множества 3 участком прямой $t_f = 4\pi - \varphi$ (входит в множество 3). При $\pi \leq \varphi < 2\pi$ множество 1 отделяется от множества 3 участком прямой $t_f = 4\pi - \varphi$. Этот участок включаем в множество 3. Множество 3 отделяется от множества 4 неограниченным лучом $\varphi = 2\pi, t_f > \varphi$. Этот луч включается в множество 4. Множество 5 представляет собой неограниченный луч $0 < \varphi = t_f$.

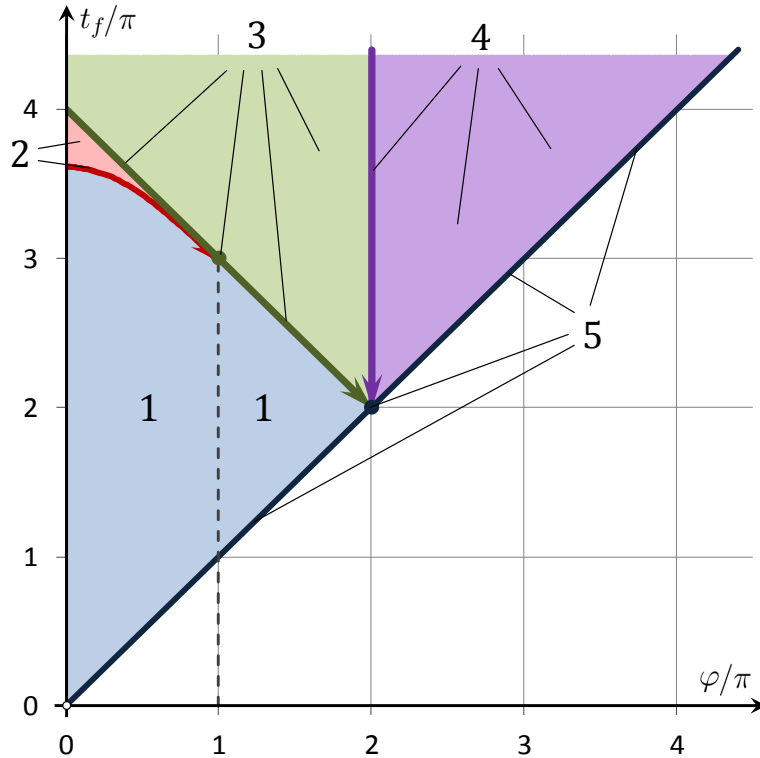


Рис. 11: Классификация φ -сечений множества достижимости $G(t_f)$ для значений $t_f > 0$ и $0 \leq \varphi \leq t_f$

В случае 5, как было отмечено в подразд. 3.1, любое φ -сечение является одноточечным множеством. Геометрические координаты в исходной системе представляются формулами $x(t_f) = \sin t_f$, $y(t_f) = 1 - \cos t_f$. Положение такой точки во вспомогательной системе координат имеет вид $X(t_f) = 0$, $Y(t_f) = 0$.

В следующих разделах опишем φ -сечения для случаев 1–4.

7 Граница φ -сечений для случая 1

Считаем, что (φ, t_f) принадлежит множеству 1. В качестве базовых элементов границы φ -сечений используются кривые А1, А2, А3, А6. Каждая из них целиком входит в описание границы. Данный случай частично рассмотрен в работе [44], где предполагалось, что $t_f \leq 2\pi$.

Из первых двух соотношений в (24) следует, что $0 \leq \varphi < 2\pi$ и $0 < \theta < 2\pi$, где $\theta = (t_f - \varphi)/2$. Учитывая формулы (11), (14) для кривых А1 и А6 (дуги окружностей), а также соответствующие диапазоны изменения параметров s_1 и s_3 в (5), делаем вывод, что в случае 1 раствор каждой из дуг А1, А6 меньше 2π .

Если $\varphi = 0$, то дуга А1 вырождается в точку, совпадающую с начальной точкой кривой А3 и конечной точкой кривой А2. Если $\varphi > 0$, дуга А1 не является вырожденной. Её начальная точка лежит ниже оси X , а конечная точка — выше оси X .

1) Покажем, что кривые А2 и А3 в случае 1 имеют общую точку лишь при $\varphi = 0$. При этом общая точка одна и является точкой их взаимной стыковки. Она совпадает с точкой вырождения дуги А1.

Исследуем кривую А3. Для крайних значений $s_3 = 0$ и $s_3 = \theta$ имеем

$$Y_{U_3}(0) = (t_f - \varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \geq 0, \quad Y_{U_3}(\theta) = 4 \sin\left(\frac{t_f - \varphi}{4}\right) \sin\left(\frac{t_f + \varphi}{4}\right) > 0. \quad (31)$$

Первое неравенство следует из того, что $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\varphi < t_f$. Привлекая условие $t_f < 4\pi - \varphi$, получаем второе неравенство. Первое неравенство обращается в равенство только при $\varphi = 0$.

Установим, что $Y_{U_3}(s_3) > 0$ для любого $s_3 \in (0, \theta)$. Вычислим производную функции $Y_{U_3}(s_3)$ по s_3 :

$$(Y_{U_3}(s_3))'_{s_3} = 2(\theta - s_3) \cos\left(s_3 + \frac{\varphi}{2}\right). \quad (32)$$

При $s_3 \in (0, \theta)$ знак производной определяется последним сомножителем, а величина $s_3 + \varphi/2$ изменяется в диапазоне $(\varphi/2, t_f/2)$. Из первых двух соотношений в (24) следует, что

$$0 \leq \varphi < t_f < 4\pi.$$

Поэтому $(s_3 + \varphi/2) \in (0, 2\pi)$. В рамках такого расширенного диапазона выражение $\cos(s_3 + \varphi/2)$ обращается в нуль только для двух значений параметра s_3 : $s_3^* = (\pi - \varphi)/2$ и $s_{3*} = (3\pi - \varphi)/2$. Данные точки не всегда принадлежат диапазону $(0, \theta)$ допустимых значений s_3 .

На рис. 12 показаны кривые А1, А2, А3, А6 для одного и того же значения $\varphi = 0.5\pi$ и четырёх значений t_f : 0.99π , 2.3π , 2.8π , 3.3π . Если $t_f = 0.99\pi$, то в диапазоне $(0, \theta)$ нет значений s_3^* и s_{3*} (определяющих горизонтальные касательные к кривой А3). Если $t_f = 2.3\pi$ или $t_f = 2.8\pi$, то $s_3^* \in (0, \theta)$, $s_{3*} \notin (0, \theta)$. При $t_f = 3.3\pi$ получаем $s_3^* \in (0, \theta)$, $s_{3*} \in (0, \theta)$ (соответственно, кривая А3 имеет две горизонтальные касательные).

Рассмотрим значение s_3^* . Величина $Y_{U_3}(s_3^*)$ в силу (13) вычисляется по формуле

$$Y_{U_3}(s_3^*) = 2(\theta - s_3^*) \sin\left(s_3^* + \frac{\pi}{2}\right) + 4 \sin\frac{s_3^*}{2} \sin\left(\frac{s_3^*}{2} + \frac{\pi}{2}\right). \quad (33)$$

Условие $s_3^* \in (0, \theta)$ запишем в виде $0 < (\pi - \varphi)/2 < (t_f - \varphi)/2$. Отсюда следует выполнение неравенств $\varphi < \pi < t_f$. С учётом этих неравенств, подставляя

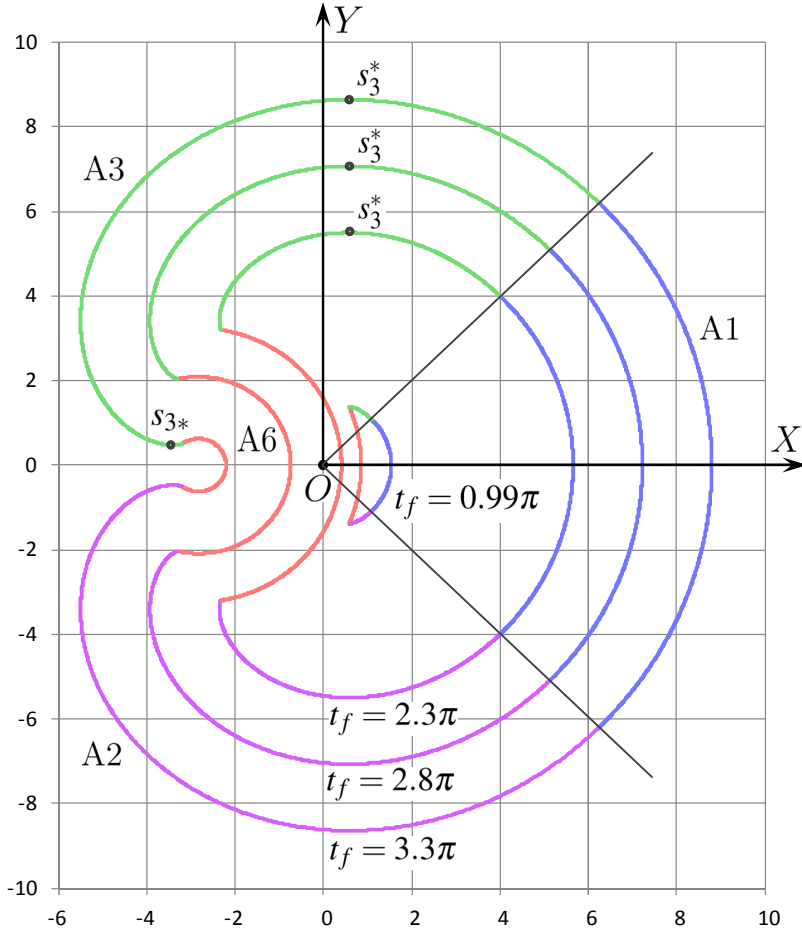


Рис. 12: Склеенные кривые $A_\varphi(t_f)$ для $\varphi = 0.5\pi$ и четырёх значений $t_f = 0.99\pi, 2.3\pi, 2.8\pi, 3.3\pi$. Расположение точек s_3^*, s_{3*} на кривых A3.

значения s_3^* и θ в (33), получаем

$$Y_{U3}(s_3^*) = (t_f - \pi) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4}\right) > 0. \quad (34)$$

Рассмотрим значение s_{3*} . Из условия $s_{3*} \in (0, \theta)$ следует неравенство $t_f > 3\pi$. С учётом второго соотношения в (24) получаем неравенство $\varphi < \pi$. Вычисляем $Y_{U3}(s_{3*})$:

$$Y_{U3}(s_{3*}) = 3\pi - t_f + 4 \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{4}\right) = 3\pi - t_f + 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (35)$$

Привлекая третье соотношение в (24), имеем

$$Y_{U3}(s_{3*}) > 0. \quad (36)$$

Имеем неравенства (31) для значений $Y_{U3}(s_3)$ в крайних точках кривой A3, а также неравенства (34), (36) для внутренних точек, в которых производная $(Y_{U3}(s_3))'_{s_3}$ обращается в нуль. Отсюда делаем вывод, что кривая A3 лежит выше оси X (см. два примера на рис. 13), за исключением начальной точки при $\varphi = 0$.

В силу симметрии кривых A2 и A3 относительно оси X кривая A2 лежит ниже оси X, за исключением конечной точки при $\varphi = 0$. Таким образом, кривые A2 и A3

при $\varphi > 0$ не имеют общих точек, а при $\varphi = 0$ начальная точка кривой A3 совпадает с конечной точкой кривой A2.

2) В целом, с учётом результатов разд. 3 получаем, что склеенная кривая $A_\varphi(t_f) = A1 \cup A3 \cup A6 \cup A2$ является кусочно-гладкой замкнутой кривой без самопересечений. Гладкость нарушается лишь в точках сочленения дуг A2 и A3 с дугой A6 (рис. 12). Склеенная кривая содержит все точки движений $U1, U2, U3, U6$ при заданных t_f и φ .

Пусть символ $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ обозначает замкнутое множество, ограниченное кривой $A_\varphi(t_f)$. В силу Леммы 5.1 данная кривая принадлежит $\partial G_\varphi(t_f)$ и выполнено вложение $G_\varphi(t_f) \subset \mathbf{A}_\varphi(t_f)$.

Для $\varphi \in (0, t_f)$ рассмотрим движение, порождённое на промежутке $[0, t_f]$ постоянным управлением $u(t) \equiv \varphi/t_f$. Такое движение не удовлетворяет ПМП. Поэтому в силу [42] оно ведёт в $\text{int}G(t_f)$, а значит и в $\text{int}G_\varphi(t_f)$. Для $\varphi = 0$ в качестве аналогичного движения, но уже с одним переключением, возьмём движение с управлением $u(t) = -0.5$ при $t \in [0, t_f/2]$ и $u(t) = +0.5$ при $t \in [t_f/2, t_f]$. Оно также ведёт в $\text{int}G_\varphi(t_f)$. Обращаясь к Лемме 5.3, получаем, что для множества $M = \text{int}\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ выполнено условие 1). Стало быть, $\text{int}\mathbf{A}_\varphi(t_f) \subset G_\varphi(t_f)$.

В итоге получаем $\mathbf{A}_\varphi(t_f) = G_\varphi(t_f)$.

Два примера множеств $G_\varphi(t_f)$ для случая 1 показаны на рис. 13. Масштаб изображения определяется радиусом круга C_{A1} .

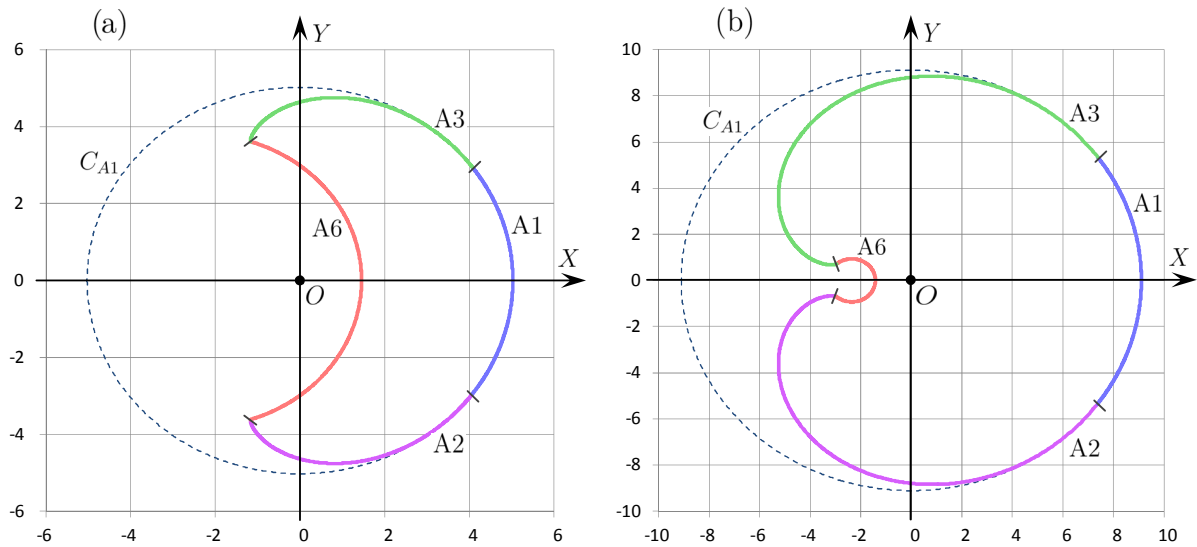


Рис. 13: Варианты множеств $G_\varphi(t_f)$ для случая 1 при $\varphi = 0.4\pi$ и двух значений $t_f = 2\pi$ (a), $t_f = 3.3\pi$ (b)

8 Граница φ -сечений для случая 2

Зафиксируем φ и t_f , удовлетворяющие условиям случая 2. Как и в случае 1, границу φ -сечения будем строить на основе кривых A1, A2, A3, A6. Главная особенность состоит в том, что любое φ -сечение, относящееся к случаю 2, не является односвязным.

8.1 Точки пересечения кривых А2, А3

Каждая из кривых А2, А3 представляет собой дугу эвольвенты. Кривая А1 стыкуется с кривыми А2 и А3 с соблюдением непрерывности кривизны (подразд. 3.7, свойство 7).

Опираясь на (25), докажем, что существуют одна или две точки пересечения кривых А2 и А3.

Рассмотрим кривую А3. Для крайних точек по аналогии со случаем 1, используя соотношения (31), получаем $Y_{U_3}(0) \geq 0$, $Y_{U_3}(\theta) > 0$. Первое неравенство обращается в равенство только при $\varphi = 0$.

При $s_3 \in (0, \theta)$ производная $(Y_{U_3}(s_3))'_{s_3}$, вычисляемая по формуле (32), становится равной нулю для значений $s_3^* = (\pi - \varphi)/2$ и $s_{3*} = (3\pi - \varphi)/2$. В случае 2 (в отличие от случая 1) эти значения всегда принадлежат интервалу $(0, \theta)$ в силу (25). Поэтому соответствующие точки на кривой А3 всегда существуют.

Как отмечено в разд. 7, формула (34), для первой точки имеем $Y_{U_3}(s_3^*) > 0$. Для второй точки в силу (35) и третьего неравенства в (25) получаем соотношение $Y_{U_3}(s_{3*}) = 3\pi - t_f + 2 \cos(\varphi/2) \leq 0$.

Пусть

$$t_f > 3\pi + 2 \cos(\varphi/2). \quad (37)$$

Покажем, что при этом условии кривые А2 и А3 пересекаются в двух точках, расположенных на отрицательной части оси X (рис. 14b). Для этого достаточно рассмотреть точки пересечения кривой А3 с осью X в силу симметрии кривых А2 и А3 относительно этой оси.

Выделим на кривой А3 три участка: $s_3 \in (0, s_3^*)$, $s_3 \in (s_3^*, s_{3*})$, $s_3 \in (s_{3*}, \theta)$. На каждом из них функция $Y(s_3)$ строго монотонна. На первом участке нет пересечения с осью X . На втором – одна точка пересечения, обозначим её P_1 . На третьем тоже одна точка пересечения, обозначим её P_2 . В целом получаем две точки пересечения кривой А3 (без крайних точек) с осью X . Данное свойство справедливо и для кривой А2. При $\varphi = 0$, помимо указанных точек, кривые А2 и А3 стыкуются в точке вырождения кривой А1.

Пусть теперь выполнено равенство

$$t_f = 3\pi + 2 \cos(\varphi/2). \quad (38)$$

Это равенство соответствует ситуации касания кривой А3 с осью X (а, стало быть, и с кривой А2) в точке $(X_{U_3}(s_{3*}), Y_{U_3}(s_{3*}))^T$. При этом, за исключением точки касания, внутренние точки кривой А3 лежат выше оси X , а внутренние точки кривой А2 – ниже (рис. 14a). Таким образом, при условии (38) для $\varphi > 0$ кривые А2 и А3 имеют только одну общую точку $P_1 = P_2$ (это точка касания, определяемая на кривой А3 параметром $s_3 = s_{3*}$). Если $\varphi = 0$, то (так же, как и при условии (37)) кривые А2 и А3 дополнительно стыкуются в точке вырождения кривой А1.

8.2 Анализ дуг кривых А2, А3 между точками их пересечения

Рассмотрим при выполнении условия (37) открытую дугу кривой А3 между точками P_1 и P_2 на плоскости X, Y . Данная дуга расположена ниже оси X . Покажем, что она принадлежит $\text{int}G_\varphi(t_f)$. Воспользуемся Леммой 4.3. Чтобы обеспечить выполнение условий леммы, установим, что для любой точки \mathcal{P} этой дуги соответствующее движение (с управлением типа U_3) не имеет циклов и каждый из трёх интервалов постоянства управления не является вырожденным.

Для управлений типа $U3$ моменты переключения t_1 и t_2 связаны соотношением $\varphi = t_1 - (t_f - t_2)$. Сумма длин первого и третьего интервалов не превышает t_f , поэтому $2t_1 - \varphi = t_1 + (t_f - t_2) \leq t_f$. Для случая 2 (см. (25)) выполнено неравенство $t_f < 4\pi - \varphi$. Следовательно, $2t_1 - \varphi < 4\pi - \varphi$, то есть $t_1 < 2\pi$. Это означает отсутствие циклов на первом интервале. При $\varphi \geq 0$ длина третьего интервала не превышает длины первого. Стало быть, на третьем интервале также нет циклов.

Как отмечено в подразд. 3.7, свойство 4, любое управление типа $U3$, ведущее во внутреннюю точку \mathcal{P} дуги $A3$, имеет три невырожденных участка постоянства. Применяя Лемму 4.3, получаем $(\mathcal{P}, \varphi)^T \in \text{int}G(t_f)$. Отсюда $\mathcal{P} \in \text{int}G_\varphi(t_f)$.

8.3 Описание границы φ -сечений для случая 2 в виде внешнего и внутреннего контуров

Кривая $A6$ представляет собой дугу окружности. Её центр во вспомогательной системе координат расположен в точке H , формула (16), а радиус R_{A6} описывается формулой (17). Из второго неравенства в определении случая 2 следует, что дуга $A6$ является невырожденной (радиус не равен нулю).

Дуга $A6$ с присоединёнными к ней частями кривых $A2$, $A3$ до второй точки P_2 их пересечения образует замкнутую кривую. Обозначим её через $B_\varphi(t_f)$. Символом $A_\varphi(t_f)$ обозначим замкнутую кривую, составленную из дуги $A1$ с присоединёнными к ней частями кривых $A2$, $A3$ до первой точки P_1 их пересечения (см. рис. 14). При $\varphi = 0$ дуга $A1$ вырождается в точку, которая становится точкой стыковки кривых $A2$ и $A3$. Поэтому при $\varphi = 0$ будем считать, что замкнутая кривая $A_\varphi(t_f)$ образована двумя кривыми $A2$ и $A3$ (до точки P_1). Каждая из кривых $A_\varphi(t_f)$, $B_\varphi(t_f)$ не имеет самопересечений. Пусть $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ (соответственно, $\mathbf{B}_\varphi(t_f)$) — замкнутое множество, ограниченное кривой $A_\varphi(t_f)$ (соответственно, кривой $B_\varphi(t_f)$).

Примеры множеств $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ и $\mathbf{B}_\varphi(t_f)$ показаны на рис. 14.

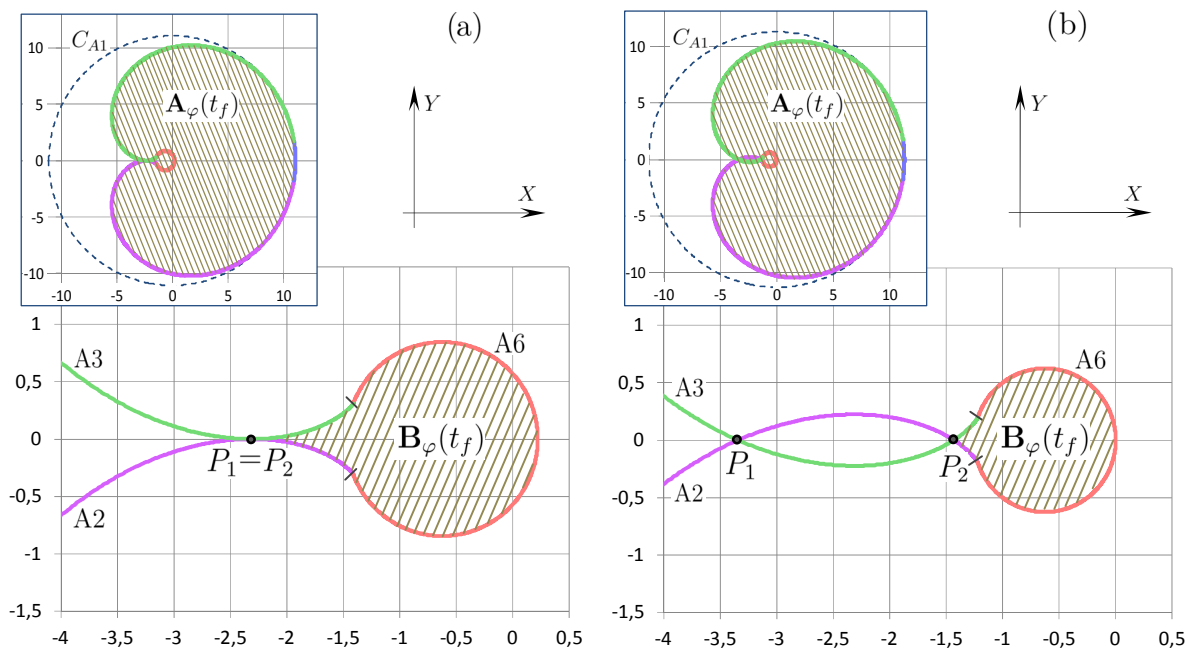


Рис. 14: Множества $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ и $\mathbf{B}_\varphi(t_f)$ для случая 2 при $\varphi = 0.1\pi$ и двух значений $t_f = 3\pi + 2 \cos(0.05\pi)$ (a), $t_f = 3.7\pi$ (b)

При выполнении неравенства (37) дуги кривых A_2 и A_3 между точками их пересечения P_1 и P_2 лежат в $\text{int}G_\varphi(t_f)$.

1) Рассмотрим две окружности с центром в точке H , одна проходит через точку P_1 , другая – через точку P_2 . Соответствующие круги обозначим C_{P_1} и C_{P_2} . В подразд. 3.7 (свойства 5, 6) отмечено, что для параметрически заданных кривых A_2, A_3 имеет место монотонное изменение расстояния от точки H до точек кривых A_2 и A_3 . Отсюда следует, что круг C_{A_6} с центром H , на границе которого лежит кривая A_6 , принадлежит множеству $\mathbf{B}_\varphi(t_f)$. Кроме того, при условии (37) круг C_{P_1} охватывает круг C_{P_2} , а при условии (38) эти круги совпадают.

Дополнительно учитывая свойство 10 из подразд. 3.7, получаем, что кривая $A_\varphi(t_f)$, за исключением точки P_1 , лежит вне круга C_{P_1} . Оставшиеся части кривых A_2, A_3 и вся кривая A_6 находятся в $\text{int}C_{P_1}$. Аналогично, кривая $B_\varphi(t_f)$, за исключением точки P_2 , лежит в $\text{int}C_{P_2}$; оставшиеся части кривых A_2, A_3 и вся кривая A_1 находятся вне круга C_{P_2} .

Вне множества $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ нет точек, порождённых управлениями типа U_1, U_2, U_3, U_6 . Поэтому в силу Леммы 5.1 кривая $A_\varphi(t_f)$ образует “внешнюю” границу множества $G_\varphi(t_f)$ для случая 2.

2) Установим, что кривая $B_\varphi(t_f)$ представляет собой “внутреннюю” границу множества $G_\varphi(t_f)$.

2.1) Рассмотрим в множестве $\text{int}\mathbf{B}_\varphi(t_f)$ точку J , расположенную на оси X и отстоящую от точки H влево на $\frac{1}{2}R_{A_6}(t_f)$. Имеем

$$J = \left(-4 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{t_f + \varphi}{4}\right), 0 \right)^T.$$

Покажем, что $J \notin G_\varphi(t_f)$. Предположим противное, то есть $J \in G_\varphi(t_f)$. Тогда по теореме Филиппова [50] существует оптимальное *по быстродействию* управление, ведущее в фазовую точку $(J, \varphi)^T$. Пусть t_f^* – соответствующий момент быстродействия. Имеем $0 \leq t_f^* \leq t_f$.

В силу теоремы 1 из [1, р. 515] оптимальное по быстродействию управление может быть взято в виде одного из шести вариантов $U_1 - U_6$. Рассмотрим их. При этом для управлений U_5 и U_6 мы не считаем обязательным выполнение условия (3).

Любое управление типа U_4 даёт в момент t_f^* значение $\varphi \leq 0$. Поскольку мы предполагаем $0 \leq \varphi < \pi$ (см. (25)), то для U_4 следует рассмотреть лишь значение $\varphi = 0$ с управлением $u(\cdot) \equiv 0$. Здесь получаем точку $(x(t_f^*), y(t_f^*))^T = (t_f^*, 0)^T$. Она не совпадает с точкой J при любом $t_f^* \in [0, t_f]$.

Для обеспечения неравенства $\varphi > 0$ в момент t_f^* при управлении типа U_5 требуется, чтобы длина среднего участка постоянства управления была меньше суммы длин первого и третьего участков. В статье [40] (доказательство Леммы 2) для такого условия было установлено наличие движения, которое приходит точно в ту же фазовую точку в тот же момент t_f^* , но не удовлетворяет ПМП. Стало быть, момент t_f^* не является оптимальным по быстродействию. Поэтому управления типа U_5 не могут быть оптимальными по быстродействию в точку $(J, \varphi)^T$ при $\varphi > 0$.

Если $\varphi = 0$, то управления типа U_5 порождают тот же набор точек (x, y) в момент t_f^* , что и управления типа U_6 . Поэтому управления типа U_5 можно не рассматривать.

Остаются управления четырёх типов: U_1, U_2, U_3, U_6 . Введём обозначения $A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_6^*$ для кривых, порождаемых указанными управлениями на момент быстродействия $t_f^* \in [\varphi, t_f]$ при зафиксированном значении φ . Кривые просчитываются

по формулам (11)–(14) и (5) с заменой символа t_f на t_f^* . Покажем, что кривые $A1^*$, $A2^*$, $A3^*$, $A6^*$ не содержат точку J .

Рассмотрим два варианта: $t_f^* \in [\varphi, \pi)$, $t_f \in [\pi, t_f]$.

В первом из них можно убедиться, что кривые $A1^*$, $A2^*$, $A3^*$, $A6^*$ расположены в полуплоскости $X \geq 0$. В то же время точка J находится в полуплоскости $X < 0$. Стало быть, любые управления типа $U1$, $U2$, $U3$, and $U6$ не могут быть решением задачи быстрогодействия для t_f^* .

Во втором варианте справедливо неравенство $\pi/4 \leq (t_f^* + \varphi)/4$. Покажем, что $J \in \text{int}C_{A6^*}$. Для этого достаточно установить, что расстояние $2 \sin((t_f + \varphi)/4)$ между точками J и H меньше радиуса $R_{A6}(t_f^*) = 4 \sin((t_f^* + \varphi)/4)$ окружности, соответствующей дуге $A6^*$ (см. (17)). Знак модуля в формуле для $R_{A6}(t_f^*)$ опущен, поскольку в силу $0 \leq t_f^* + \varphi \leq t_f + \varphi < 4\pi$ выполнено неравенство $\sin((t_f^* + \varphi)/4) \geq 0$.

Итак, проверим неравенство

$$2 \sin((t_f + \varphi)/4) < 4 \sin((t_f^* + \varphi)/4). \quad (39)$$

Если $(t_f^* + \varphi)/4 \geq \pi/2$, то неравенство (39) выполнено в силу монотонности синуса для значений $\pi/2 \leq (t_f^* + \varphi)/4 \leq (t_f + \varphi)/4 < \pi$. Последнее неравенство следует из определения случая 2. Если $(t_f^* + \varphi)/4 < \pi/2$, то $4 \sin((t_f^* + \varphi)/4) \geq 4 \sin(\pi/4) = 2\sqrt{2}$. Отсюда с учётом $2 \sin((t_f + \varphi)/4) \leq 2$ вытекает справедливость неравенства (39).

Поскольку дуга $A6^*$ лежит на границе круга C_{A6^*} , то управление типа $U6$ не может вести в момент t_f^* в фазовую точку $(J, \varphi)^T$.

Из подразд. 3.7, свойство 9, следует, что кривые $A1^*$, $A2^*$, $A3^*$ расположены вне $\text{int}C_{A6^*}$. Поэтому управления $U1$, $U2$, $U3$ также не могут приводить в момент t_f^* в фазовую точку $(J, \varphi)^T$.

Таким образом, ни одно из управлений типа $U1$ – $U6$ не может быть решением задачи быстрогодействия в точку $(J, \varphi)^T$ в момент t_f^* . Стало быть, момент $t_f^* \in [0, t_f]$ не может быть моментом быстрогодействия. Пришли к противоречию. Поэтому $J \notin G_\varphi(t_f)$.

2.2) Как отмечено выше, кривая $B_\varphi(t_f)$, за исключением точки P_2 , находится в $\text{int}C_{P_2}$. Помимо кривой $B_\varphi(t_f)$ в этом круге нет других точек, образованных управлениями $U1$, $U2$, $U3$, $U6$. Стало быть, в множестве $\text{int}B_\varphi(t_f)$ нет точек, порождённых данными управлениями для рассматриваемых значений t_f и φ .

Привлекая Лемму 5.2, убеждаемся, что все её условия выполнены. Получаем, что кривая $B_\varphi(t_f)$ образует “внутреннюю” границу φ -сечения множества $G(t_f)$ для случая 2.

Рассмотрим открытое множество $M_\varphi(t_f) = (A_\varphi(t_f))^- \cap (B_\varphi(t_f))^+$. Кривые $A_\varphi(t_f)$ и $B_\varphi(t_f)$ имеют не более одной общей точки. Такой точкой является точка касания кривых $A2$ и $A3$ при условии (38). Если это условие не выполнено, то у кривых $A_\varphi(t_f)$ и $B_\varphi(t_f)$ нет общей точки. Опираясь на теорему Жордана и теорему Шёнфлиса [48, 49], можно показать, что множество $M_\varphi(t_f)$ является связным.

Таким образом, для множества $M = M_\varphi(t_f)$ выполнены условия Леммы 5.3. Заключаем, что множество $G_\varphi(t_f)$ в случае 2 имеет внешнюю границу в виде кривой $A_\varphi(t_f)$ и внутреннюю границу в виде кривой $B_\varphi(t_f)$. Имеем $G_\varphi(t_f) = A_\varphi(t_f) \setminus \text{int}B_\varphi(t_f)$ (рис. 14).

9 Граница φ -сечений для случая 3

Особенность случая 3 в том, что кривая А6 не будет использоваться в описании границы φ -сечений. Для построения границы потребуется некоторое разбиение кривых А2 и А3.

9.1 Разбиение кривых А2 и А3

Нужное нам разбиение кривой А3 описывается ниже в трёх пунктах. В силу симметрии относительно оси X аналогичное разбиение имеет место и для кривой А2.

1) Кривая А3 определяется формулой (13) и задаётся при помощи параметра $s_3 \in [0, \theta]$. Положим $s_3^c = 2\pi - \varphi$. Покажем, что $s_3^c \in (0, \theta]$. Действительно, из неравенства $\varphi < 2\pi$ в определении случая 3 следует, что $s_3^c > 0$. Второе соотношение в определении случая 3 запишем в виде $t_f - \varphi \geq 4\pi - 2\varphi$. Поэтому $s_3^c \leq (t_f - \varphi)/2 = \theta$. Стало быть, значение $s_3 = s_3^c$ определяет допустимую точку на кривой А3, которую обозначим \mathcal{P}_3^c . Точка \mathcal{P}_3^c не совпадает с начальной точкой кривой А3, но может совпадать с её последней точкой.

Содержательно параметр s_3^c соответствует значению $t_1 = 2\pi$ (в силу (4)). Поэтому есть цикл на первом интервале постоянства получаемого управления типа $U3$. При $s_3 < s_3^c$ возникающее движение не содержит циклов. При $s_3 > s_3^c$ длительность t_1 первого интервала удовлетворяет соотношению $t_1 > 2\pi$. Следовательно, на первом интервале есть хотя бы один цикл.

На рис. 15 показан пример кривой А3, соответствующий $t_f = 3.5\pi$, $\varphi = 1.2\pi$. Здесь $\theta = 1.15\pi$. Пунктирные траектории построены для пяти значений параметра s_3 . Траектория, ведущая в точку \mathcal{P}_3^c , соответствует значению $s_3^c = 0.8\pi$. Для $s_3 \in [0, 0.8\pi)$ первый интервал постоянства управления имеет длительность меньше 2π . Поэтому на соответствующих траекториях нет циклов. Для $s_3 \in [0.8\pi, 1.15\pi]$ есть цикл на первом участке, на третьем участке цикл отсутствует.

Циклы могут быть и на третьем участке постоянства управления, но тогда обязательно присутствует цикл на первом участке (поскольку $\varphi = t_1 - (t_f - t_2) \geq 0$).

Соответствующий пример кривой А3 для $t_f = 7.2\pi$, $\varphi = 1.2\pi$ показан на рис. 16. Пунктирные траектории построены для семи значений параметра s_3 . Среди них есть и траектория, ведущая в точку \mathcal{P}_3^c . Поскольку взятое значение φ такое же, как и для рис. 15, то совпадают и значения $s_3^c = 2\pi - \varphi$. Если $s_3 \in [0, 0.8\pi)$, то на соответствующем движении нет циклов. При $s_3 \in [0.8\pi, 2\pi)$ есть лишь один цикл и он расположен на первом участке. Если $s_3 = 2\pi$, то дополнительно возникает цикл на третьем участке. При $s_3 > 2\pi$, то циклы есть как на первом, так и на третьем участках.

Точка \mathcal{P}_3^c не может лежать выше оси X , то есть $Y_{U3}(s_3^c) \leq 0$. Действительно, подставим $s_3^c = 2\pi - \varphi$ в (13). Для координаты Y получаемой точки на кривой А3 имеем

$$Y_{U3}(s_3^c) = 2 \left((\theta - 2\pi + \varphi) \sin \left(2\pi - \varphi + \frac{\varphi}{2} \right) + 2 \sin \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\pi - \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right).$$

Раскрывая значение θ , после упрощений получим

$$Y_{U3}(s_3^c) = 2 \left(\frac{\varphi - t_f}{2} + 2\pi - \varphi \right) \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) = (4\pi - \varphi - t_f) \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right).$$

Из второго соотношения в определении случая 3 следует, что первый сомножитель последнего выражения не является положительным. Второй сомножитель не является отрицательным, поскольку $0 \leq \varphi < 2\pi$. Таким образом, $Y_{U3}(s_3^c) \leq 0$. Равенство $Y_{U3}(s_3^c) = 0$ эквивалентно выполнению хотя бы одного из условий $\varphi = 0$, $t_f = 4\pi - \varphi$.

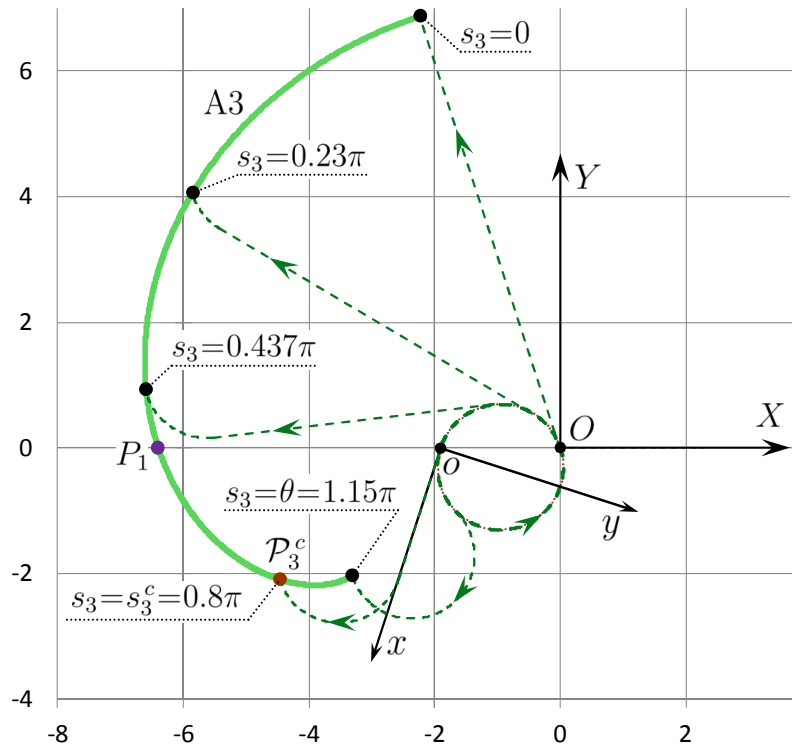


Рис. 15: Пример расположения точки \mathcal{P}_3^c на кривой A_3 ($t_f = 3.5\pi$, $\varphi = 1.2\pi$)

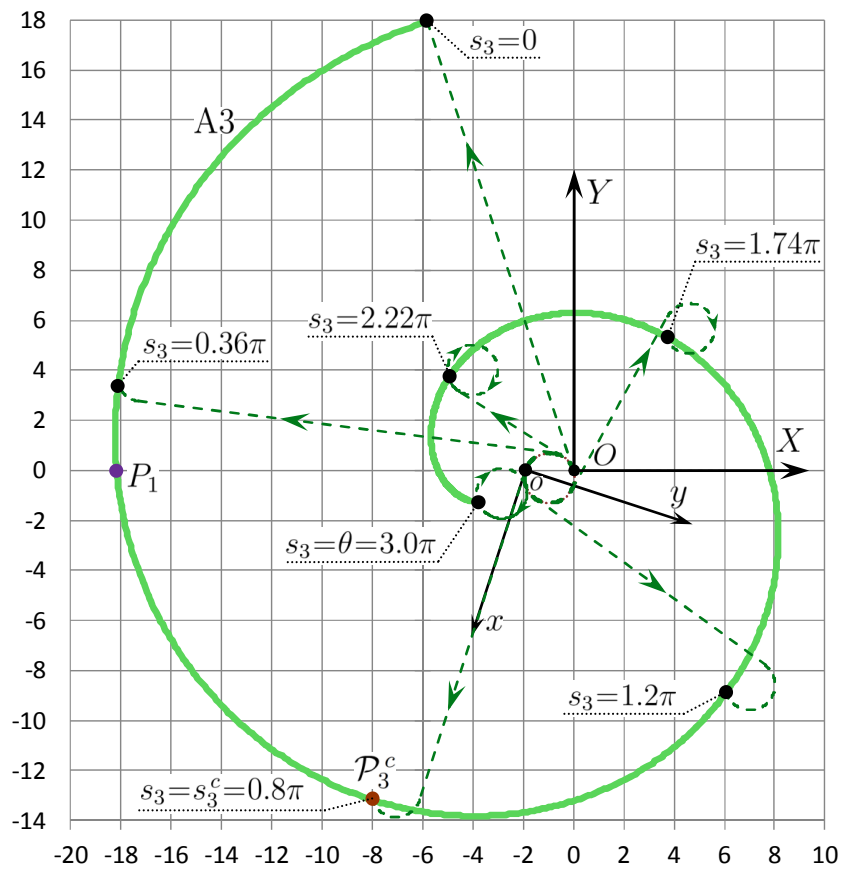


Рис. 16: Пример кривой A_3 с циклами на первом и третьем интервалах порождающих её траекторий ($t_f = 7.2\pi$, $\varphi = 1.2\pi$)

2) Из определения случая 3 следует, что $t_f \geq 2\pi$. Стало быть, в случае 3 выполнены соотношения $0 \leq \varphi < 2\pi$, $\varphi < t_f$. Поэтому справедливо первое неравенство из (31), установленное для случая 1. Это означает, что начальная точка $\mathcal{P}_{1,3}$ кривой АЗ находится выше оси X (при $\varphi > 0$), либо на этой оси (при $\varphi = 0$).

Рассмотрим участок кривой АЗ от начальной точки $\mathcal{P}_{1,3}$ до точки \mathcal{P}_3^c . Покажем, что на этом участке есть точка P_1 , лежащая на оси X , такая что открытая дуга $(\mathcal{P}_{1,3}, P_1)$ расположена выше оси X , а открытая дуга (P_1, \mathcal{P}_3^c) – ниже оси X . Точка P_1 может совпадать с точкой \mathcal{P}_3^c .

Чтобы установить существование точки P_1 (по аналогии со случаем 2), исследуем производную $(Y_{U3}(s_3))'_{s_3}$, вычисляемую по формуле (32). Функцию $s_3 \rightarrow (Y_{U3}(s_3))'_{s_3}$ рассмотрим на участке $(0, s_3^c)$, который соответствует дуге $(\mathcal{P}_{1,3}, \mathcal{P}_3^c)$.

Если $\varphi \geq \pi$, мы получаем $(Y_{U3}(s_3))'_{s_3} < 0$ для $s_3 \in (0, s_3^c)$. Имеем $Y_{U3}(0) > 0$ и $Y_{U3}(s_3^c) \leq 0$. Поэтому на дуге $(\mathcal{P}_{1,3}, \mathcal{P}_3^c]$ можно однозначно определить точку P_1 пересечения с осью X .

При $\varphi < \pi$ функция $s_3 \rightarrow (Y_{U3}(s_3))'_{s_3}$ (как и в случае 2) на интервале $(0, s_3^c)$ обращается в нуль только в двух точках $s_3^* = (\pi - \varphi)/2$ и $s_{3*} = (3\pi - \varphi)/2$. Нетрудно установить, что $0 < s_3^* < s_{3*} < s_3^c$. Имеем $(Y_{U3}(s_3))'_{s_3} > 0$ на участке $(0, s_3^*)$. Стало быть, $Y_{U3}(s_3^*) > 0$. Аналогично имеем $(Y_{U3}(s_3))'_{s_3} > 0$ на участке (s_{3*}, s_3^c) , что означает $Y_{U3}(s_{3*}) < 0$. В свою очередь, на участке (s_3^*, s_{3*}) производная удовлетворяет соотношению $(Y_{U3}(s_3))'_{s_3} < 0$. Поэтому на данном участке кривой АЗ так же, как и для $\varphi \geq \pi$, можно однозначно ввести точку P_1 пересечения с осью X .

Таким образом, на участке $(\mathcal{P}_{1,3}, \mathcal{P}_3^c]$ кривой АЗ можно указать точку P_1 на оси X , так что участок $(\mathcal{P}_{1,3}, P_1)$ кривой АЗ лежит выше оси X . При этом оставшийся участок (P_1, \mathcal{P}_3^c) кривой АЗ при $P_1 \neq \mathcal{P}_3^c$ расположен ниже оси X . Это можно сделать как при $\varphi \geq \pi$, так и при $\varphi < \pi$.

3) Если точка \mathcal{P}_3^c не совпадает с точкой P_1 , то рассматриваем открытую дугу (P_1, \mathcal{P}_3^c) кривой АЗ (см. рис. 15, 16). Для любой точки \mathcal{P} этой дуги управление типа $U3$, ведущее в неё, имеет три невырожденных участка постоянства управления (см. подразд. 3.7, свойство 4). Соответствующая траектория не имеет циклов по определению точки \mathcal{P}_3^c . Дуга (P_1, \mathcal{P}_3^c) лежит ниже оси X . В силу Леммы 4.3 получаем, что точка $(\mathcal{P}, \varphi)^T$ принадлежит $\text{int}G(t_f)$.

9.2 Невырожденный и вырожденный подслучай

Будем различать два подслучая случая 3:

$$t_f > 4\pi - \varphi, \quad (40)$$

$$t_f = 4\pi - \varphi. \quad (41)$$

Первый назовём невырожденным, второй – вырожденным.

1) Невырожденный подслучай. Условие (40) запишем в виде $t_f - \varphi > 4\pi - 2\varphi$. Отсюда следует, что точка \mathcal{P}_3^c , определяемая параметром $s_3^c = 2\pi - \varphi$, не совпадает с точкой $\mathcal{P}_{3,6}$, соответствующей параметру $s_3 = \theta$. Рассмотрим полуоткрытую дугу $[\mathcal{P}_3^c, \mathcal{P}_{3,6})$ кривой АЗ. Для любой точки \mathcal{P} этой дуги управление типа $U3$, ведущее в эту точку, имеет три невырожденных участка постоянства управления. При этом на первом участке есть цикл в силу выбора точки \mathcal{P}_3^c . В силу Леммы 4.1 получаем, что $(\mathcal{P}, \varphi)^T \in \text{int}G(t_f)$.

Таким образом, дуга $(P_1, \mathcal{P}_3^c) \cup [\mathcal{P}_3^c, \mathcal{P}_{3,6})$ расположена в $\text{int}G_\varphi(t_f)$.

Последняя точка $\mathcal{P}_{3,6}$ кривой А3 одновременно является крайней точкой кривой А6.

Рассмотрим кривую А6. Возьмём на ней произвольную точку \mathcal{P} . Для моментов переключения t_1 и t_2 управления типа $U3$, ведущего в эту точку, справедливы соотношения

$$t_f = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + (t_f - t_2), \quad \varphi = -(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) - (t_f - t_2).$$

Подставляя данные выражения в неравенство $t_f > 4\pi - \varphi$, получаем $(t_2 - t_1) > 2\pi$. Стало быть, длина среднего участка постоянства управления $U6$ больше 2π . Из условия $\varphi < t_f$, выполненного для случая 3 (см. (26)), следует, что первый и третий участки постоянства управления не могут быть вырожденными одновременно.

Привлекая Лемму 4.2, получаем $(\mathcal{P}, \varphi)^T \in \text{int}G_\varphi(t_f)$. Поэтому $\mathcal{P} \in \text{int}G_\varphi(t_f)$. Таким образом, вся кривая А6 принадлежит $\text{int}G_\varphi(t_f)$.

Для подслучая (40) получаем следующий вывод. Кривая А1, вместе с частью кривой А3 от точки $\mathcal{P}_{1,3}$ до точки P_1 и частью кривой А2 от точки P_1 до точки $\mathcal{P}_{1,2}$ образуют замкнутую кривую без самопересечений. Обозначим её $A_\varphi(t_f)$. Пусть $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ — замкнутое множество, ограниченное этой кривой. Кривая А6 и оставшиеся участки кривых А2, А3 принадлежат множеству $\text{int}\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ и также находятся в $\text{int}G_\varphi(t_f)$.

Рис. 4б в разд. 3 относится к невырожденному подслучаю случая 3. Видно, что кривые А2 и А3 после первого пересечения оси X (точка P_1) делают несколько оборотов. Участок этой кривой после точки P_1 лежит в $\text{int}G_\varphi(t_f)$. Такое же свойство имеет место для соответствующего участка кривой А2 в силу симметрии с кривой А3.

2) Вырожденный подслучай. Из условия (41) по аналогии с невырожденным подслучаем следует, что $\mathcal{P}_3^c = \mathcal{P}_{3,6}$. При этом кривая А6 вырождается (радиус окружности становится равным нулю) в точку $H = \mathcal{P}_{2,6} = \mathcal{P}_{3,6}$. Если $\varphi = 0$, то кривая А1 вырождается в точку, совпадающую с точками $\mathcal{P}_{1,2}$ и $\mathcal{P}_{1,3}$.

Для вырожденного подслучая на рис. 17 показана кривая $A_\varphi(t_f)$, составленная из кривых А1, А3, А6 (вырожденная кривая), А2. Точка \mathcal{P}_3^c совпадает с точкой H . Здесь представлены три варианта: $\varphi = 0.3\pi$, $t_f = 3.7\pi$ (рис. 17а); $\varphi = 1.0\pi$, $t_f = 3.0\pi$ (рис. 17б); $\varphi = 1.4\pi$, $t_f = 2.6\pi$ (рис. 17с).

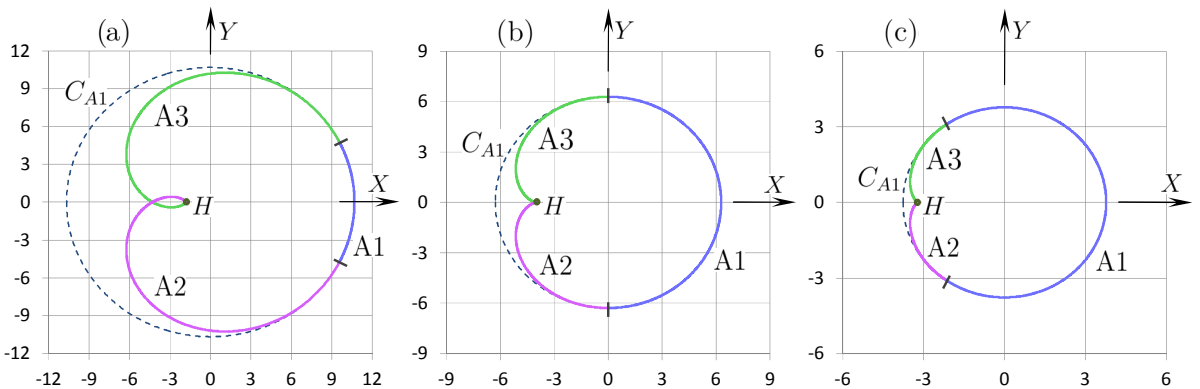


Рис. 17: Случай 3. Варианты кривой $A_\varphi(t_f)$ для вырожденного подслучая

2.1) Предположим, что $\varphi < \pi$ (рис. 17а). Тогда $P_1 \neq \mathcal{P}_{3,6}$. Так же, как в невырожденном случае, кривая А1 вместе с частью кривой А3 от точки $\mathcal{P}_{1,3}$ до точки P_1 и частью кривой А2 от точки P_1 до точки $\mathcal{P}_{1,2}$ образуют замкнутую кривую без

самопересечений. Пусть $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ — замкнутое множество, ограниченное этой кривой. Оставшиеся участки кривых А2, А3 принадлежат множеству $\text{int}\mathbf{A}_\varphi(t_f)$. При этом дуга $(\mathcal{P}_{2,6}, P_1)$ кривой А2 и дуга $(P_1, \mathcal{P}_{3,6})$ кривой А3 находятся в $\text{int}G_\varphi(t_f)$. Аналогичное свойство для точки $\mathcal{P}_{2,6} = \mathcal{P}_{3,6}$ будет установлено в следующем подразделе.

2.2) Предположим, что $\varphi \geq \pi$. Тогда $P_1 = \mathcal{P}_{3,6}$. Получаем, что кривые А1, А2, А3 образуют замкнутую кривую без самопересечений. Пусть $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ — замкнутое множество, ограниченное этой кривой.

Геометрически ситуации $\varphi = \pi$ (рис. 17b) и $\varphi > \pi$ (рис. 17c) отличаются тем, что в первом из них кривые А2 и А3 касаются в точке $H = P_1$, а во втором случае сочленяются в этой точке под углом.

Вне множества $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$, а также в его внутренности нет точек, порождённых управлениями типа $U1, U2, U3, U6$.

9.3 Построение границы φ -сечения

Применяя Лемму 5.1 к множеству $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$, введённому в предыдущем подразделе, получаем, что

$$G_\varphi(t_f) \subset \mathbf{A}_\varphi(t_f), \quad \partial\mathbf{A}_\varphi(t_f) \subset \partial G_\varphi(t_f). \quad (42)$$

Покажем, что для множества $\text{int}\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ выполнены условия Леммы 5.3. Положим $M_\varphi(t_f) = \text{int}\mathbf{A}_\varphi(t_f)$.

В невырожденном подслучае все дуги кривых А2, А3 и А6, не участвующие в образовании границы множества $\mathbf{A}_\varphi(t_f)$, принадлежат множеству $M_\varphi(t_f)$. Кроме того, эти дуги принадлежат $\text{int}G_\varphi(t_f)$. Стало быть, выполнено условие 2) Леммы 5.3 для множества $M = M_\varphi(t_f)$.

В вырожденном подслучае при $\varphi < \pi$ выполнено условие 2) Леммы 5.3. В самом деле, для участков кривых А2, А3 и А6, принадлежащих множеству $M_\varphi(t_f)$, установлено, что любая их точка, за исключением разве лишь точки $\mathcal{P}_{3,6}$, принадлежит $\text{int}G_\varphi(t_f)$. При $\varphi \geq \pi$ вне множества $\partial\mathbf{A}_\varphi(t_f)$ нет кривых А1, А2, А3, А6, и, следовательно, эти кривые отсутствуют в множестве $M_\varphi(t_f)$. Для применения Леммы 5.3 (при выполнении условия 1)) необходимо указать точку, принадлежащую $\text{int}G_\varphi(t_f)$. В качестве такой точки так же, как и в разд. 7, возьмём точку, порождённую постоянным управлением $u(t) \equiv \varphi/t_f$. Таким образом, выполнено условие 1) Леммы 5.3 для $M = M_\varphi(t_f)$.

В итоге для всех вариантов (рассмотренных в подразд. 9.2) случая 3, получаем выполнение условий Леммы 5.3. Таким образом, $M_\varphi(t_f) = \text{int}\mathbf{A}_\varphi(t_f) \subset G_\varphi(t_f)$. Отсюда с учётом (42) получаем $G_\varphi(t_f) = \mathbf{A}_\varphi(t_f)$ в случае 3. Как следствие, для вырожденного подслучая при $\varphi < \pi$ имеем $\mathcal{P}_{2,6} = \mathcal{P}_{3,6} \in \text{int}G_\varphi(t_f)$.

Граница множества $G_\varphi(t_f)$ составляется из кривой А1 и участка кривой А3 до первой точки P_1 её пересечения с осью X , а также симметричного участка кривой А2 (см. рис. 17 и 18). Рис. 18a (рис. 18b) соответствует $t_f = 4.5\pi$, $\varphi = \pi$ ($t_f = 8.5\pi$, $\varphi = \pi$).

Замечание 2. Рассмотрим вырожденный подслучай (41) случая 3.

При условии $\varphi \geq \pi$ (подразд. 9.2, пункт 2.2, рис. 17b и 17c) точка H лежит на границе множества $G_\varphi(t_f)$. Поэтому точка $(H, \varphi)^\Gamma$ принадлежит границе трёхмерного множества $G(t_f)$.

При условии $0 \leq \varphi < \pi$ (подразд. 9.2, пункт 2.1, рис. 17a) имеем $H \in \text{int}G_\varphi(t_f)$. Если $0 < \varphi < \pi$, то при фиксированном значении t_f точка H является предельной

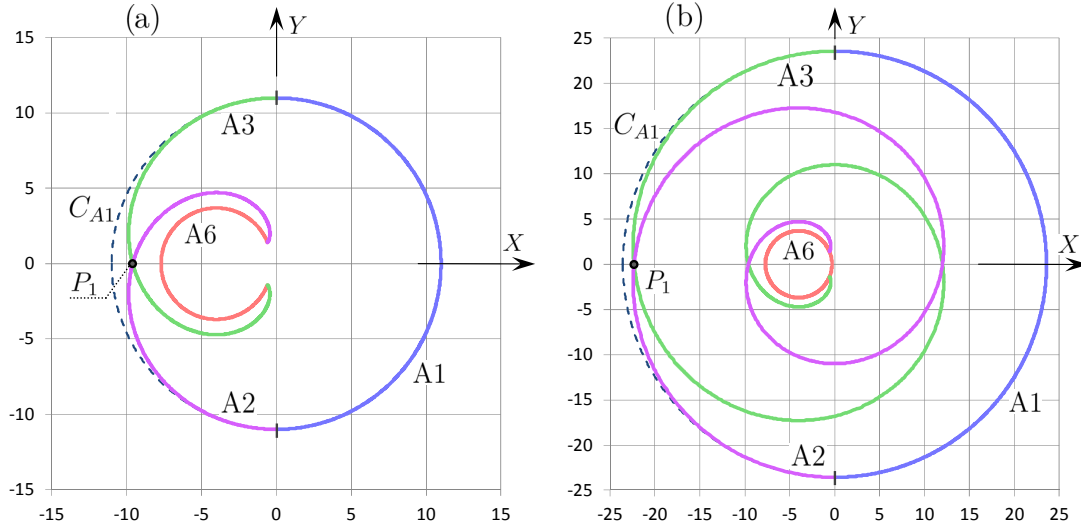


Рис. 18: Случай 3. Множество $G_\varphi(t_f)$ в невырожденном подслучае

для дуги $A6(\tilde{\varphi})$, где $0 < \tilde{\varphi} < \varphi$ и $\tilde{\varphi} \rightarrow \varphi$. Поскольку для любой точки $P \in A6(\tilde{\varphi})$ выполнено включение $P \in \partial G_{\tilde{\varphi}}(t_f)$, то $(P, \tilde{\varphi})^\top \in \partial G(t_f)$. Отсюда, с учётом замкнутости множества $G(t_f)$, получаем $(H, \varphi)^\top \in \partial G(t_f)$.

Таким образом, в целом для вырожденного подслучая (41) случая 3 при $\varphi > 0$ точка $(H, \varphi)^\top$ принадлежит границе трёхмерного множества достижимости $G(t_f)$. Если $\varphi = 0$, то точка $(H, \varphi)^\top$ принадлежит внутренности трёхмерного множества достижимости $G(t_f)$.

10 Граница φ -сечений в случае 4

Покажем, что в случае 4 любое φ -сечение представляет собой круг C_{A1} , задаваемый кривой $A1$. Положение центра круга зависит от φ , а его радиус – от φ и t_f .

Кривая $A1$ определяется формулой (11) и является дугой окружности радиусом $R_{A1} = (t_f - \varphi)$ с центром в начале отсчёта вспомогательной системы координат X, Y . По определению случая 4 (см. (27)) выполнено неравенство $\varphi \geq 2\pi$. Дуга $A1$, раствор которой равен φ , образует окружность с “перехлёстом”. Кривые $A2, A3, A6$ принадлежат кругу C_{A1} . При этом точки $\mathcal{P}_{1,2}, \mathcal{P}_{1,3}$ стыковки кривых $A2, A3$ с кривой $A1$ лежат на его границе. Все остальные точки кривых $A2, A3$, а также кривая $A6$ расположены в $\text{int}C_{A1}$ (подразд. 3.7, свойство 8).

Установим, что все точки кривых $A2, A3, A6$, лежащие в $\text{int}C_{A1}$, принадлежат $\text{int}G_\varphi(t_f)$. Внутренние точки кривой $A3$ порождаются управлениями типа $U3$ с тремя невырожденными участками постоянства (подразд. 3.7, свойство 4). При этом моменты переключения t_1 и t_2 связаны соотношением $\varphi = t_1 - (t_f - t_2)$. Поскольку $\varphi \geq 2\pi$, то $t_1 > t_1 - (t_f - t_2) \geq 2\pi$. Поэтому на всех движениях, ведущих во внутренние точки кривой $A3$, на первом участке постоянства управления есть цикл. В соответствии с Леммой 4.1 получаем, что рассматриваемые точки кривой $A3$ принадлежат $\text{int}G_\varphi(t_f)$. Аналогичное свойство справедливо для кривой $A2$.

Рассмотрим кривую $A6$. Она порождается управлениями типа $U6$. Соответствующие моменты t_1 и t_2 переключения связаны соотношениями

$$t_f = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + (t_f - t_2), \quad \varphi = -(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) - (t_f - t_2).$$

Отсюда $(t_2 - t_1) = (t_f + \varphi)/2$. Из условия (27) получаем $2\pi < (t_2 - t_1) < t_f$. Таким образом, для любой точки кривой А6 на соответствующем управлении длительность второго участка больше 2π , а из двух соседних крайних участков хотя бы один не является вырожденным. В силу Леммы 4.2 заключаем, что кривая А6 целиком принадлежит $\text{int}G_\varphi(t_f)$.

Привлекая Лемму 5.1 и Лемму 5.3, получаем $G_\varphi(t_f) = C_{A_1}$.

На рис. 19а (рис. 19б) показано множество $G_\varphi(t_f)$ для значений $t_f = 5\pi$, $\varphi = 2.5\pi$ (соответственно, $t_f = 8\pi$, $\varphi = 2.5\pi$). Оно совпадает с кругом C_{A_1} . Кривая А1 представляет собой окружность “с перехлёстом”. Также изображены кривые А2, А3, А6.

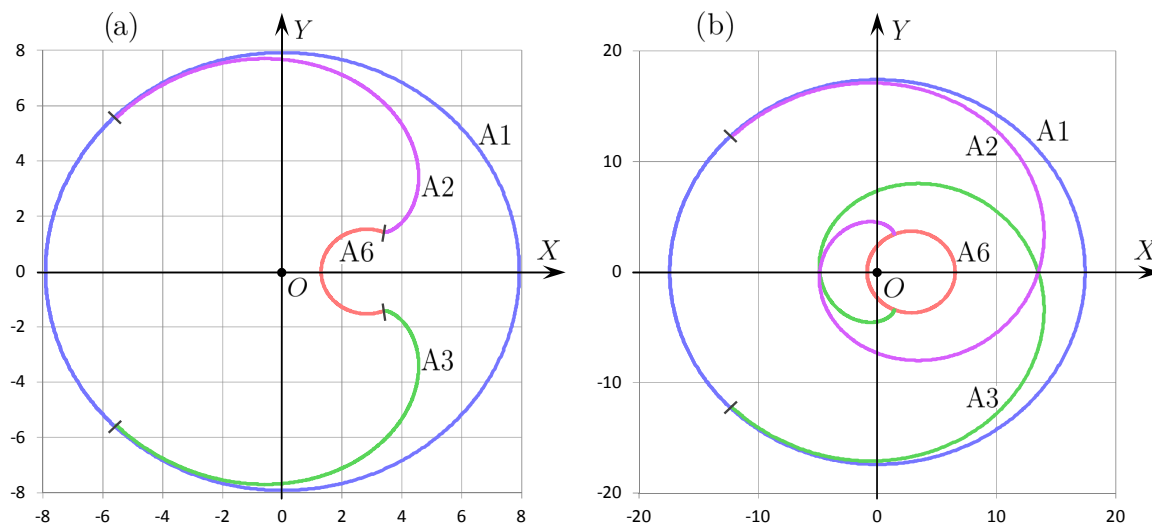


Рис. 19: Случай 4. Множество $G_\varphi(t_f)$ для двух вариантов t_f и φ

11 Общее описание структуры φ -сечений для $\varphi \geq 0$

Суммируем результаты разделов 6–10 о структуре φ -сечений множества достижимости при $\varphi \geq 0$ в виде следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть $\varphi \geq 0$. Тогда

1) φ -сечения $G_\varphi(t_f)$ множества достижимости $G(t_f)$ являются односвязными в случаях 1, 3, 4, 5. В случае 2 φ -сечение $G_\varphi(t_f)$ не является односвязным;

2) в случае 1 граница φ -сечения $G_\varphi(t_f)$ представляет собой простую замкнутую кривую $A_\varphi(t_f)$, составленную из последовательно соединённых кривых А1, А3, А6, А2;

3) в случае 2 граница φ -сечения $G_\varphi(t_f)$ распадается на две части: внешний контур (кривая $A_\varphi(t_f)$) и внутренний контур (кривая $B_\varphi(t_f)$). Внешний контур составляется из кривой А1 и примыкающих к ней частей кривых А2 и А3 до точки их первого пересечения. Внутренний контур составляется из кривой А6 и примыкающих к ней частей кривых А2 и А3 до точки их последнего пересечения;

4) в случае 3 граница φ -сечения $G_\varphi(t_f)$ представляет собой простую замкнутую кривую $A_\varphi(t_f)$. Она состоит из кривой А1 и примыкающих к ней частей кривых А2 и А3 до точки их первого пересечения;

5) в случае 4 граница φ -сечения $G_\varphi(t_f)$ представляет собой окружность, которая определяется кривой А1;

6) в случае 5 φ -сечение $G_\varphi(t_f)$ вырождается в точку.

12 Случай $\varphi < 0$

Исследование случая $\varphi < 0$ опирается на свойство симметрии системы (1), которое заключается в следующем. Рассмотрим движение $(x^*(t), y^*(t), \varphi^*(t))^T$ системы из начальной нулевой фазовой точки на промежутке времени $[0, t_f]$, порожденное некоторым допустимым управлением $u^*(t)$. В момент t_f получаем точку $(x^*(t_f), y^*(t_f), \varphi^*(t_f))^T$. Управление $u_*(t) = -u^*(t)$ (то есть, отличающееся от первоначального только знаком) при той же нулевой начальной точке реализует в момент t_f фазовое состояние $(x_*(t_f), y_*(t_f), \varphi_*(t_f))^T$, где $x_*(t_f) = x^*(t_f)$, $y_*(t_f) = -y^*(t_f)$, $\varphi_*(t_f) = -\varphi^*(t_f)$.

Это приводит к тому, что φ^* -сечение $G_{\varphi^*}(t_f)$ множества достижимости $G(t_f)$ при любом φ^* связано с соответствующим сечением при $\varphi_* = -\varphi^*$ зеркальным отражением относительно оси x исходной системы координат. В рамках вспомогательной системы координат (если её ввести и для $\varphi < 0$) новое сечение совпадает со старым. Такие факты позволяют не рассматривать отдельно случай $\varphi < 0$. Результат для него определяется случаем $\varphi > 0$.

При $\varphi = 0$ исходная система координат x, y совпадает со вспомогательной системой X, Y . Поэтому соответствующее φ -сечение $G_\varphi(t_f)$ симметрично относительно оси x исходной системы координат.

Замечание 3. Материал разделов 6–10 можно трактовать как описание дополнительных условий, налагаемых на управления типа $U1 - U6$ из (2). Такие условия (наряду с соотношением (3)) выделяют управления, ведущие на границу φ -сечений множества достижимости $G(t_f)$. Эти условия зависят от t_f и φ (см. рис. 11 и формулы (24)–(28)). Учёт их полностью характеризует не только границу φ -сечений, но и границу всего трёхмерного множества достижимости $G(t_f)$.

Заключение

Для машины Дубинса с симметричным ограничением на управление получено аналитическое описание сечений по угловой координате φ трёхмерного множества достижимости $G(t_f)$. Классифицированы возможные типы двумерных φ -сечений множества $G(t_f)$ с различными наборами образующих граничных дуг. Выделен случай, когда φ -сечение не является односвязным.

В работе [40] был описан некоторый класс кусочно-постоянных управлений с не более чем двумя переключениями. Было показано, что такими управлениями можно ограничиться при построении границы трёхмерного множества достижимости. Однако в этом классе были также и управления, ведущие во внутренность множества достижимости. Полученные в данной работе соотношения отсеивают такие управления. Тем самым выделен подкласс управлений, каждое из которых ведёт на границу множества достижимости. Наоборот, для каждой точки границы найдётся хотя бы одно управление из данного подкласса, ведущее в эту точку.

Результаты статьи открывают возможность (на основе эффективного численного построения границы множества $G(t_f)$ с ростом t_f) решать многие задачи оптимального управления с динамикой машины Дубинса, в том числе задачи быстрого действия. Возможно также применение и при решении некоторых игровых задач.

Результаты статьи планируется перенести на случай несимметричного ограничения на управление $u \in [u_1, u_2]$, для $u_1 < 0$, $u_2 > 0$.

Благодарности

Статья посвящена памяти профессора Рафаила Фёдоровича Габасова. Рафаил Фёдорович — ученик Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского. Вместе с Е.А. Барбашиным и Ф.М. Кирилловой он очень много сделал для развития теории оптимального управления в Белоруссии, где получил замечательные научные результаты и создал известную в мире математическую школу. Авторы благодарят М.А. Патракеева за консультации, связанные с применением теорем Жордана и Шёнфлиса. Авторы выражают благодарность С.И. Кумкову за помощь в переводе текста на английский язык. Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

Данный текст является авторским переводом статьи

Patsko V.S., Fedotov A.A. Three-dimensional reachable set for the Dubins car: Foundation of analytical description. *Commun. Optim. Theory*. 2022. V. 2022. Article ID 23. P. 1–42.

Список литературы

- [1] Dubins, L. E., “On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents,” *American J. Math.*, Vol. 79, No. 3, 1957, pp. 497–516, doi:10.2307/2372560.
- [2] Sussmann, H. J. and Tang, W., “Shortest Paths for the Reeds-Shepp Car: a Worked Out Example of the Use of Geometric Techniques in Nonlinear Optimal Control,” Report sycon-91-10, Rutgers University, 1991.
- [3] Kaya, C. Y., “Markov-Dubins Path via Optimal Control Theory,” *Computational Optimization and Applications*, Vol. 68, No. 3, 2017, pp. 719–747, doi:10.1007/s10589-017-9923-8.
- [4] Markov, A. A., “A Few Examples of Solving Special Problems on the Largest and Smallest Values,” *The communications of the Kharkov mathematical society*, Vol. 1, No. 2, 1889, pp. 250–276. (in Russian).
- [5] Isaacs, R., “Games of Pursuit,” Tech. rep., RAND Corporation, Santa Monica, 1951.
- [6] Miele, A., *Flight Mechanics, Volume 1: Theory of Flight Paths*, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1962.
- [7] Pecsvaradi, T., “Optimal Horizontal Guidance Law for Aircraft in the Terminal Area,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 17, No. 6, 1972, pp. 763–772.
- [8] Laumond, J.-P., ed., *Robot Motion Planning and Control*, Springer-Verlag, Berlin; Heidelberg, 1998, doi:10.1007/BFb0036069.
- [9] Hernandez, J. D., Moll, M., Vidal, E., Carreras, M., and Kavraki, L. E., “Planning Feasible and Safe Paths Online for Autonomous Underwater Vehicles in Unknown Environments,” in “2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots

- and Systems (IROS),” Daejeon, Korea (South), 2016, pp. 1313–1320, doi:10.1109/IROS.2016.7759217.
- [10] LaValle, S. M., *Planning Algorithms*, Cambridge University Press, 2006.
- [11] Giordano, P. R. and Vendittelli, M., “Shortest Paths to Obstacles for a Polygonal Dubins Car,” *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 25, No. 5, 2009, pp. 1184–1191, doi:10.1109/TRO.2008.2011421.
- [12] Manyam, S., Rathinam, S., Casbeer, D., and Garcia, E., “Shortest Paths of Bounded Curvature for the Dubins Interval Problem,” arXiv:1507.06980v2, 2015.
- [13] Manyam, S. G., Casbeer, D. W., Moll, A. L., and Fuchs, Z., “Shortest Dubins Path to a Circle,” in “AIAA SciTech 2019 Forum,” San Diego, California, 2019, pp. 1–7, doi:10.2514/6.2019-0919.
- [14] Chen, Z., “On Dubins Paths to a Circle,” *Automatica*, Vol. 117, doi:10.1016/j.automatica.2020.108996.
- [15] Zheng, Y., Chen, Z., Shao, X., and Zhao, W., “Time-Optimal Guidance for Intercepting Moving Targets with Impact-Angle Constraints,” *Chinese Journal of Aeronautics*, doi:https://doi.org/10.1016/j.cja.2021.08.002.
- [16] Koval, A. and Isler, V., “Turning a Corner with a Dubins Car,” in “2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA),” Montreal, QC, Canada, 2019, pp. 8570–8576, doi:10.1109/ICRA.2019.8794361.
- [17] Lee, J. H., Cheong, O., Kwon, W. C., Shin, S. Y., and Chwa, K. Y., “Approximation of Curvature-Constrained Shortest Paths through a Sequence of Points,” in Paterson, M. S., ed., “Algorithms - ESA 2000,” Springer, Berlin, Heidelberg, 2000, pp. 314–325, doi:10.1007/3-540-45253-2_29.
- [18] Berdyshev, Y. I., “On the Problem of Sequential Traversal of a Set of Smooth Manifolds by a Nonlinear Controlled Object,” *Differential Equations*, Vol. 38, No. 11, 2002, pp. 1541–1552, doi:10.1023/A:1023676619449.
- [19] Chen, Z. and Shima, T., “Shortest Dubins Paths through Three Points,” *Automatica*, Vol. 105, 2019, pp. 368–375.
- [20] Berdyshev, Y. I., “Optimal Control in a Nonlinear Sequential Rendezvous Problem,” *Journal of Computer and Systems Sciences International*, Vol. 58, No. 1, 2019, pp. 95–104.
- [21] Chen, Z., Wang, K., and Lu, Y., “Elongation of Curvature-Bounded Path,” arXiv:2109.02125v1, 2021.
- [22] Mitchell, I. M., Bayen, A. M., and Tomlin, C. J., “A Time-Dependent Hamilton-Jacobi Formulation of Reachable Sets for Continuous Dynamic Games,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, No. 7, 2005, pp. 947–957, doi:10.1109/TAC.2005.851439.

- [23] Meyer, Y., Isaiah, P., and Shima, T., “On Dubins Paths to Intercept a Moving Target,” *Automatica*, Vol. 53, 2015, pp. 256–263, doi:10.1016/j.automatica.2014.12.039.
- [24] Buzikov, M. E. and Galyaev, A. A., “Time-Optimal Interception of a Moving Target by a Dubins Car,” *Automation and Remote Control*, Vol. 82, No. 5, 2021, pp. 745–758, doi:10.1134/S0005117921050015.
- [25] Isaacs, R., *Differential Games*, John Wiley and Sons, New York, 1965.
- [26] Merz, A. W., *The Homicidal Chauffeur – a Differential Game*, Ph.D. thesis, Stanford University, 1971.
- [27] Coates, S., Pachter, M., and Murphey, R., “Optimal Control of a Dubins Car with a Capture Set and the Homicidal Chauffeur Differential Game,” *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 50, No. 1, 2017, pp. 5091–5096, doi:10.1016/j.ifacol.2017.08.775.
- [28] Cacace, S., Lai, A. C., and Loreti, P., “Modeling and Optimal Control of an Octopus Tentacle,” *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 58, No. 1, 2020, pp. 59–84, doi:10.1137/19M1238939.
- [29] Bakolas, E. and Tsiotras, P., “Optimal Synthesis of the Asymmetric Sinistral/Dextral Markov-Dubins Problem,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 150, No. 2, 2011, pp. 233–250.
- [30] Berdyshev, Y. I., “Time-Optimal Control Synthesis for a Fourth-Order Nonlinear System,” *J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 39, No. 6, 1975, pp. 948–956.
- [31] Owen, M., Beard, R. W., and McLain, T. W., “Implementing Dubins Airplane Paths on Fixed-Wing UAVs,” in “Handbook of Unmanned Aerial Vehicles,” Springer, pp. 1677–1701, 2015.
- [32] Rubies-Royo, V., Fridovich-Keil, D., Herbert, S., and Tomlin, C. J., “A Classification-based Approach for Approximate Reachability,” in “2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA),” , 2019, pp. 7697–7704, doi:10.1109/ICRA.2019.8793919.
- [33] Matveev, A. S., Magerkin, V. V., and Savkin, A. V., “A Method of Reactive Control for 3D Navigation of a Nonholonomic Robot in Tunnel-Like Environments,” *Automatica*, Vol. 114, 2020, p. 108831, doi:10.1016/j.automatica.2020.108831.
- [34] Sultan, M. M., Biediger, D., Li, B., and Becker, A. T., “The Reachable Set of a Drone: Exploring the Position Isochrones for a Quadcopter,” in “2021 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA),” Xi’an, China, 2021, pp. 7679–7685, doi:10.1109/ICRA48506.2021.9561715.
- [35] Botkin, N. D., Hoffmann, K.-H., and Turova, V. L., “Stable Numerical Schemes for Solving Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs Equations,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 33, No. 2, 2011, pp. 992–1007, doi:10.1137/100801068.
- [36] Takei, R. and R.Tsai, “Optimal Trajectories of Curvature Constrained Motion in the Hamilton–Jacobi Formulation,” *Journal of Scientific Computing*, Vol. 54, 2013, pp. 622–644.

- [37] Munts, N. V., “Numerical Study of Different Variants of Dubins’ Car Model,” in “Proceedings of the 60th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences,” Tel-Aviv & Haifa, Israel, 2020, pp. 1006–1022.
- [38] Zimovets, A. A., Matviichuk, A. R., Ushakov, A. V., and Ushakov, V. N., “Stability Property in the Convergence Game Problem in the Presence of Phase Constraints,” *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, Vol. 60, No. 4, 2021, pp. 530–548, doi: 10.1134/S1064230721040110.
- [39] Cockayne, E. J. and Hall, G. W. C., “Plane Motion of a Particle Subject to Curvature Constraints,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 13, No. 1, 1975, pp. 197–220.
- [40] Patsko, V. S., Pyatko, S. G., and Fedotov, A. A., “Three-Dimensional Reachability Set for a Nonlinear Control System,” *Journal of Computer and Systems Sciences International*, Vol. 42, No. 3, 2003, pp. 320–328.
- [41] Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., and Mischenko, E. F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience, New York, 1962.
- [42] Lee, E. B. and Markus, L., *Foundations of Optimal Control Theory*, Wiley and Sons, New York, 1967.
- [43] Patsko, V. S. and Fedotov, A. A., “Three-Dimensional Reachable Set at Instant for the Dubins Car: Properties of Extremal Motions,” in “Proceedings of the 60th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences,” Tel-Aviv & Haifa, 2020, pp. 1033–1049.
- [44] Patsko, V. S. and Fedotov, A. A., “Analytic Description of a Reachable Set for the Dubins Car,” *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, Vol. 26, No. 1, 2020, pp. 182–197, doi:10.21538/0134-4889-2020-26-1-182-197. (in Russian).
- [45] Savelov, A., *Planar curves*, Fizmatlit, Moscow, 1960. (in Russian).
- [46] Spiegel, M., *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, Schaum’s outline series, McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [47] Kurnosenko, A. I., “An Inversion Invariant of a Pair of Circles,” *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 110, No. 4, 2002, pp. 2848–2860, doi:10.1023/A:1015310614585.
- [48] Filippov, A. F., “An Elementary Proof of Jordan’s Theorem,” *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol. 5, No. 5, 1950, pp. 173–176. (in Russian).
- [49] Cairns, S. S., “An Elementary Proof of the Jordan-Schoenflies Theorem,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 2, No. 6, 1951, pp. 860–867.
- [50] Filippov, A. F., “On Certain Questions in the Theory of Optimal Control,” *J. SIAM Control; Ser. A*, Vol. 1, No. 1, 1962, pp. 76–84, doi:10.1137/0301006.