

11-я РОССИЙСКАЯ МУЛЬТИКОНФЕРЕНЦИЯ ПО ПРОБЛЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ ПРЕЗИДИУМА МУЛЬТИКОНФЕРЕНЦИИ
АКАДЕМИК РАН В. Г. ПЕШЕХОНОВ



2–4 октября 2018 г.
ГНЦ РФ АО «КОНЦЕРН «ЦНИИ «ЭЛЕКТРОПРИБОР»
Санкт-Петербург

ПРИ ПОДДЕРЖКЕ:

- РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ (РФФИ)
- ОТДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГЕТИКИ, МАШИНОСТРОЕНИЯ, МЕХАНИКИ И ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ РАН
- ОТДЕЛЕНИЯ НАНОТЕХНОЛОГИЙ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ РАН
- МЕЖДУНАРОДНОЙ ОБЩЕСТВЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ
«АКАДЕМИЯ НАВИГАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ»
- НАУЧНОГО СОВЕТА РАН ПО ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ И АВТОМАТИЗАЦИИ
- ОБЪЕДИНЕННОГО НАУЧНОГО СОВЕТА ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПРОБЛЕМЕ «ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
И АВТОМАТИЗАЦИЯ» РАН
- САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ ТЕРРИТОРИАЛЬНОЙ ГРУППЫ РОССИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО КОМИТЕТА
ПО АВТОМАТИЧЕСКОМУ УПРАВЛЕНИЮ
- ЖУРНАЛА «ГИРОСКОПИЯ И НАВИГАЦИЯ»

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В УПРАВЛЕНИИ» (ИТУ-2018)

Санкт-Петербург
2018

Материалы конференции «Информационные технологии в управлении» (ИТУ-2018).
СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2018. 742 с.

В настоящем сборнике представлены доклады, отобранные на основе результатов рецензирования Программным комитетом конференции «Информационные технологии в управлении» (ИТУ-2018) и включенные в программу конференции.

Тексты докладов публикуются в авторской редакции.

ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ:

- ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РФ АО «КОНЦЕРН «ЦНИИ «ЭЛЕКТРОПРИБОР»
- ФГБУН «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ РАН»
- ФГАОУ ВО «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ»
- ФГАОУ ВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
- НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ИМ. АКАДЕМИКА А.В. КАЛЯЕВА ЮЖНОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
- АО «РКЦ «ПРОГРЕСС»
- ПАО «РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ КОРПОРАЦИЯ «ЭНЕРГИЯ» ИМЕНИ С.П. КОРОЛЁВА»
- ФГБУН «ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОВЕДЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»
- ФГУП «ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ АВИАЦИОННЫХ СИСТЕМ»
- ФГБУН «ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В. А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН»
- ГНЦ ФГУП «ЦЕНТРАЛЬНЫЙ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ ПРОФЕССОРА Н.Е. ЖУКОВСКОГО»
- ФГАОУ ВО «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»
- ФГАОУ ВО «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»
- ФГБВОУ ВО «ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ А.Ф. МОЖАЙСКОГО»
- ФГАОУ ВО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Э. БАУМАНА (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
- ВУНЦ ВМФ «ВОЕННО-МОРСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМ. АДМИРАЛА ФЛОТА СОВЕТСКОГО СОЮЗА Н.Г. КУЗНЕЦОВА»
- ФГУП «КРЫЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР»
- ФГБУН «ИНСТИТУТ ОКЕАНОЛОГИИ ИМ. П.П. ШИРШОВА РАН», САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ФИЛИАЛ
- ЗАО «МОРСКИЕ НЕАКУСТИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ И СИСТЕМЫ»

МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ МАШИНЫ ДУБИНСА

В. С. ПАЦКО³, А. А. ФЕДОТОВ⁴

(Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, 620990, ул. С.Ковалевской, 16,
e-mail: patsko@imm.uran.ru)

Аннотация

Представлено описание множества достижимости в момент для одной из самых популярных в задачах математической теории управления и в прикладных работах моделей управляемого движения на плоскости. Динамика движения задается с постоянной по величине линейной скоростью и оговоренным диапазоном возможных значений угловой скорости посредством нелинейной системы дифференциальных уравнений третьего порядка. Скалярное управление определяет текущую угловую скорость вращения вектора линейной скорости или, что эквивалентно, мгновенный радиус поворота. Допустимые значения управляющего параметра принадлежат замкнутому отрезку. Рассмотрены различные варианты расположения данного отрезка относительно нуля, включая случай одностороннего поворота (поворот возможен только в одну сторону). При классификации управлений, ведущих на границу множества достижимости, используется принцип максимума Понтрягина. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: машина Дубинса, кусочно-постоянные управления, принцип максимума Понтрягина, трехмерное множество достижимости

Введение

В прикладных работах, опирающихся на математическую теорию управления, очень популярной является модель управляемого объекта, называемая “машина Дубинса”. Такая модель задается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка. Две фазовые переменные характеризуют геометрическое положение управляемого объекта на плоскости, третья переменная – угол направления вектора скорости. Величина скорости считается постоянной. Скалярное управляющее воздействие, стесненное геометрическим ограничением, определяет мгновенный радиус разворота.

Машина Дубинса – это управляемый объект (автомобиль или самолет) с простейшей моделью движения в горизонтальной плоскости. В 1957 г. американский математик Л. Дубинс опубликовал теоретическую работу [1] о линии кратчайшей длины с ограниченным радиусом кривизны, соединяющей две точки на плоскости с заданным направлением выхода из первой точки и заданным направлением входа во вторую. Полученные Л. Дубинсом результаты оказались очень полезными при исследовании объектов с ограниченным радиусом разворота и постоянной по величине скоростью передвижения. Именно поэтому такие объекты (особенно в работах по теоретической робототехнике, см., например, [2]) стали называть машиной Дубинса. В дальнейшем оказалось, что близкие вопросы в 1889 г. изучал А.А. Марков в работе [3], посвященной проблемам прокладки железных дорог. Динамика простейшего автомобиля использовалась Р. Айзексом в работах по дифференциальным играм [4, 5]. Модель Дубинса применяется при управлении колесными роботами, для диспетчерских расчетов в гражданской авиации, а также в прикладных работах по построению траекторий движения беспилотных летательных аппаратов в горизонтальной плоскости.

Под множеством достижимости $G(t_f)$ в фиксированный момент времени t_f понимаем совокупность всех состояний в трехмерном фазовом пространстве, в каждое из которых возможен перевод системы в момент t_f из заданного начального фазового состояния при помощи некоторого допустимого управления.

³ Кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник.

⁴ Кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник.

Традиционно при описании динамики машины Дубинса задаются ограничения снизу на радиусы разворота влево и вправо. Случай с одинаковыми ограничениями на радиус разворота влево и вправо будем называть симметричным, иначе – несимметричным. Несимметричный случай возникает, например, при несбалансированности минимальных радиусов разворота влево и вправо. Множество достижимости в момент для симметричного и несимметричного случаев исследовалось ранее в работах [6–8]. Вообще говоря, задание ограничения на управление в виде отрезка может означать запрет на повороты влево или вправо, а также запрет на движение по прямой (если этот отрезок не содержит нулевую точку).

Предлагаемый доклад посвящен исследованию границы множества достижимости в момент для машины Дубинса в общем случае. Приведены примеры с результатами численных построений трехмерных множеств достижимости.

При исследовании границы множества достижимости в момент мы используем принцип максимума Понтрягина [9] для управлений, ведущих на границу множества достижимости [10]. Вся граница состоит из нескольких участков. Каждый участок характеризуется своим набором управлений, полностью определяемым двумя первыми переключениями, и, таким образом, является двухпараметрическим многообразием.

Из анализа структуры множества достижимости в момент вытекают некоторые полезные факты для задачи быстрогодействия (например, оценка числа переключений и характер переключений оптимального управления). Но в целом исследование границы множества достижимости в момент и решение задачи быстрогодействия (в частности, построение оптимального синтеза в задаче быстрогодействия) – это разные задачи. Для машины Дубинса известен синтез оптимального управления в задаче быстрогодействия для симметричного [11] и несимметричного [12] случаев.

Следует различать множества достижимости в момент и к моменту. Во втором случае момент перевода не является зафиксированным, а рассматривается на промежутке $[t_0, t_f]$. Для симметричного и несимметричного случаев построение множества достижимости к моменту рассматривалось в работе [7].

Постановка задачи

Пусть движение управляемого объекта (машина Дубинса) на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [u_1, u_2], \quad u_1 < u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y – координаты геометрического положения, φ – угол наклона вектора скорости (рис. 1), u – управление, стесненное геометрическим ограничением. Величина линейной скорости равна 1. Далее будем считать, что $u_2 = 1$.

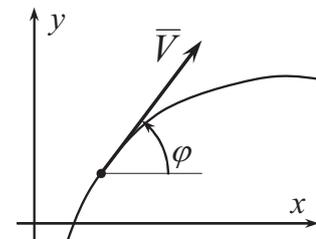


Рис.1 Система координат

К виду (1) с $u_2 = 1$ путем нормировки геометрических координат и времени можно привести произвольную трехмерную систему, задающую движение с постоянной линейной скоростью и с управлением, которое определяет мгновенный радиус разворота. Положим в начальный момент времени $t_0 = 0$ начальное фазовое положение системы (1) равным $x_0 = 0, y_0 = 0, \varphi_0 = 0$. Допустимыми программными управлениями $u(\cdot)$ считаем измеримые функции времени со значениями в отрезке $[u_1, u_2]$. Угол φ рассматриваем на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Множество достижимости $G(t_f)$ в момент времени $t_f \geq t_0$ есть совокупность всех точек (x, y, φ) трехмерного фазового пространства, в каждую из которых возможен перевод системы (1) в момент t_f из начального положения (x_0, y_0, φ_0) при помощи некоторого допустимого управления на промежутке $[t_0, t_f]$.

В работе рассматривается построение множеств $G(t_f)$ для случаев $u_1 < 0$, $u_1 = 0$ и $u_1 > 0$.

Принцип максимума Понтрягина

Известно [10], что управления, которые ведут на границу множества достижимости, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина (ПМП). Запишем соотношения принципа максимума для системы (1).

Пусть $u^*(\cdot)$ – некоторое допустимое управление, а $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), x^*(\cdot))^T$ – соответствующее движение системы (1) на промежутке $[t_0, t_f]$. Дифференциальные уравнения сопряженной системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= 0, \\ \dot{\psi}_3 &= \psi_1 \sin \varphi^*(t) - \psi_2 \cos \varphi^*(t). \end{aligned} \tag{2}$$

ПМП означает, что существует ненулевое решение $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))^T$ системы (2), для которого почти всюду (п.в.) на промежутке $[t_0, t_f]$ выполнено условие

$$\psi_1^*(t) \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t) \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t) u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} (\psi_1^*(t) \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t) \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t) u).$$

Таким образом, условие максимума принимает вид

$$(\text{п.в.}) \quad \psi_3^*(t) u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} (\psi_3^*(t) u), \quad t \in [t_0, t_f]. \tag{3}$$

Отметим, что функции $\psi_1^*(\cdot)$ и $\psi_2^*(\cdot)$ есть константы. Обозначим их ψ_1^* и ψ_2^* . Если $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$, то $\psi_3^*(\cdot) = \text{const} \neq 0$ на промежутке $[t_0, t_f]$. Следовательно, в этом случае либо п.в. $u^*(t) = u_1$, либо п.в. $u^*(t) = u_2$.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел ψ_1^* , ψ_2^* не равно нулю. Опираясь на (1) и (2), можно записать следующее выражение для $\psi_3^*(t)$:

$$\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C.$$

Отсюда следует, что $\psi_3^*(t) = 0$ тогда и только тогда, когда точка $(x^*(t), y^*(t))^T$ геометрического положения в момент t удовлетворяет уравнению прямой

$$\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0. \tag{4}$$

Прямая (4) использовалась во многих работах, где для системы (1) анализировался принцип максимума.

В силу соотношения (3) имеем следующее. Если $\psi_3^*(t) > 0$ на некотором промежутке времени, то $u^*(t) = u_2$ п.в. на этом промежутке. Соответствующее движение в проекции на плоскость x, y идет в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C > 0$ по дуге окружности радиуса $1/u_2$ против часовой стрелки. Если $\psi_3^*(t) < 0$, то п.в. $u^*(t) = u_1$. Здесь движение идет в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C < 0$ по дуге окружности радиуса $1/u_1$ по часовой стрелке для $u_1 < 0$, по прямой для $u_1 = 0$ и по дуге окружности радиуса $1/u_1$ против часовой стрелки для $u_1 > 0$.

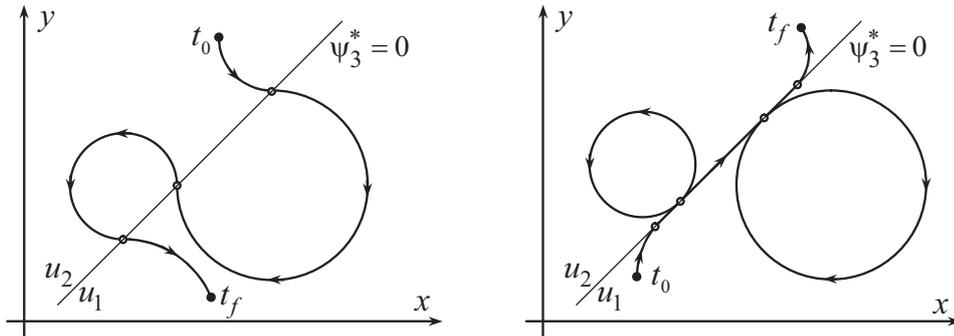
Условимся называть циклом участок движения длительностью 2π , на котором п.в. $u^*(t) = u_2$ или п.в. $u^*(t) = u_1 \neq 0$. Траектория движения на таком участке в проекции на плоскость x, y представляет собой окружность.

Если $\psi_3^*(t) = 0$ п.в. на некотором промежутке времени, то на этом промежутке движение $(x^*(t), y^*(t))^T$ идет по прямой (4). Стало быть, $\dot{\varphi}^*(t) = \text{const}$. Поэтому $u^*(t) = 0$ п.в. на этом промежутке. Данный случай невозможен при $u_1 > 0$.

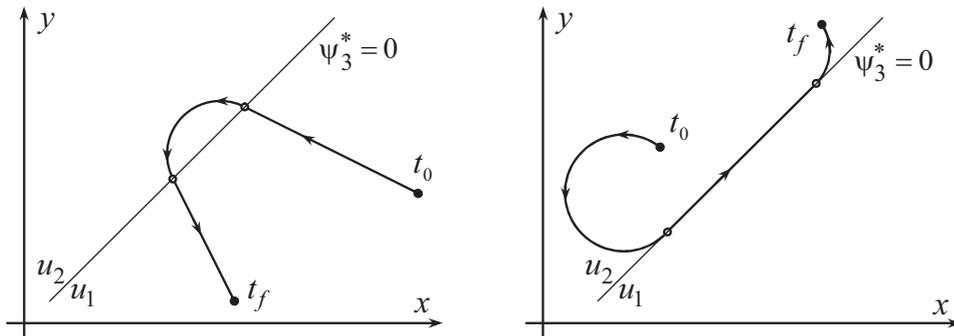
Очевидно, что управления, ведущие на границу множества достижимости и, соответственно, удовлетворяющие ПМП, могут изменять свое значение только на прямой (4), которую будем называть прямой переключения.

Рассмотрев варианты возможного взаимного расположения траектории движения $(x^*(t), y^*(t))^T$ и прямой переключения (рис. 2), сформулируем следующее утверждение.

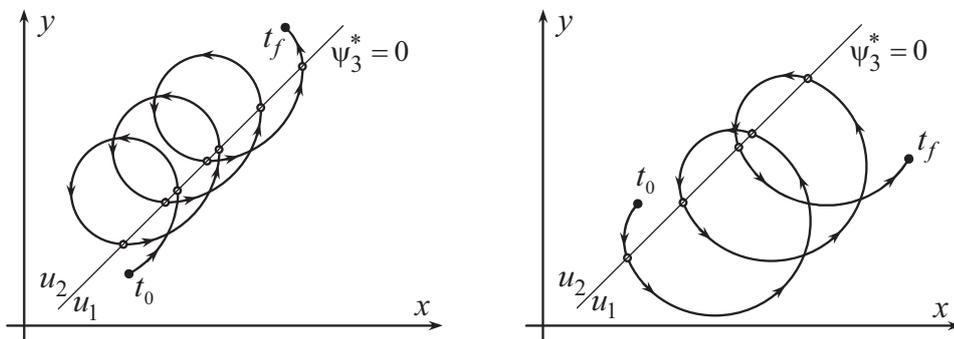
Утверждение 1. Пусть движение системы (1) удовлетворяет ПМП. Тогда соответствующая траектория состоит из конечного числа дуг окружностей и прямолинейных участков. Последнее возможно лишь при $0 \in [u_1, u_2]$.



а) Траектории $(x^*(t), y^*(t))^T$ для случая $u_1 < 0$ (пример с $u_1 = -0.5$)



б) Траектории $(x^*(t), y^*(t))^T$ для случая $u_1 = 0$



в) Траектории $(x^*(t), y^*(t))^T$ для случая $u_1 > 0$ (пример с $u_1 = +0.5$)

Рис.2. Траектории принципа максимума и прямая переключения

Если условие (3) выполнено, то в силу Утверждения 1 функция $\psi_3^*(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_f]$ может изменять свой знак только конечное число раз. Поэтому, мы можем считать управление

$u^*(\cdot)$ (ведущее движение на границу множества достижимости $G(t_f)$) кусочно-постоянным с конечным числом переключений на $[t_0, t_f]$. Для определенности условимся считать такое управление кусочно-непрерывным справа и момент t_f не будем включать в совокупность моментов переключения.

Случай $u_1 < 0$

В работах [6–8] симметричный (с ограничениями $u_1 = -1$, $u_2 = +1$) и несимметричный ($u_1 < 0$, $u_2 = +1$) случаи были исследованы. Были доказаны теоремы о количестве и характере переключений управлений, ведущих на границу множества достижимости. А именно, было показано, что в любую точку границы множества достижимости $G(t_f)$ можно попасть при помощи управления, имеющего не более двух переключений. При этом можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений:

$$\begin{aligned} & 1) u_2, 0, u_2; \quad 2) u_1, 0, u_2; \quad 3) u_2, 0, u_1; \\ & 4) u_1, 0, u_1; \quad 5) u_2, u_1, u_2; \quad 6) u_1, u_2, u_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Для построения границы множества $G(t_f)$ перебираем все управления вида 1 – 6 из списка (5) с двумя моментами переключения t_1, t_2 . Параметр t_1 выбирается из промежутка $[0, t_f]$, а параметр t_2 – из промежутка $[t_1, t_f]$. Управления с одним переключением и без переключений при этом также охватываются. Взяв конкретный вариант переключений и перебирая для него параметры t_1, t_2 на некоторой достаточно мелкой сетке, получаем набор точек, образующих поверхность в трехмерном пространстве x, y, φ . Каждому из шести вариантов в списке (5) соответствует своя поверхность в трехмерном пространстве. Граница множества достижимости $G(t_f)$ составляется из кусков этих поверхностей.

Рис. 3 показывает с двух ракурсов границу множества $G(t_f)$ для момента $t_f = 2.5\pi$. Различные участки границы выделены своим цветом. С шагом $(15/\pi)^\circ$ по оси φ изображены сечения множества достижимости плоскостями $\varphi = \text{const}$.

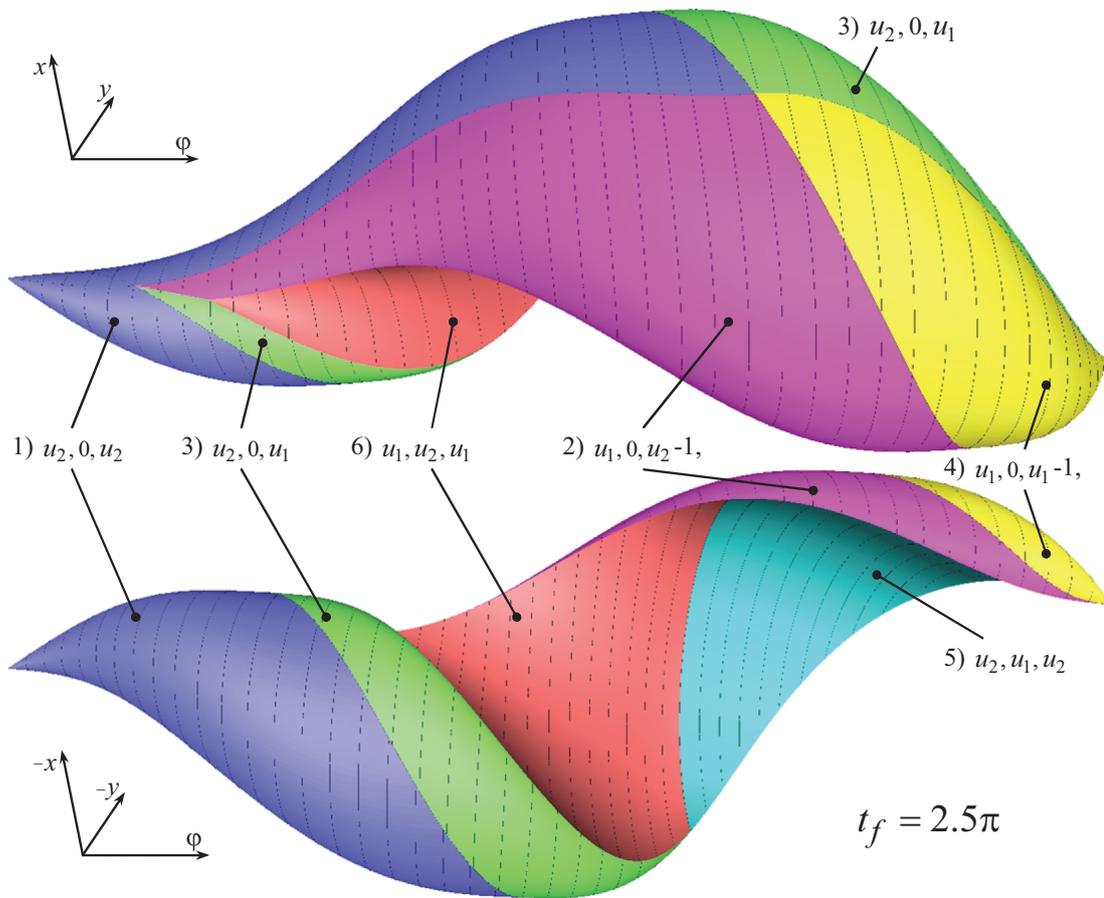


Рис.3. Множество достижимости $G(t_f)$ для момента $t_f = 2.5\pi$ при $u_1 = -0.5, u_2 = 1$

Управление тождественно равно нулю ведет в точку стыковки участков 1 – 4. В точки линий, лежащих на стыке участков 1 – 2, 1 – 3, 2 – 4, 2 – 5, 2 – 6, 3 – 4, 3 – 5 и 3 – 6 ведет управление с одним переключением. В любую точку линии, являющейся общей для участков 5 и 6, идут два движения, каждое с двумя переключениями. На этой линии участки 5, 6 имеют негладкую стыковку.

На рис. 4 изображены в одном ракурсе множества достижимости $G(t_f)$ для четырех моментов времени t_f . Четко прослеживается изменение структуры границы множества достижимости. С увеличением времени передняя часть границы, составленная из участков 1 – 4, «затягивает» тыльную часть, составленную из участков 5, 6.

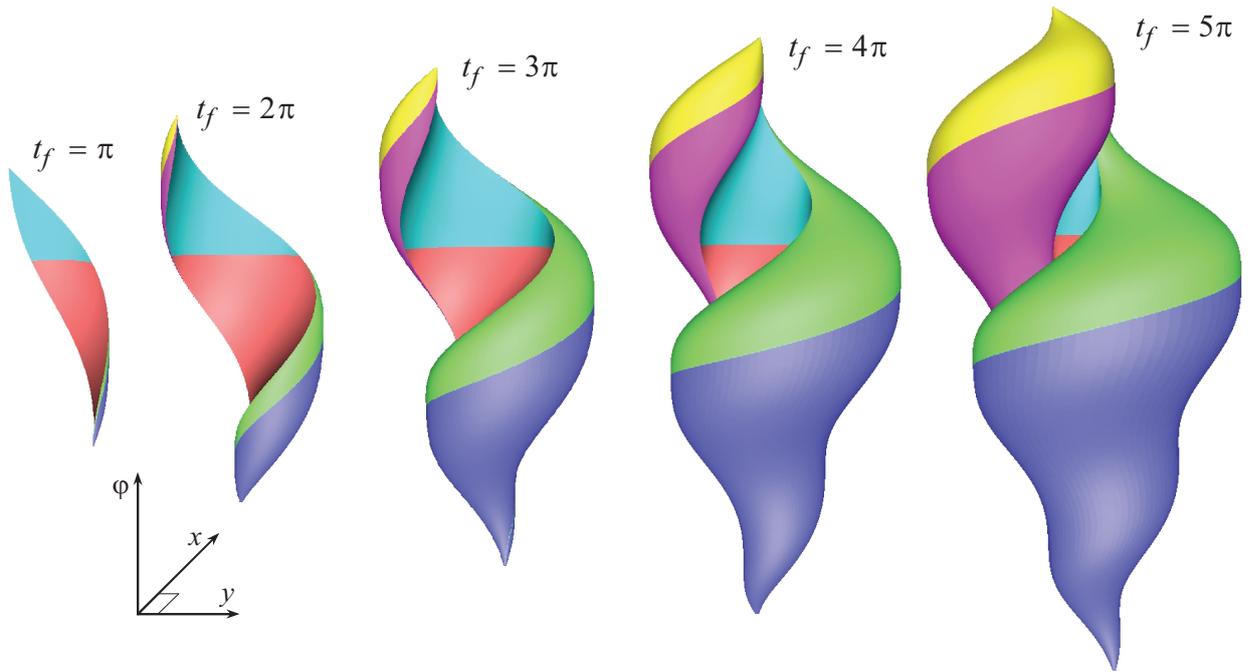


Рис.4. Развитие во времени множеств достижимости $G(t_f)$ для $u_1 = -0.5, u_2 = 1$

Случай $u_1 = 0$

В этом случае, управления, ведущие на границу множества достижимости, принимают крайние значения $u_1 = 0, u_2 = 1$. Главная особенность в том, что прямолинейные участки могут появиться в двух ситуациях:

1) Когда соответствующий участок лежит в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C < 0$, где $\psi_3^*(t) < 0$. В этом случае максимум в соотношении (3) реализуется при $u(t) = 0$.

2) Когда система движется по линии переключения $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0$.

Если для движения, которое приводит на границу множества $G(t_f)$, выполнено $\psi_3^*(t_0) < 0$ для начального момента $t_0 = 0$, тогда либо движение является прямолинейным (в направлении начального вектора скорости) на всем промежутке $[t_0, t_f]$, либо оно достигает прямую переключения с некоторым ненулевым углом в некоторый момент и дальше идет по дуге окружности в полуплоскости $\psi_3^*(t) > 0$. Если до момента t_f траектория снова достигает прямую переключения, то вход происходит под тем же самым углом и траектория переходит в полуплоскость $\psi_3^*(t) < 0$ и далее является прямолинейной. Поэтому в случае $\psi_3^*(t_0) < 0$ траектория имеет не более двух переключений.

Пусть $\psi_3^*(t_0) > 0$. Тогда на начальном промежутке времени движение идет по дуге окружности. Когда оно достигает прямую переключения с некоторым ненулевым углом, то происходит переход в полуплоскость $\psi_3^*(t) < 0$, где движение продолжается как прямолинейное. Если первое попадание на прямую переключения происходит по касательной, то в дальнейшем движение идет либо по дуге окружности, либо по линии переключения с возможным переходом в полуплоскость $\psi_3^*(t) > 0$. Если момент t_f является достаточно большим, тогда возможны циклы, которые были отмечены в разделе, посвященном принципу максимума. Такие циклы могут быть перенесены в начальную или, наоборот, в конечную часть движения. С учетом этого можно считать, в любую точку на границе множества достижимости можно попасть при помощи не более двух переключений.

Аналогично анализируется случай $\psi_3^*(t_0) = 0$.

Таким образом, справедливо

Утверждение 2. Пусть $u_1 = 0$. Тогда в любую точку на границе множества достижимости $G(t_f)$ ведет движение не более чем с двумя переключениями. При этом возможны только два варианта последовательности управлений: u_1, u_2, u_1 ; u_2, u_1, u_2 . Для первого варианта продолжительность второй части траектории (где $u(t) = u_2 = 1$) меньше, чем 2π .

В этом утверждении варианты только с одним переключением и без переключений также рассматриваются. Для этого длины одного или двух интервалов полагаются равными нулю.

В силу указанного свойства (по аналогии с построениями для случая $u_1 < 0$), граница множества достижимости $G(t_f)$ может быть построена при помощи двух поверхностей, соответствующих двум вариантам управления, описанным выше. На рис. 6 показаны примеры множества $G(t_f)$ для моментов $t_f = 4\pi, 6\pi$.

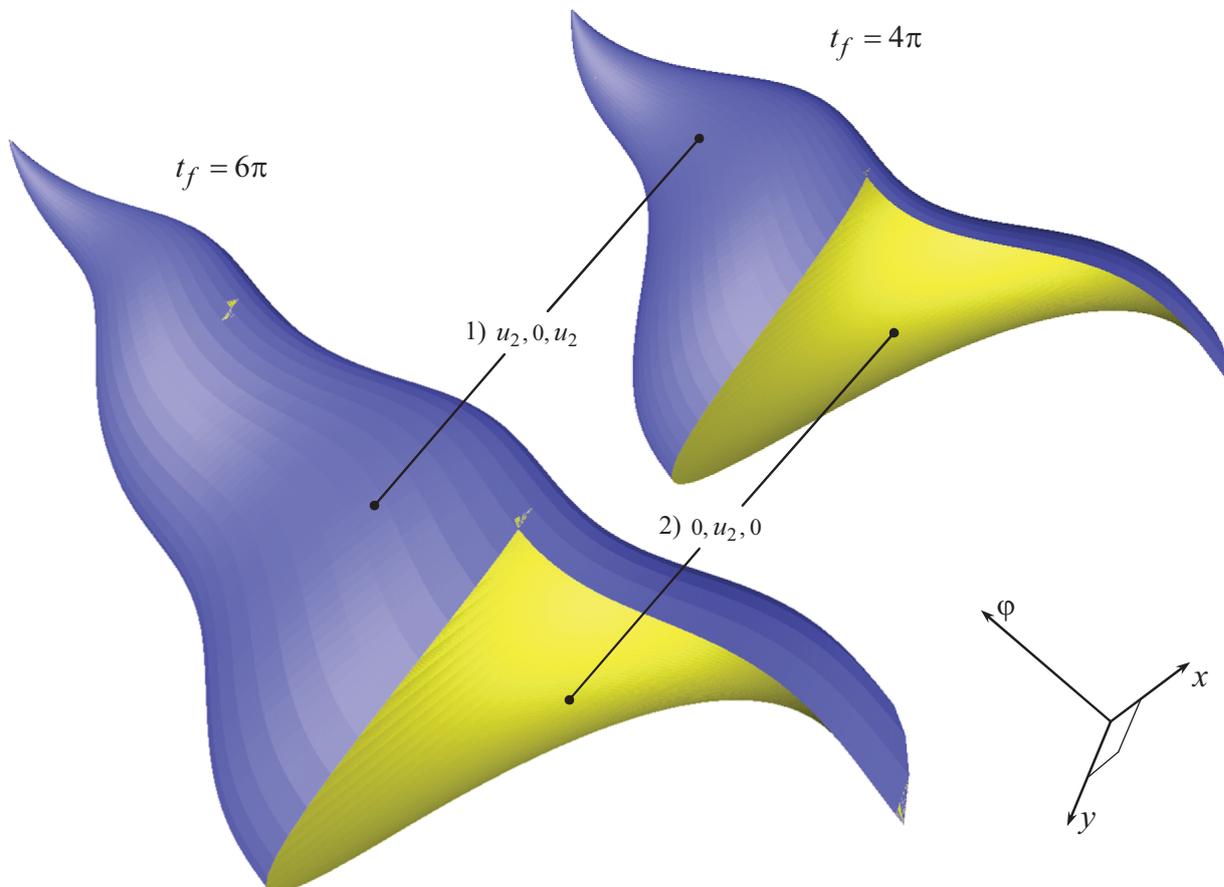


Рис.6. Множество достижимости $G(t_f)$ при $u_1 = 0$ для моментов $t_f = 4\pi, 6\pi$

В работе [14] установлено, что сечения множества $G(t_f)$ по угловой координате $\varphi = \text{const}$ в случае $u_1 = 0$ являются выпуклыми и имеют форму круга или кругового сегмента.

Случай $u_1 > 0$

В последнее время появляются работы (см., например, [13]), посвященные прикладным задачам, в которых возникает ситуация одностороннего поворота с исключением движения по прямой. В этом случае управления, ведущие на границу множества достижимости, представляют собой набор дуг окружностей радиусом $1/u_1$ и $1/u_2$. Число переключений

является конечным [14], но растет с ростом момента t_f , на который строится множество достижимости.

Рассмотрим два соседних участка движения, удовлетворяющего принципу максимума, каждый из которых не является крайним на промежутке $[t_0, t_f]$. Суммарное изменение угла φ на объединении (склейке) двух таких участков равно 2π . Время прохождения указанной склейки на каждом движении является постоянным и находится в интервале $[2\pi/u_2, 2\pi/u_1]$.

При численном построении множества достижимости задается некоторое разбиение интервала возможных значений угла φ при заданном значении момента t_f . При фиксированном значении φ для построения соответствующего сечения множества $G(t_f)$ используются четыре типа управлений: 1) u_2, \dots, u_1 ; 2) u_1, \dots, u_2 ; 3) u_2, \dots, u_1, u_2 ; 4) u_1, \dots, u_2, u_1 . Многоточие означает последовательность чередующихся управлений u_1 и u_2 . Для случая 1 (соответственно, 2) повторяющиеся управления имеют вид набора пар управлений u_1, u_2 (u_2, u_1). Продолжительность действия каждой пары одна и та же для конкретного движения и находится в интервале $[2\pi/u_2, 2\pi/u_1]$. Количество таких пар может быть различным при $t_f > 2\pi$. Для случая 3 (соответственно, 4) повторяющиеся управления представляют собой пары u_1, u_2 (u_2, u_1) с дополнительным участком u_1 (u_2) перед последним участком, где действует управление u_2 (u_1). Длительности указанных участков определяются соотношениями, вытекающими из детального и нетривиального анализа ПМП.

На рис. 7 показан пример расчета границы множества достижимости с раскраской четырьмя цветами, соответствующими четырем указанным типам управлений. Отметим, что отдельные φ – сечения (за исключением крайних) множества $G(t_f)$ формируются управлениями от двух до четырех типов.

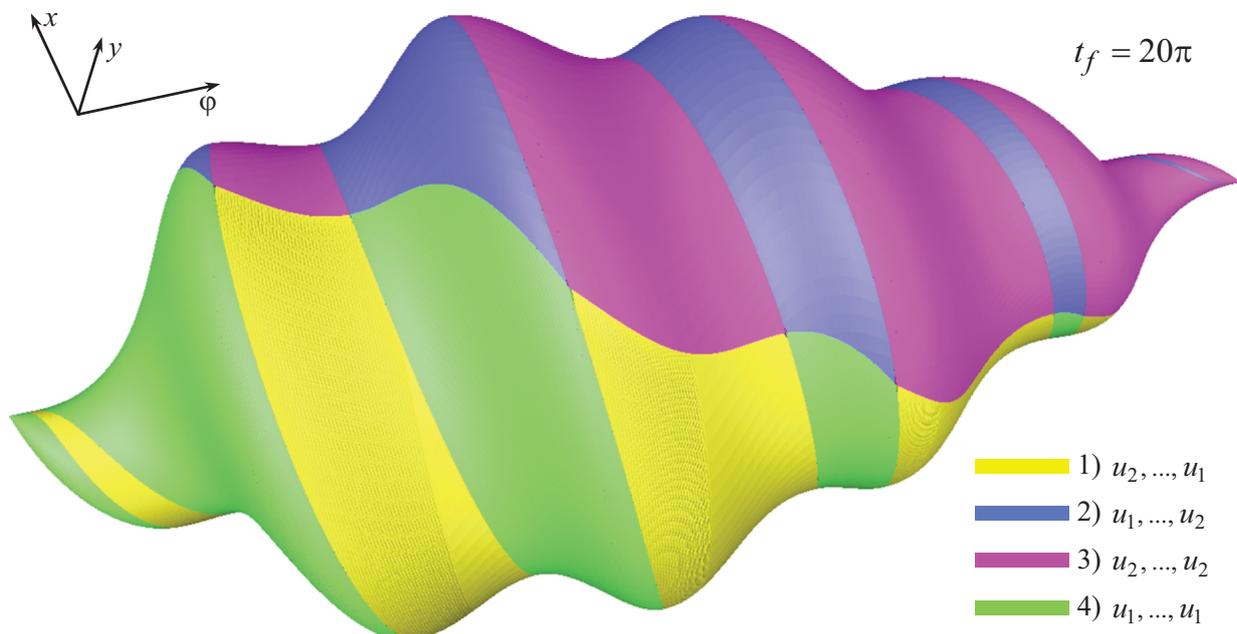


Рис.7. Множество достижимости $G(t_f)$ при $u_1 = 0.5, u_2 = 1$ для момента $t_f = 20\pi$.

В процессе численных построений множества достижимости была выявлена выпуклость его φ – сечений. Краткое доказательство такого факта приведено в работе [15].

Замечание. Как было отмечено в постановке задачи, мы считаем возможные изменения угла φ в промежутке $(-\infty, +\infty)$. В инженерной практике обычно угол φ рассматривается в промежутке размером 2π . Соответствующее множество достижимости легко строится на

основе рассмотренного в работе подхода путем «нарезки» по угловой координате полученного множества достижимости на участки длиной 2π . Некоторые примеры приведены в работе [7].

Заключение

Решена задача построения множеств достижимости в момент для управляемого объекта «машина Дубинса» при задании ограничений на управление общего вида, включая случай одностороннего поворота. Представлены результаты численного моделирования. Дальнейшие исследования будут посвящены детальному описанию сечений множества достижимости по угловой координате.

Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 18-01-00410

ЛИТЕРАТУРА

1. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // American Journal of Mathematics. 1957. Vol. 79, No. 3. P. 497–516.
2. Laumond J.-P. (ed.) Robot Motion Planning and Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 229 / Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998. 354 p.
3. Марков А.А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщ. Харьков. матем. общ. 1889. 2-я сер., том 1, выпуск 2. С. 250–276.
4. Isaacs R. Games of pursuit / Scientific report of the RAND Corporation, Santa Monica, 1951.
5. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
6. Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТИСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
7. Fedotov A., Patsko V., Turova V. Reachable sets for simple models of car motion / Recent Advances in Mobile Robotics, edited by Andon Venelinov Topalov, Rijeka, Croatia: InTech, 2011. P. 147–172. URL: http://home.imm.uran.ru/kumkov/Intech_paper_2011/Intech_paper.pdf.
8. Симоненко А.С., Федотов А.А. Множество достижимости для автомобиля Дубинса при несимметричном ограничении на управление [Электронный ресурс] / CEUR-WS, Proceedings of 48th International Youth School-conference: Modern Problems in Mathematics and its Applications, Yekaterinburg, Russia, 2017. Vol. 1894. P. 79–87, URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1894/opt6.pdf>.
9. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
10. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
11. Pecsvaradi T. Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area // IEEE Trans. on Automatic Control. 1972. Vol. 17, No. 6. P. 763–772.
12. Bakolas E., Tsiotras P. Optimal synthesis of the asymmetric sinistral/dextral Markov-Dubins problem // Journal of Optimization Theory and Applications. 2011. Vol. 150, No. 2. P. 233–250.
13. Choi H. Time-Optimal Paths for a Dubins Car and Dubins Airplane with a Unidirectional Turning Constraint: Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy / University of Michigan, 2014. 134 p.
14. Пацко В.С., Федотов А.А. Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота // Труды института математики и механики, 2018, № 1, Том 24, С. 143–155.
15. Patsko V.S., Fedotov A.A. Attainability set at instant for one-side turning Dubins car // Proceedings of 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization, Yekaterinburg, Russia, 2018 (принято к печати).

V.S. Patsko, A.A. Fedotov (Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg)
Reachable set for the Dubins car

The paper presents a description of reachable set at instant for a model, which is very popular in problems of mathematical control theory and applied problems. The motion dynamics is defined by a third order non-linear system of differential equation having the linear velocity of a constant magnitude and a prescribed range of possible values of the angular velocity. The scalar control is the instantaneous angular velocity of the linear velocity vector rotation or, which is equivalent, the instantaneous turn radius. Admissible control values belong to a closed interval. Different mutual locations of this interval and the origin are considered including the situation of a one-side turn. During classifying controls guiding the system to the boundary of the reachable set, we use the Pontryagin's maximum principle. Results of numerical computations are given.