ФГУП ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ «АЭРОНАВИГАЦИЯ»

ISSN 1992-4860

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК ГосНИИ "АЭРОНАВИГАЦИЯ"

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

№ 11

ОРГАНИЗАЦИЯ ВОЗДУШНОГО ДВИЖЕНИЯ
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЗДУШНОГО ПРОСТРАНСТВА
БЕЗОПАСНОСТЬ ПОЛЕТОВ

Москва 2012

УДК 528.088.3, 621.396.969.34

RESEARCH OF ESTIMATION ACCURACY OF SYSTEMATIC ERRORS IN AZIMUTH FOR SEVERAL RADARS IN DEPENDENCE ON GEOMETRIC POSITIONS

Bedin D.A.

Problem of estimation accuracy of systematic errors in azimuth for several radars is considered in the case when radars implement observation and tracking together. An approach to researching the accuracy of the error estimation in dependence on relative geometric positions of radars and an observation zone is suggested.

Keywords: radar tracking, azimuth measurements, systematic errors, algorithms for estimation.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК ПО АЗИМУТУ ДЛЯ СИСТЕМЫ РЛС В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛОЖЕНИЯ

Бедин Д.А.

Изучается задача оценивания систематических ошибок РЛС по азимуту в случае, когда имеется несколько РЛС, одновременно наблюдающих за движением воздушного судна. Предлагается подход к исследованию точности такого оценивания в зависимости от взаимного геометрического расположения системы РЛС и области наблюдения.

Ключевые слова: радиолокация, систематические ошибки РЛС по азимуту, алгоритмы оценивания.

1. Введение

Рассматривается ситуация, когда несколько обзорных РЛС осуществляют наблюдение за воздушным судном (ВС). Каждая РЛС в дискретные моменты времени производит измерения дальности и азимута.

Возникающие при этом ошибки по своей природе разделяются на связанные с процессом радиолокации и на обусловленные влиянием других источников (искажений при обработке информации, механических сбоев РЛС). Ошибки процесса радиолокации хорошо описываются случайными величинами с нулевым (либо близким к нулю) математическим ожиданием, которые независимы для различных моментов времени и имеют независимые составляющие по азимуту и дальности. Ошибки другой природы могут не иметь хороших статистических свойств. Среди них к наибольшим погрешностям при определении положения ВС приводит систематическая ошибка по азимуту.

Систематические ошибки нескольких РЛС по азимуту можно находить, анализируя данные по отдельной траектории ВС, поступившие от всех РЛС (по крайней мере, при числе РЛС больше 2). При этом используется то обстоятельство, что направление действия систематической ошибки по азимуту для каждой РЛС своё. В зависимости от взаимного расположения системы РЛС и траектории ВС точность определения систематической ошибки может быть различной [1]. В работе предлагается способ количественной оценки этого геометрического фактора точности.

2. Модель наблюдения

Предполагаем, что данные измерений откладываются на плоскости П, касательной к поверхности Земли в некоторой точке. Для простоты будем считать, что все интересующие нас объекты располагаются в этой плоскости, а именно сами РЛС и движущееся ВС. Это упрощение не оказывает значительного влияния на существо рассматриваемой задачи.

Условимся, что отметка замера изображается на плоскости П точкой, находящейся относительно точки РЛС на измеренном расстоянии и по измеренному азимуту.

Обозначим вектор истинного положения ВС на плоскости П в момент времени t_i через x_i. Предполагаем, что в каждый момент t_i измерения производит только одна РЛС. Общее количество моментов измерений обозначим символом N (т.е. i меняется от 1 до N), количество моментов измерения k-й РЛС – символом N_k. Пусть M – число всех РЛС (k меняется от 1 до M). Номер наблюдающей РЛС будем считать известной функцией от номера измерения: $k = k(i)$.

В каждой точке x плоскости П введём единичный вектор $e_{1k}(x)$ направления от k-й РЛС в данную точку. Этот вектор указывает направление действия ошибки по дальности. Также введём вектор $e_{2k}(x)$, ортогональный вектору $e_{1k}(x)$, получающийся из $e_{1k}(x)$ правым поворотом. Такой вектор связан с направлением действия ошибок по азимуту (как случайной ошибки процесса радиолокации, так и систематической).

Для случайных ошибок процесса радиолокации применим следующие обозначения: σ_{rk} – среднеквадратичное отклонение случайной ошибки k-й РЛС по дальности; $\sigma_{\varphi k}$ – среднеквадратичное отклонение случайной ошибки k-й РЛС по азимуту. Систематическую ошибку k-й РЛС обозначим символом λ_k. Для расстояния от точки x до k-ой РЛС введём обозначение $r_k(x)$.

Далее будут рассматриваться только те измерения, которые происходят на значительном удалении от РЛС. В этих условиях допустимо следующее упрощение: ошибка измерения по азимуту для ВС, находящегося в точке x, заменяется сдвигом вдоль направления $e_{2k}(x)$. Среднеквадратичное отклонение $\sigma_{2k}(x)$ такой ошибки, эквивалентной случайной ошибке РЛС по азимуту, вычисляется как $\sigma_{2k}(x) = \sigma_{\varphi k}\, r_k(x)$. Ошибка измерения дальности заменяется сдвигом вдоль вектора $e_{1k}(x)$, среднеквадратичное отклонение сдвига будет $\sigma_{1k} = \sigma_{rk}$. Систематическая ошибка по азимуту подменяется сдвигом вдоль $e_{2k}(x)$, величина которого зависит от точки x: $r_k(x)\,\lambda_k$. Введённые обозначения поясняются на рис. 1. При этом опущены индекс k и скобка с аргументом x.

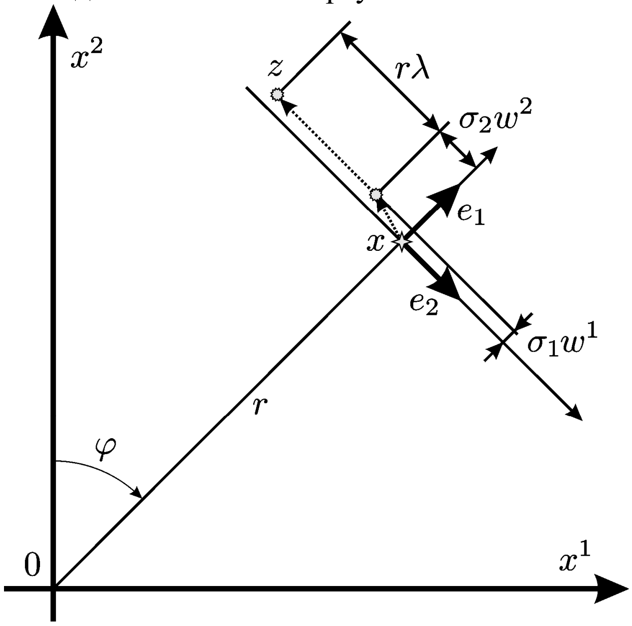

Рис. 1. Пояснение процесса наблюдения; положение РЛС – точка (0, 0).

В принятых обозначениях уравнение наблюдения, связывающее измерение с истинным положением, запишется следующим образом:

$$z_i = x_i + e_{1k(i)}(x_i)\,\sigma_{1k(i)} w_i^1 + e_{2k(i)}(x_i)\,\sigma_{2k(i)}(x_i)\, w_i^2 + e_{2k(i)}(x_i)\, r_{k(i)}(x_i)\, \lambda_{k(i)}. \qquad (1)$$

Здесь w_i^1, w_i^2 – независимые скалярные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, моделирующие ошибки, связанные с ошибками по дальности и азимуту. Таким образом,

$$E[w_i^1] = E[w_i^2] = 0,$$

$$E[w_i^1 w_i^1] = E[w_i^2 w_i^2] = 1, \quad E[w_i^1 w_i^2] = E[w_i^1 w_j^1] = E[w_i^2 w_j^2] = E[w_i^1 w_j^2] = 0.$$

3. Измерения небольшого участка траектории

Отметим, что уравнение (1) нелинейно. В случае если алгоритм, по которому оцениваются λ_k, работает с протяжёнными траекториями, использование нелинейного уравнения наблюдения является принципиальным, поскольку нужно учитывать различные направления действия ошибок на разных участках траектории. Однако если мы хотим ввести понятие точности оценивания величин λ_k в зависимости от геометрического положения ВС, разумно рассматривать оценивание по небольшим участкам траектории, на которых расстояния до всех РЛС и направления «точка – РЛС» значительно не изменяются. При этом можно использовать упрощённое уравнение наблюдения, зафиксировав значение аргумента x в функциях $e_{1k}(x)$, $e_{2k}(x)$, $r_k(x)$ и сделав его равным x^*:

$$z_i = x_i + e_{1k(i)}(x^*)\,\sigma_{1k(i)} w_i^1 + e_{2k(i)}(x^*)\,\sigma_{2k(i)}(x^*)\, w_i^2 + e_{2k(i)}(x^*)\, r_{k(i)}(x^*)\, \lambda_{k(i)}. \qquad (2)$$

Точку x^* трактуем как центр некоторой «малой» области, содержащей рассматриваемый участок траектории.

Понятие малости области можно формализовать, например, следующим образом. Зададимся положительными числами ε, δ. Тогда область наблюдения будет малой, если для всех её точек x и всех номеров РЛС k выполняются неравенства

$$\frac{\left| r_k(x) - r_k(x^*) \right|}{r_k(x^*)} \le \varepsilon, \quad \left| e_{1k}(x) - e_{1k}(x^*) \right| \le \delta, \quad \left| e_{2k}(x) - e_{2k}(x^*) \right| \le \delta.$$

4. Измерения прямолинейного участка траектории

Траектории гражданских ВС в большинстве случаев представляют собой последовательность участков прямолинейного равномерного движения, перемежаемую редкими манёврами. Поэтому при рассмотрении малой области наблюдения и короткого участка траектории разумно проводить оценивание систематических ошибок именно в предположении о прямолинейном равномерном движении

$$x_i = x_0 + v_0\, t_i.$$

Введём вектор-столбец θ, включающий в себя неизвестные параметры прямолинейного равномерного движения, и матрицу движения A_i:

$$\theta = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_i \end{bmatrix}.$$

Уравнение движения запишется в виде

$$x_i = A_i\, \theta. \qquad (3)$$

Обозначим символами C_{ik}, D_k следующие матрицы:

$$C_{ik} = \left[A_i \left| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \cdots r_k(x^*) e_{2k}(x^*) \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \cdots \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right. \right], \quad D_k = \left[e_{1k}(x^*)\, e_{2k}(x^*) \right] \begin{bmatrix} \sigma_{1k} & 0 \\ 0 & \sigma_{2k}(x^*) \end{bmatrix}.$$

Введём векторы-столбцы λ, w_i и y:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_M \end{bmatrix}, \qquad w_i = \begin{bmatrix} w_i^1 \\ w_i^2 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} \theta \\ \hline \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \hline \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_M \end{bmatrix}.$$

Последний включает в себя все неизвестные параметры столбца θ и все λ_k.

Используя уравнение (3), получим матричный вид уравнения наблюдения (2):

$$z_i = C_{ik(i)}\, y + D_{k(i)}\, w. \tag{4}$$

Уравнение (4) можно рассматривать как линеаризацию уравнения (1) в окрестности точки x^* при условии (3).

5. Решение задачи оценивания

Для оценки точности восстановления систематических ошибок РЛС по азимуту в зависимости от геометрического положения будем рассматривать задачу оценивания неизвестного постоянного вектора-столбца y в условиях уравнения наблюдения (4), полагая, что измерения берутся в некоторой малой области. При этом важной является лишь часть координат вектора-столбца y, относящаяся к λ_k. Зависимость точности оценивания ошибок по азимуту от точки x^* в этой конкретной задаче предлагается использовать для разделения плоскости П на зоны с различным «потенциалом оценивания». Численные характеристики таких зон могут быть полезны для любого другого алгоритма оценивания λ_k.

1) Оценку $\hat{y}$, оптимально приближающую постоянный вектор-столбец y в смысле критерия $\mathbf{E}\left[(y-\hat{y})^{\mathbf{2}}\right]$, даёт обобщённый метод наименьших квадратов [1, 2]. Расчёт производится по формулам

$$P^{-\mathbf{1}} = \sum_{i=1}^{N} C_{ik(i)}^{\mathbf{T}} \left(D_{k(i)} D_{k(i)}^{\mathbf{T}} \right)^{-\mathbf{1}} C_{ik(i)}, \qquad \hat{y} = P \left(\sum_{i=1}^{N} C_{ik(i)}^{\mathbf{T}} \left(D_{k(i)} D_{k(i)}^{\mathbf{T}} \right)^{-\mathbf{1}} z_i \right). \tag{5}$$

Часть координат столбца $\hat{y}$, относящаяся к систематическим ошибкам по азимуту (обозначим её через $\hat{\lambda}$), является оптимальной оценкой истинного вектора-столбца систематических ошибок λ, т.е. минимизирует критерий $\mathbf{E}\left[(\lambda-\hat{\lambda})^{\mathbf{2}}\right]$. Матрица ковариации P задаёт точность оценивания y:

$$\mathbf{E}\left[(y-\hat{y})^{\mathbf{2}}\right] = \mathrm{tr}[P].$$

Эта матрица имеет блочную структуру:

$$P = \begin{bmatrix} P_{\theta\theta} & P_{\theta\lambda} \\ P_{\lambda\theta} & P_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}.$$

Точность оценивания λ выражается через соответствующую часть матрицы P:

$$\mathbf{E}\left[(\lambda-\hat{\lambda})^{\mathbf{2}}\right] = \mathrm{tr}[P_{\lambda\lambda}].$$

Первое соотношение в (5) задаёт обратную для P матрицу. Она также является блочной:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{\theta\theta} & \tilde{P}_{\theta\lambda} \\ \tilde{P}_{\lambda\theta} & \tilde{P}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}.$$

Все блоки матрицы P^{-1} являются функциями от компонент известных матриц C_{ik}, D_k. Известна [1, 2] следующая формула для $P_{\lambda\lambda}$:

$$P_{\lambda\lambda} = \tilde{P}_{\lambda\lambda}^{-1} + \tilde{P}_{\lambda\lambda}^{-1}\tilde{P}_{\lambda\theta}^{\mathbf{T}}\left(\tilde{P}_{\theta\theta} - \tilde{P}_{\theta\lambda}\tilde{P}_{\lambda\lambda}^{-1}\tilde{P}_{\lambda\theta}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}\tilde{P}_{\theta\lambda}\tilde{P}_{\lambda\lambda}^{-1}. \tag{6}$$

В этой формуле первое слагаемое $\tilde{P}_{\lambda\lambda}^{-1}$ имеет простое выражение, не зависящее от геометрического положения x^* центра области наблюдения и моментов измерений:

$$\tilde{P}_{\lambda\lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_{\varphi 1}^2}{N_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{\sigma_{\varphi M}^2}{N_M} \end{bmatrix}.$$

Поскольку второе слагаемое в (6) является положительно определённой матрицей, то матрица $\tilde{P}_{\lambda\lambda}^{-1}$ задаёт «фоновый» уровень точности для всех положений x^*, который нельзя уменьшить.

Зависимость от геометрического положения x^* проявляется в формуле (6) через второе слагаемое. Анализ такой зависимости затруднён из-за того, что матрицы существенно зависят от моментов измерений t_i. Однако в важном частном случае удаётся избежать такой зависимости.

2) Введём для каждой РЛС понятие среднего момента времени своих измерений:

$$T_k = \frac{1}{N_k}\sum_{i\in I_k} t_i\,, \quad \text{где} \quad I_j = \{i:\ 1 \le i \le N,\quad k(i) = j\}.$$

Оказывается, что в случае

$$T_1 = \ldots = T_M = T \tag{7}$$

во втором слагаемом в (6) исчезают выражения, содержащие t_i.

Условие (7) не требует наложения каких-то сложных ограничений на процесс наблюдения и (в приближённом смысле) выполняется естественным образом. Пусть, например, РЛС производят измерения с некоторым заданным шагом по времени. Тогда

$$T_1 \approx T, \quad \ldots, \quad T_M \approx T.$$

Введём матрицы

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_{11}^2}{N_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{\sigma_{1M}^2}{N_M} \end{bmatrix}, \qquad V(x^*) = \begin{bmatrix} e_{21}^{\mathbf{T}}(x^*)e_{21}(x^*) & \cdots & e_{21}^{\mathbf{T}}(x^*)e_{2M}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{2M}^{\mathbf{T}}(x^*)e_{21}(x^*) & \cdots & e_{2M}^{\mathbf{T}}(x^*)e_{2M}(x^*) \end{bmatrix},$$

$$R(x^*) = \begin{bmatrix} r_1(x^*) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_M(x^*) \end{bmatrix}$$

и скалярное выражение

$$u(x^*) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=k+1}^{M} \frac{N_k}{\sigma_{1k}^2} \frac{N_l}{\sigma_{2l}^2(x^*)} \left(e_{2k}^{\mathbf{T}}(x^*)\, e_{1l}(x^*) \right)^2 .$$

В этих обозначениях выражение (6) при условии (7) принимает вид

$$P_{\lambda\lambda}(x^*) = \tilde{P}_{\lambda\lambda}^{-1} + \frac{1}{u(x^*)} R^{-1}(x^*) V(x^*) \Sigma^{-1} V(x^*) R^{-1}(x^*) . \tag{8}$$

3) Задавшись равенством (8), можно численно построить зависимость точности оценивания от геометрического положения x^* центра области наблюдения на плоскости П. При этом есть возможность исследовать как общую точность оценивания всех переменных λ_k, используя критерий

$$J(x^*) = \sqrt{\mathbf{E}\left[(\lambda - \hat{\lambda})^2 \right]} = \sqrt{\mathrm{tr}[P_{\lambda\lambda}](x^*)} ,$$

так и точность оценивания конкретного λ_k:

$$J_k(x^*) = \sqrt{\mathbf{E}\left[(\lambda_k - \hat{\lambda}_k)^2 \right]} = \sqrt{P_{\lambda\lambda,\, kk}(x^*)} .$$

На рис. 2 представлены результаты численных расчетов критерия $J(x^*)$ для системы четырёх РЛС Новосибирской зоны наблюдения. По осям откладывается расстояние в километрах. РЛС расположены в точках (0, 0), (1, -2), (225, 33), (25, 380). Оттенками показаны области с различным значением критерия $J(x^*)$.

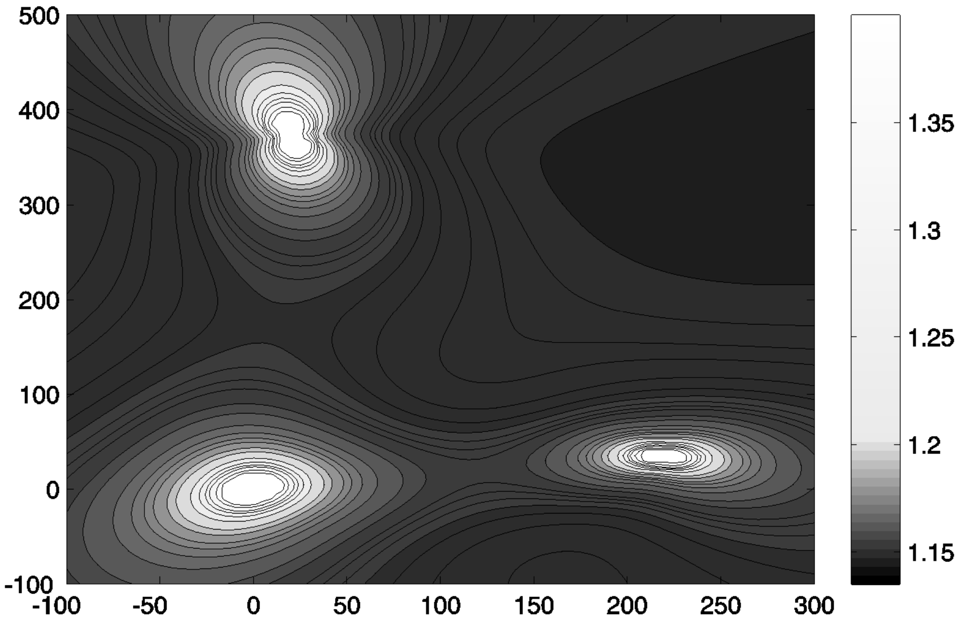

Рис. 2. Точность оценивания систематических ошибок по азимуту четырёх РЛС в Новосибирской зоне наблюдения

Автор благодарит В.С. Пацко, А.В. Белякова и К.В. Строкова за обсуждение постановки задачи и замечания.

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта УрО – СО РАН «Качественная теория и численные методы для задач динамики, управления и оптимизации», при поддержке РФФИ, проект 10-01-96006.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Степанов О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Введение в теорию оценивания. – СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2010. – Ч. 1.
2. **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977.

Сведения об авторе

Бедин Дмитрий Александрович, 1983 г. рождения, окончил Уральский госуниверситет им. А.М. Горького (2006), младший научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН, область научных интересов – теория управления, оценивание в условиях неопределённости, дифференциальные игры.

E-mail: bedin@imm.uran.ru

Рецензент – доктор технических наук, профессор Пятко С.Г.