АКАДЕМИЯ НАУК СССР
УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

(Материалы по математическому обеспечению ЭВМ)

Свердловск 1984

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

(материалы по математическому обеспечению ЭВМ)

Свердловск, 1984

УДК 519.9

Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (материалы по математическому обеспечению ЭВМ). Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984.

Брошюра содержит набор алгоритмов и программ, предназначенных для решения некоторых типов линейных дифференциальных игр.

Материал рассчитан на вычислителей, инженеров и научных работников, интересующихся численными методами теории управления и теории дифференциальных игр.

Ответственные редакторы -
доктор физ.-мат.наук А.И.Субботин

кандидат физ.-мат.наук В.С.Пацко

$$A\frac{20204-214(83)}{055(02)\ 7}БО$$

Н.Д.Боткин, М.А.Зарх

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПОЗИЦИОННОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

I. Постановка задачи

Рассмотрим линейную антагонистическую дифференциальную игру

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv \;, \quad x \in R^n$$
$$u \in (\mu_1 + \mu_2 t)P, \; v \in (\nu_1 + \nu_2 t)Q \;, \; x(\vartheta) \in M \tag{I}$$

двух лиц с фиксированным моментом окончания ϑ. Здесь x – фазовый вектор, A, B, C – постоянные матрицы размерностей $n \times n$, $n \times p$, $n \times q$ соответственно, u, v – управления первого и второго игроков, $P \subset R^p$, $Q \subset R^q$ – выпуклые многогранники, μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 – действительные константы. Предположим, что целевое множество M – выпуклое и цилиндрическое по всем координатам за исключением двух выделенных с номерами r и s. Более точно

$$M = \{x \in R^n : (x^{(r)}, x^{(s)}) \in M^1\} ,$$

где M^1 - выпуклое компактное множество из R^2. Цель первого игрока - обеспечить в момент ϑ попадание фазового вектора x на множество M. Интересы второго игрока противоположны.

Обозначим через W множество позиционного поглощения для игры (I), т.е. множество всех начальных позиций (t,x), из которых первый игрок может решить стоящую перед ним задачу при помощи позиционного способа управления. Для произвольного $t \leq \vartheta$ положим

$$W(t) = \{x \in R^n : (t,x) \in W\}$$

и назовем это множество сечением W в момент t. При помощи преобразования $z(t) = X_{r,s}(\vartheta,t)x(t)$, где $X_{r,s}(\vartheta,t)$ матрица, составленная из r-ой и s-ой строк фундаментальной матрицы Коши $X_{r,s}(\vartheta,t) = expA(\vartheta-t)$, перейдем к эквивалентной [5, 6] дифференциальной игре

$$\dot{z} = u + v, \quad z \in R^2$$
$$u \in P^1(t), \quad v \in Q^1(t), \quad z(\vartheta) \in M^1. \tag{2}$$

Здесь

$$P^1(t) = (\mu_1 + \mu_2 t) X_{r,s}(\vartheta,t) BP,$$

$$Q^1(t) = (\nu_1 + \nu_2 t) X_{r,s}(\vartheta,t) CQ.$$

Между множеством W и множеством W^1 позиционного поглощения для игры (2) имеется связь

$$W(t) = \{x \in R^n : X_{\tau,s}(\vartheta, t)x \in W^1(t)\} .$$

В настоящем сборнике приведены два алгоритма численного построения сечений множества W^1 (работы [I,4]). В каждом из них игра (2) подменяется аппроксимирующей игрой

$$\begin{gathered} \dot{z} = u + v, \ z \in R^2 \\ u \in P^2(t), \ v \in Q^2(t), \ z(\vartheta) \in M^2 , \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$P^2(t) = P^1(t_k), \ Q^2(t) = Q^1(t_k), \ t \in (t_{k+1}, t_k] ,$$

$$t_0 = \vartheta, \ t_{k+1} = t_k - \Delta , \ k = 0,1,2, \ldots ,$$

Δ – шаг разбиения полуоси $t \leqslant \vartheta$, целевое множество M^2 – выпуклый многоугольник, аппроксимирующий M^1 . Для игры (3) строится набор $W^2(t_k)$, $k = 0,1, \ldots ,$ сечений множества позиционного поглощения. Множества $W^2(t_k)$ принимаются за приближенное значение сечений $W^1(t_k)$.

Возникает следующая задача. Задан момент $t_* \in \{t_k\}$. Требуется оценить хаусдорфово расстояние $h(W^1(t_*), W^2(t_*))$ между множествами $W^1(t_*)$, $W^2(t_*)$. Напомним, что хаусдорфово расстояние между двумя ограниченными замкнутыми множествами A_1 , A_2 на плоскости определяется по формуле

$$h(A_1, A_2) = max\{\varepsilon_1\ \varepsilon_2\},$$

где

$$\varepsilon_1 = min\{\varepsilon \geq 0 : A_1 \subset A_2 + \varepsilon S\},$$

$$\varepsilon_2 = min\{\varepsilon \geq 0 : A_2 \subset A_1 + \varepsilon S\},$$

S - единичный замкнутый круг с центром в начале координат.

В статье представлена программа, которая выполняет переход от игры (I) к игре (3), строит по алгоритму из работы [4] $W^2(t_*)$ и вычисляет оценку хаусдорфова расстояния между $W^1(t_*)$ и $W^2(t_*)$. Исходными данными для описываемой программы являются матрицы A, B, C, вершины многогранников P, Q, вершины многоугольника M^2, число δ, оценивающее сверху расстояние $h(M^1, M^2)$, момент окончания игры ϑ, шаг Δ, число $\tau_* = \vartheta - t_*$, константы μ_1, μ_2, ν_1, ν_2. Кроме того, задается некоторая точка $m \in int\, M^2$, выбираемая так, чтобы радиус круга с центром в этой точке, вписанного в M^2, был наибольшим.

2. Описание алгоритма

Пусть m - точка из внутренности многоугольника M^2, символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначим скалярное произведение. Положим

$$R = \max \{ r \geq 0 : m + r \cdot S \subset M^2 \},$$

$$\delta = h(M^1, M^2),$$

$$H^i(t,\ell) = \min_{u \in P^i(t)} \langle \ell, u \rangle + \max_{v \in Q^i(t)} \langle \ell, v \rangle, \; i = 1,2,$$

$$\beta = \int_{t_*}^{\vartheta} \max_{|\ell| = 1} |H^1(t,\ell) - H^2(t,\ell)| \, dt, \tag{4}$$

$$\varepsilon = (\beta + \delta)/R,$$

$$M_\varepsilon^2 = (1-\varepsilon)(M^2 - m) + m.$$

Пусть $W_\varepsilon^2(t_*)$ – сечение множества позиционного поглощения для игры (3) с целевым множеством M_ε^2 вместо M^2. Для оценки хаусдорфова расстояния между $W^1(t_*)$ и $W^2(t_*)$ воспользуемся неравенством

$$h(W^1(t_*), W^2(t_*)) \leq h(W^2(t_*), W_\varepsilon^2(t_*)),$$

полученным в работах [2, 3] . Чтобы найти правую часть этого неравенства, необходимо выполнить следующие операции: вычислить R, β и ε, построить $W^2(t_*)$ и $W_\varepsilon^2(t_*)$, вычислить $h(W^2(t_*), W_\varepsilon^2(t_*))$.

Вычисление R. Пусть выпуклый многоугольник $M^2 \subset R^2$ задан вершинами m_1, $m_2, \dots, m_k$. Обозначим через ℓ_i единичную внешнюю нормаль к i-ой стороне M^2. Расстояние от точки m до прямой, проходящей через i-ую сторону, равно $\langle \ell_i\ , m_i - m \rangle$, а искомая величина находится по формуле

$$R = \min_{1 \le i \le k} \{\langle \ell_i\ , m_i - m \rangle\} .$$

Вычисление β . Обозначим через ψ подинтегральную функцию в формуле (4). Для вычисления $\psi(t)$ найдем прежде всего вершины выпуклых многоугольников $P^1(t)$, $Q^1(t)$, $P^2(t)$, $Q^2(t)$. Отыскание вершин каждого из этих многоугольников сводится к решению следующей вспомогательной задачи. Даны точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из R^2 . Требуется выделить и упорядочить те из них, которые являются вершинами выпуклого многоугольника $co\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Здесь „$co$" – символ выпуклой оболочки. Опишем алгоритм решения этой задачи.

Пусть $\alpha = \min\{a_i^{(2)} : 1 \le i \le n\}$ и точка $a_s = (a_s^{(1)}, a_s^{(2)})$ удовлетворяет соотношениям $a_s^{(2)} = \alpha$ и $a_s^{(1)} = \min\{a_i^{(1)} : 1 \le i \le n\ , a_i^{(2)} = \alpha\}$. Для $i = \overline{1, s-1}$ положим $b_i = a_i - a_s$, для $i = \overline{s, n-1}$ пусть $b_i = a_{i+1} - a_s$. Все векторы b_i принадлежат полуплоскости $\pi = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) : x^{(2)} \ge 0\}$ (рис. I). Будем говорить, что пара векторов a и b упорядочена, если a левее b , т.е. поворот вектора a до сонаправленности с b по наименьшему углу осуществляется по часовой стрелке. С набором векторов $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ проделывается последовательность операций, состоящая из $n-2$ шагов. Первый шаг состоит в том, что в случае неупорядоченности пары векторов b_1 , b_2 , они меняются местами, в случае упорядоченности набор остается неизменным. После этого проделываются однотипные 2-й, 3-й , ... , $n-2$-й шаги. Опишем один такой шаг.

Рассмотрим тройку векторов a , b , c , где a и b – упорядоченная пара. Пусть d – вектор, стоящий в наборе вслед за a , b , c . В полуплоскости π выделим 6 зон, в которых может быть конец вектора c . Эти зоны показаны на рис. 2.

Если конец вектора c лежит в первой зоне, то вектор c из набора выбрасывается и переходим к следующему шагу, на котором будем рассматривать тройку a , b , d . Если конец c во второй зоне, то на месте тройки a , b , c в наборе ставится тройка c , a , b . На следующем шаге рассматриваем тройку a , b , d . В случае, когда конец вектора c лежит в третьей зоне, вектор a выбрасывается, на его место ставится c . На следующем шаге рассматриваем тройку c , b , d . Если конец c в четвертой зоне, то b и c меняются местами. На следующем шаге рассматривается тройка c , b , d . Если конец c лежит в пятой зоне, то b выбрасывается из набора, на его место ставится c . На следующем шаге рассматриваем тройку a , c , d . Когда конец вектора c находится в шестой зоне, то набор не меняем. На следующем шаге рассматриваем тройку b , c , d . Итак, дано описание одного шага последовательности. Осталось только указать, что начинается эта последовательность шагов с рассмотрения тройки b_1 , b_2 , b_3 .

После n-2-го шага возможна одна из двух ситуаций: 1) хотя бы на одном шаге конец вектора c не попал в шестую зону, 2) на каждом шаге конец вектора c попадал в шестую зону. В первом случае с полученным набором повторяется после-

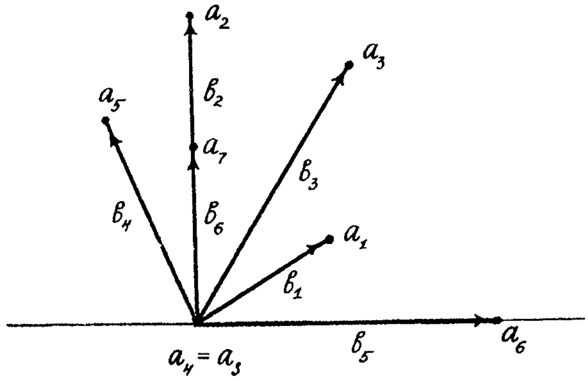


Рис. 1

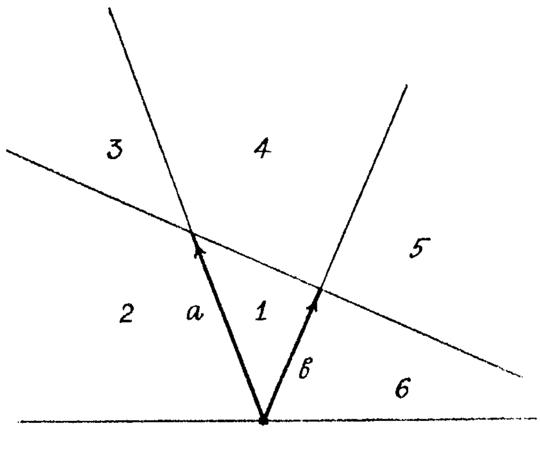


Рис. 2

довательность операций, содержание которых описано выше. Так действуем до тех пор, пока не придем к ситуации 2). Во втором случае ко всем векторам полученного набора прибавляется вектор a_s, а сама точка a_s приписывается последним элементом. Таким образом, получим набор искомых вершин многоугольника $co\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, упорядоченных по часовой стрелке.

Определив вершины каждого из многоугольников $P^1(t)$, $P^2(t)$, $Q^1(t)$, $Q^2(t)$, перейдем к вычислению $\psi(t)$. Имеем

$$\psi(t) = \max_{|\ell|=1} |H^1(t,\ell) - H^2(t,\ell)| =$$

$$= \max_{|\ell|=1} \Big| \max_{v\in Q^1(t)} \langle \ell, v\rangle + \min_{u\in P^1(t)} \langle \ell, u\rangle - \max_{v\in Q^2(t)} \langle \ell, v\rangle -$$

$$- \min_{u\in P^2(t)} \langle \ell, u\rangle \Big| = \max_{|\ell|=1} \Big| \max_{v\in Q^1(t)} \langle \ell, v\rangle - \max_{u\in -P^1(t)} \langle \ell, u\rangle -$$

$$- \max_{v\in Q^2(t)} \langle \ell, v\rangle + \max_{u\in -P^2(t)} \langle \ell, u\rangle \Big|$$

или

$$\psi(t) = \max_{|\ell|=1} \big| \rho(\ell, Q^1(t)) - \rho(\ell, -P^1(t)) - \rho(\ell, Q^2(t)) + \rho(\ell, -P^2(t)) \big|. \tag{5}$$

Введем обозначение

$$\xi(t,\ell) = \rho(\ell, Q^1(t)) - \rho(\ell, -P^1(t)) - \rho(\ell, Q^2(t)) + \rho(\ell, -P^2(t)).$$

Пусть $\{\ell_i\}$, $i=\overline{1,k}$, – упорядоченная совокупность единичных внешних нормалей, снятых с многоугольников $Q^1(t)$,

$Q^2(t)$, $-P^1(t)$, $-P^2(t)$. Перепишем формулу (5) в виде

$$\varphi(t) = \max_{1\le i\le k} \max_{\ell\in S_i} |\xi(t,\ell)|. \qquad (6)$$

Здесь $S_i = \{ \ell\in R^2 : |\ell|=1,\ \ell=\alpha_1 \ell_i + \alpha_2 \ell_{i+1},\ \alpha_1,\alpha_2 \ge 0 \}$. Таким образом, вычисление $\varphi(t)$ сводится к вычислению $\max\{|\xi(t,\ell)|:\ \ell\in S_i\}$ для $i=\overline{1,k}$. Зафиксируем номер i . Используя определение дуги S_i , получаем существование такого элемента $y\in R^2$, что

$$\xi(t,\ell) = \langle \ell, y\rangle,\quad \ell\in S_i\ . \qquad (7)$$

Каждый единичный вектор ℓ можно представить в виде $\ell^{(1)} = \cos\varphi$, $\ell^{(2)} = \sin\varphi$. Пусть φ_1 и φ_2 таковы, что

$$(\ell_i^{(1)}, \ell_i^{(2)}) = (\cos\varphi_1\ ,\ \sin\varphi_1),$$

$$(\ell_{i+1}^{(1)}, \ell_{i+1}^{(2)}) = (\cos\varphi_2\ ,\ \sin\varphi_2).$$

Имеем

$$\max_{\ell\in S_i} |\xi(t,\ell)| = \max_{\varphi_2\le\varphi\le\varphi_1} |y^{(1)}\cos\varphi + y^{(2)}\sin\varphi|.$$

Обозначим через $\bar{\varphi} \in [0,\pi)$ решение уравнения

$$\frac{d}{d\varphi}\left(y^{(1)}\cos\varphi + y^{(2)}\sin\varphi\right) = 0 .$$

Положим $\bar{\ell} = (\cos\bar{\varphi}, \sin\bar{\varphi})$. Тогда

$$\max_{\ell\in S_i} |\langle \xi(t), \ell\rangle| = \begin{cases} \max\{|\langle \ell_i, y\rangle|, |\langle \ell_{i+1}, y\rangle|\}, \text{если } \bar{\ell}\notin S_i, -\bar{\ell}\notin S_i, \\ |\langle \bar{\ell}, y\rangle|, \text{если } \bar{\ell}\in S_i \quad \text{или } -\bar{\ell}\in S_i . \end{cases}$$

Перебрав теперь все i, найдем значение функции $\varphi(t)$ в точке t.

Число β находим по формуле численного интегрирования методом прямоугольников с шагом $\sigma = \Delta/k$:

$$\beta = \sigma \sum_{i=1}^{I_*} \sum_{j=0}^{k-1} \varphi(t_i - \sigma\cdot j) .$$

Здесь I_* – номер точки t_* в наборе $\{t_i\}$, т.е. $t_* = t_{I_*}$, k – натуральное число.

Для построения множеств $W^2(t_*)$, $W_\varepsilon^2(t_*)$ исполь- зуется стандартная программа, описанная в работе [4] настоящего сборника. Поскольку множества $W^2(t_*)$, $W_\varepsilon^2(t_*)$ выпуклы (в силу выпуклости множеств M^2 и M_ε^2), то для хаусдорфова расстояния между ними справедлива формула

$$h(W^2(t_*), W_\varepsilon^2(t_*)) = \max_{|\ell|=1} |\rho(\ell, W^2(t_*)) - \rho(\ell, W_\varepsilon^2(t_*))| . \tag{8}$$

Формула (8) аналогична соотношению (5) для $\varphi(t)$. Поэтому для нахождения $h(W^2(t_*), W_\varepsilon^2(t_*))$ используется алгоритм, подобный алгоритму вычисления $\psi(t)$.

3. Описание программы. Переменные, используемые в программе

N – размерность фазовой переменной в игре (I),

NB – размерность вектора управления u ,

NC – размерность вектора управления v ,

KB – количество вершин многогранника P ,

KC – количество вершин многогранника Q ,

ICT – номер первой из двух строк фундаментальной матрицы Коши, которые берутся для замены переменной,

JCT – номер второй из этих двух строк,

$A(10,10)$ – двумерный массив, содержащий матрицу A системы (I),

$B(10,10)$ – двумерный массив, содержащий матрицу B системы (I),

$C(10,10)$ – двумерный массив, содержащий матрицу C системы (I),

$P(10,50)$ – двумерный массив, в котором содержатся координаты вершин многогранника P . Координатами J -ой вершины являются числа $P(1,J)$, $P(2,J)$, ..., $P(NB,J)$,

$Q(10,50)$ – двумерный массив, содержащий координаты вершин многогранника Q . Координатами J -ой вершины являются числа $Q(1,J), Q(2,J), \ldots, Q(NC,J)$,

$DLINA$ - время окончания игры ϑ ,

$TAYOS$ - длина промежутка времени $\vartheta - t_*$, где

t_* - момент, для которого нужно получить оценку,

SAG - шаг Δ ,

KT - целое число, задающее шаг интегрирования $\sigma =$
$= \Delta / KT$,

DEL - хаусдорфово расстояние $h(M^1, M^2)$,

$TT1$ - константа μ_1 ,

$TT2$ - константа μ_2 ,

$TT3$ - константа ν_1 ,

$TT4$ - константа ν_2 ,

$EM1$ - первая координата точки $m \in \operatorname{int} M^2$,

$EM2$ - вторая координата точки m ,

KM - количество вершин многоугольника M^2 ,

$OM1(300)$ - одномерный массив, содержащий первые координаты вершин M^2 , упорядоченных по часовой стрелке,

$OM2(300)$ - одномерный массив, содержащий вторые координаты вершин M^2 .

В процессе выполнения программы вычисляются: расстояние R от точки m до границы многоугольника M^2 (переменная PAD), многоугольник $W^2(t_*)$ (первые и вторые координаты вершин $W^2(t_*)$, упорядоченных по часовой стрелке, содержатся в массивах $W1$ и $W2$ соответственно, KW - число вершин), многоугольник $W^2_\varepsilon(t_*)$ (координаты его вершин содержатся в массивах $WW1$, $WW2$, переменная KWW равна их числу), хаусдорфово расстояние $h(W^2(t_*), W^2_\varepsilon(t_*))$ (переменная OS).

В случае нормального окончания задачи, т.е. когда непусты множества $W^2(t_*)$, $W_\varepsilon^2(t_*)$, на печать выдается запись

$$TIME = \vartheta - t_*,\ ESTIMATION = OS.$$

Если $W^2(\bar{t}) = \phi$ для некоторого момента $\bar{t} \in [t_*, \vartheta]$, то печатается

$$W\ EMPTY\ WHEN\ T = \vartheta - \bar{t}.$$

Если $W_\varepsilon^2(\tilde{t}) = \phi$ для некоторого момента $\tilde{t} \in [t_*, \vartheta]$, то печатается

$$WW\ EMPTY\ WHEN\ T = \vartheta - \tilde{t}.$$

П о р я д о к   в в о д а   д а н н ы х

Числовой материал вводится с перфокарт в следующем порядке:

1. N, NB, NC, KB, KC - по формату $5I3$,
2. ICT, JCT - по формату $2I3$,
3. A - по формату $10F7.3$. Элементы матрицы располагаются на перфокартах по строкам, т.е. в следующем порядке: $A(1,1), A(1,2), \dots, A(1,N), A(2,1), A(2,2), \dots, A(2,N), \dots, A(N,1), A(N,2), \dots, A(N,N)$.
4. B - по формату $10F7.3$. Элементы матрицы располагаются по строкам.
5. C - по формату $10F7.3$. Элементы матрицы располагают-

ся по строкам.

6. P - по формату $10F7.3$. Элементы матрицы располагаются по строкам.

7. Q - по формату $10F7.3$. Элементы матрицы располагаются по строкам.

8. $DLINA$ - по формату $F7.3$.

9. $TAYOS$ - по формату $F7.3$.

10. SAG - по формату $F7.3$.

11. KT - по формату $I3$,

12. DEL - по формату $F7.3$,

13. $TT1, TT2, TT3, TT4$ - по формату $4F7.3$.

14. $EM1, EM2$ - по формату $2F7.3$.

Задание целевого множества M^2 оформлено в виде подпрограммы $PAZB$. Обращение к подпрограмме имеет вид

```
CALL PAZB(OM1,OM2,KM).
```

Последовательность операторов подпрограммы $PAZB$ должна быть следующей:

```
SUBROUTINE PAZB(OM1,OM2,KM)
DIMENSION OM1(KM),OM2(KM)
. . .
RETURN
END
```

В ходе выполнения операторов, обозначенных тремя точками, массивам $OM1$ и $OM2$ должны присвоиться значения координат вершин многоугольника M^2 . Вершины должны быть упорядочены по часовой стрелке. Константе KM присваивается целое число, равное количеству вершин M^2.

Подпрограммы

В процессе выполнения программа обращается к подпрограммам PA, $FINT$, WWW, H.

Обращение к подпрограмме PA имеет вид

$$CALL\ PA(X1,X2,N,R).$$

Входные параметры: $X1$ - массив первых координат вершин выпуклого многоугольника, содержащего начало координат (вершины упорядочены по часовой стрелке), $X2$ - массив вторых координат вершин многоугольника, N - количество вершин многоугольника. Выходной параметр R равен радиусу максимального круга с центром в начале координат, вписанного в многоугольник.

Обращение к подпрограмме $FINT$ имеет вид

$$CALL\ LOADGO(A,B,C,P,Q,SAG,KT,TP,1,N,NB,KB,NC,KC,FI,TT1,TT2,TT3,TT4,DLINA,'FINT')$$

Выходной параметр FI - массив значений интеграла в формуле (4) для значений t_*, заданных посредством массива TP ($t_* = \vartheta - TP(I)$, $I = 1,2,\ldots,NP$). Для поставленной задачи достаточно задать $NP=1$, $TP(1)=\vartheta - t_*$ и сосчитать $FI(1)$. В процессе выполнения подпрограмма $FINT$ обращается к подпрограммам $BUBOP$ и TET.

Форма обращения к подпрограмме $BUBOP$ следующая:

$$CALL\ BUBOP(X1,X2,N,NN).$$

Входные параметры: $X1$, $X2$ – массивы первых и вторых координат N точек из R^2 . На выходе в массивах $X1$ и $X2$ содержатся координаты упорядоченного набора вершин выпуклой оболочки этих N точек. Число NN – количество вершин выпуклой оболочки. Форма обращения к подпрограмме TET следующая:

$$CALL\ \ TET(A1,A2,A3,A4,N1,N2,N3,N4,PEZ,BEK).$$

Входные параметры $A1$, $A2$, $A3$, $A4$ – двумерные массивы, соответствующие выпуклым многоугольникам A_1 , A_2 , A_3 , A_4 из R^2 с $N1$, $N2$, $N3$, $N4$ вершинами соответственно. Точка $(A1(1,I)$, $A1(2,I))$ – это I-я вершина многоугольника A_1 . Смысл массивов $A2$, $A3$, $A4$ аналогичный. Параметры PEZ и BEK – выходные. Число PEZ вычисляется по формуле (см. (5))

$$PEZ = \max_{|\ell|=1} |\rho(\ell,A_1)-\rho(\ell,A_2)-\rho(\ell,A_3)+\rho(\ell,A_4)|.$$

На векторе BEK достигается максимум в этой формуле. В процессе выполнения подпрограмма TET обращается к подпрограмме YX при помощи оператора

$$CALL\ \ YX(P1,P2,B1,B2,T1,T2,TP,TB).$$

Все параметры входные. Выходные параметры: TP и TB . Число TP вычисляется по формуле (см. (6) и (7))

$$TP = \max\{TP, \max_{\ell\in S_i} |\xi(t,\ell)|\},$$

где $(P1, P2) = \ell_i$, $(B1, B2) = \ell_{i+1}$, $(T1, T2) = y$. На векторе TB достигается максимум.

Обращение к подпрограмме WWW имеет вид

CALL LOADGO(A,B,C,P,Q,SAG,EPS,TAYOS, OM1,OM2,KM,N,NB,KB,NC,KC,ICT,JCT, TT1,TT2,TT3,TT4,W1,W2,KW,WW1,WW2, KWW,EM1,EM2,'WWW').

Смысл всех параметров изложен выше. Выходные параметры: $W1$, $W2$, KW, $WW1$, $WW2$, KWW. В процессе выполнения подпрограмма WWW обращается к подпрограмме $CLOI$, которая строит сечения множеств позиционного поглощения. Процедура $CLOI$ – это оформленная в виде подпрограммы программа, описанная в статье [4] настоящего сборника. Обращение к подпрограмме $CLOI$ имеет вид

CALL CLOI .

Обмен параметрами с подпрограммой $CLOI$ осуществляется через общие блоки памяти с помощью операторов $COMMON$. Входные параметры: A, B, C, P, Q, N, NB, NC, KB, KC, MG, ICT, JCT, $TAYOS$, SAG, $TT1$, $TT2$, $TT3$, $TT4$, $GB1$, $GB2$. Выходные параметры $GB1$, $GB2$, MG. При первом обращении к подпрограмме $CLOI$, $GB1$, $GB2$ – массивы соответственно первых и вторых координат вершин многоугольника M^2, а на выходе – массивы первых и вторых координат вершин многоугольника $W^2(t_*)$. При втором обращении $GB1$ и $GB2$ – массивы первых и вторых координат вершин многоугольника M^2_ε, а на выходе – массивы координат вершин многоугольника $W^2_\varepsilon(t_*)$. Число

MG - количество вершин многоугольника.

Обращение к подпрограмме H имеет вид

CALL LOADGO(X1,X2,Y1,Y2,N,M,RO,RMAX,'H')

Входные параметры: $X1$, $X2$ - массивы первых и вторых координат вершин многоугольника $X \subset R^2$, $Y1$, $Y2$ - массивы первых и вторых координат вершин многоугольника $Y \subset R^2$. Вершины многоугольников должны быть упорядочены по часовой стрелке. Числа N, M - количество вершин многоугольников X и Y соответственно. Выходные параметры: RO - хаусдорфово расстояние $h(X,Y)$, $RMAX$ - вектор из R^2, на котором реализуется RO (см. (8)). В процессе выполнения подпрограмма H обращается к подпрограмме TH при помощи оператора

CALL TH(A1,A2,B1,B2,P1,P2,Q1,Q2,TRO,TMAX)

Подпрограмма вычисляет TRO по формуле

$$TRO = \max\{TRO, \max_{\ell \in \bar{S}} |\rho(\ell,X) - \rho(\ell,Y)|,$$

где

$$\bar{S} = \{\ell \in R^2 : |\ell| = 1, \ell = \alpha_1(A1,A2) + \alpha_2(B1,B2), \alpha_1,\alpha_2 \geq 0\},$$

$$\rho(\ell,X) = \ell^{(1)}P1 + \ell^{(2)}P2 \ , \ \ell \in \bar{S} \ ,$$

$$\rho(\ell,Y) = \ell^{(1)}Q1 + \ell^{(2)}Q2 \ , \ \ell \in \bar{S} \ ,$$

Все параметры входные. Выходные параметры: TRO и вектор $TMAX$, на котором реализуется TRO.

О с о б е н н о с т и   п р о г р а м м ы

1. Множества $P(t_i)$ и $Q(t_i)$ не должны быть точками.

2. Множество $W(t_i)$ в программе считается пустым не только в тех случаях, когда оно действительно пусто, но и в тех, когда оно является точкой.

3. В программе $CLOI$ задается целый параметр MDL. Если на каком-то шаге оказывается, что число всех нормалей, снятых с множеств $W(t_i)$, $P(t_i)$, $Q(t_i)$ превышает MDL, то множество $W(t_i)$ заменяется в последующих вычислениях на близкое к нему множество с меньшим числом нормалей. Дальнейшие построения, а следовательно, и полученная оценка в этом случае будут неточны.

К о н т р о л ь н ы й   п р и м е р

Дифференциальная игра второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_2 + v$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$|u| \leq 1 \ , \ |v| \leq 1 \ , \ x(\vartheta) \in M^1$$

с моментом окончания $\vartheta = 3$ и целевым множеством $M^1 = \{x \in R^2 : |x| \leq 3\}$ после преобразования $z(t) = X(\vartheta, t)x(t)$, где

$$X(\vartheta, t) = \begin{pmatrix} 1 & \vartheta - t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

фундаментальная матрица Коши, приводится к виду

$$\dot{z} = u + v$$

$$u \in P^1(t) = \{z \in R^2 : z^{(1)} = (\vartheta - t)z^{(2)},\ |z^{(2)}| \leq 1\},$$

$$v \in Q^1(t) = \{z \in R^2 : |z^{(1)}| \leq 1,\ z^{(2)} = 0\},$$

$$z(\vartheta) \in M^1.$$

Аппроксимирующую дифференциальную игру выберем следующим образом. Пусть $t_i = 3 - 0.01 \cdot i,\ i = 0, 1 \ldots$ – разбиение промежутка $t \leq 3$ с шагом $\Delta = 0.01$. Положим $P^2(t) = P^1(t_i),\ t \in (t_{i+1}, t_i]$, и $Q^2(t) = Q^1(t)$, поскольку $Q^1(t)$ постоянно. Взяв в качестве M^2 правильный 100-угольник, вписанный в M^1, рассмотрим игру

$$\dot{z} = u + v$$

$$u \in P^2(t),\ v \in Q^2(t),\ z(3) \in M^2.$$

Оценим расстояние $h(W^1(t_*), W^2(t_*))$ для $t_* = 2, 1, 0$. Примем $\sigma = \Delta/10$, $m = (0,0)$. Результаты счета по программе равны соответственно: 0.007414, 0.015517, 0.024412. На рис. 3 представлены множества $W^2(2)$, $W^2(1)$, $W^2(0)$.

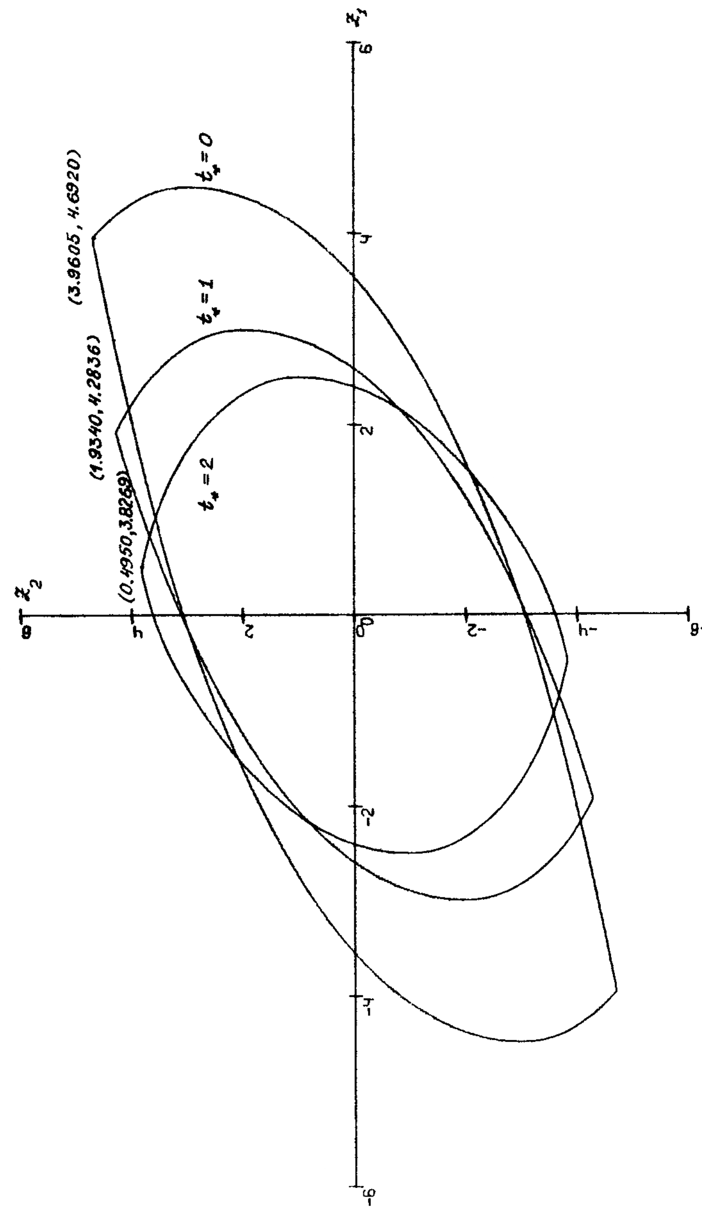
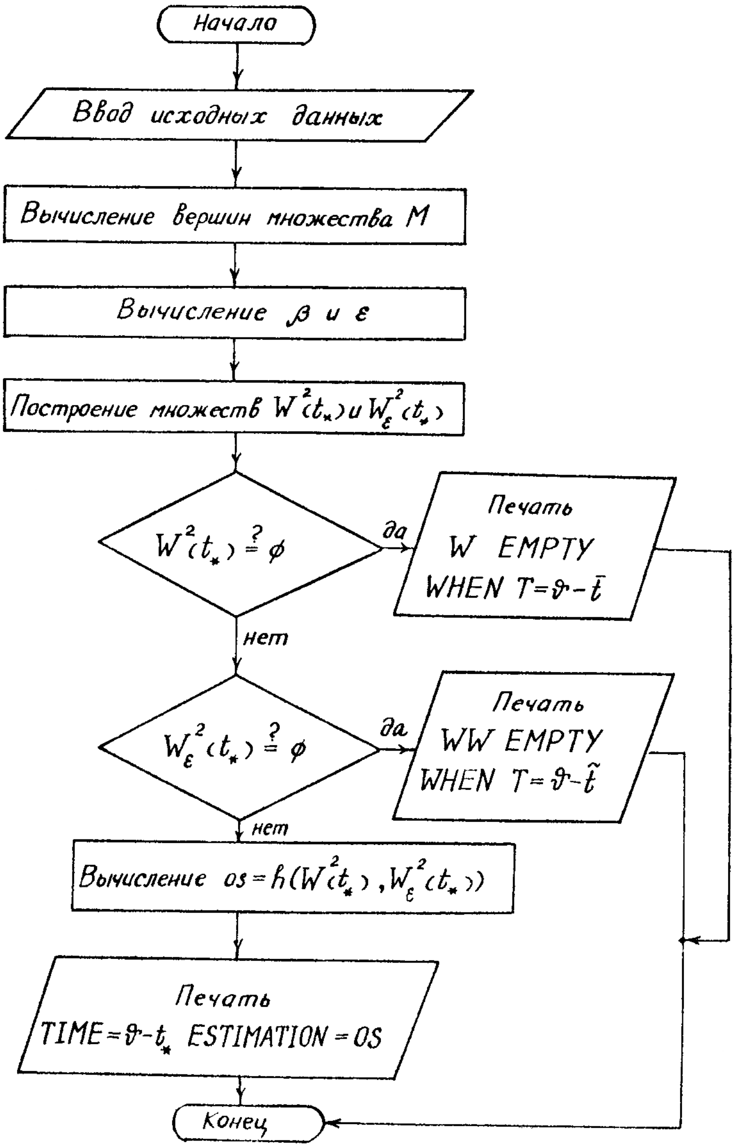


Рис. 3.

Блок-схема


Начало
Ввод исходных данных
Вычисление вершин множества M
Вычисление β и ε
Построение множеств $W^2(t_*)$ и $W^2_\varepsilon(t_*)$
$W^2(t_*) \overset{?}{=} \phi$
да
Печать
W EMPTY
WHEN $T=\vartheta-\bar{t}$
нет
$W^2_\varepsilon(t_*) \overset{?}{=} \phi$
да
Печать
WW EMPTY
WHEN $T=\vartheta-\tilde{t}$
нет
Вычисление $os = h(W^2(t_*), W^2_\varepsilon(t_*))$
Печать
TIME $=\vartheta-t_*$ ESTIMATION = OS
Конец

ТЕКСТ ПРОГРАММЫ

```
      PROGRAM PP
      DIMENSIONA(10,10),B(10,10),
      C(10,10),P(10,50),Q(10,50),
      OM1(300),OM2(300),W1(1000),
      W2(1000),WW1(1000),WW2(1000)
      ,RMAX(2),TP(10),FI(10)
      COMMON/A/A,N
      COMMON/TOB/TOBW,TOBWW,IL1,
      IL2
    1 FORMAT(10I3)
    2 FORMAT(10F7.3)
      READ1,N,NB,NC,KB,KC
      READ1,ICT,JCT
      READ2,((A(I,J),J=1,N),
      I=1,N)
      READ2,((B(I,J),J=1,NB),
      I=1,N)
      READ2,((C(I,J),J=1,NC),
      I=1,N)
      READ2,((P(I,J),J=1,KB),
      I=1,NB)
      READ2,((Q(I,J),J=1,KC),
      I=1,NC)
      READ2,DLINA
      READ2,TAYOS
      READ2,SAG
      READ1,KT
      READ2,DEL
      READ2,TT1,TT2          4
      READ2,EM1,E
      (1)=TAY
       PA
```

```
      OM1(I)=OM1(I)+EM1
   11 OM2(I)=OM2(I)+EM2
      CALL LOADGO(A,B,C,P,Q,
      SAG,KT,TP,1,N,NB,KB,NC,
      KC,FI,TT1,TT2,TT3,TT4,
      DLINA,'FINT')
      BET=FI(1)/PAD
      EPS=BET+DEL/PAD
  777 CONTINUE
      CALL LOADGO(A,B,C,P,Q,
      SAG,EPS,TAYOS,OM1,OM2,
      KM,N,NB,KB,NC,KC,TT1,
      TT2,TT3,TT4,W1,W2,KW,
      WW1,WW2,KWW,EM1,EM2,
      DLINA,'WWW')
      PRINT100,KW
      PRINT101,(W1(I),I=1,KW),
      (W2(I),I=1,KW)
  100 FORMAT(I3)
  101 FORMAT(5(4X,F7.3,2X,
      F7.3))
      IF(IL1.NE.0)GOTO30
      PRINT3,TOBW
    3 FORMAT(5X,15HW EMPTY
      WHEN T= ,F7.4)
      GOTO20
   30 IF(IL2.NE.0)GOTO3
      PRINT4,TOBWW
    4 FORMAT(5X,16HWW EMPTY
      WHE  = ,F7.4)
      G
    3          DGO(W1,W2
                W,OS,R
                 OS,C
                  5
```

На стр. 62-79 идёт текст программы на Фортране.

Л и т е р а т у р а

I. Боткин Н.Д. Численное построение сечений множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре.- Наст. сборник.

2. Боткин Н.Д. Оценка погрешности численных построений в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания.- Пробл.управления и теории информ., 1982, т.II, № 4, с.283-295.

3. Погрешность аппроксимации в дифференциальной игре./ Н.Д. Боткин; ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1983.- 31 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, II.04.83, № 1910-83. Деп.

4. Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С. Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания.- Наст.сборник.

5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры.- М.: Наука, 1974.- 456 с.

6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления.- М.: Наука, 1981.- 288 с.