

**АКАДЕМИЯ НАУК СССР
УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ
РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР**

(Материалы по математическому обеспечению ЭВМ)

Свердловск 1984

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕНЫ ИГРЫ И ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕ-
РЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

1. Постановка задачи

Рассматривается линейная позиционная дифференциальная игра двух лиц

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad (1)$$

$$x \in R^n, u \in R^p, v \in R^q, t \in [t_0, \vartheta].$$

с фиксированным моментом окончания ϑ . Здесь $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ - непрерывные матрицы соответствующих размерностей, x - фазовый вектор, u - управление первого игрока, v - второго, $t_0 < \vartheta$ - фиксированный момент времени. Управления u и v не стеснены никакими априорными ограничениями. Задан функционал платы (показатель качества процесса управления):

$$Y(x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]) = \quad (2)$$

$$= \int_{t_*}^{\vartheta} [\langle \Phi(t)u(t), u(t) \rangle - \langle \Psi(t)v(t), v(t) \rangle] dt + |x(\vartheta)|,$$

где символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение;
 $\langle \Phi(t)u, u \rangle$, $\langle \Psi(t)v, v \rangle$ — определено-положительные при $t_0 \leq t \leq \vartheta$ квадратичные формы, матрицы $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ непрерывны; $t_* \in [t_0, \vartheta]$ — момент начала процесса управления.

Для дифференциальной игры (1), (2) в работе [3] выведена формула цены игры

$$\rho(t_*, x_*) = \max_{|l| \leq 1, l \in R^n} [\langle l, X(\vartheta, t_*)x_* \rangle + \langle N(t_*)l, l \rangle - \lambda[t_*, |l|^2] + \lambda[t_*]] . \quad (3)$$

В этой формуле $X(\vartheta, t)$ — фундаментальная матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$, матрица $N(t_*)$ и число $\lambda[t_*]$ определены равенствами

$$N(t) = -\frac{1}{4} \int_t^{\vartheta} X(\vartheta, \tau) [B(\tau)\Phi^{-1}(\tau)B'(\tau) - C(\tau)\Psi^{-1}(\tau)C'(\tau)] \times X'(\vartheta, \tau) d\tau, \quad (4)$$

$$\lambda[t] = \max_{t \leq \tau \leq \vartheta} \max_{|l| \leq 1, l \in R^n} \langle N(\tau)l, l \rangle. \quad (5)$$

Используя (3), легко получить выражение для цены игры в случае, когда терминальный член в показателе качества зависит только от первых m координат вектора $x(\vartheta)$, а именно, имеет вид

$$\left[\sum_{j=1}^m x_j^2(\vartheta) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq m \leq n .$$

Действительно, выполнив известное преобразование $x(t) = X_m(\vartheta, t)x(t)$ [2,6], где $X_m(\vartheta, t)$ — матрица, составленная из первых m строк матрицы $X(\vartheta, t)$, перейдем от игры (1), (2) к эквивалентной дифференциальной игре m -го порядка без фазовой переменной в правой части системы уравнений, описывающих динамику. Показатель качества

$$Y(x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]) = \int_{t_*}^{\vartheta} [\langle \Phi(t)u[t], u[t] \rangle - \langle \Psi(t)v[t], v[t] \rangle] dt + |x(\vartheta)|$$

для эквивалентной игры ($|x(\vartheta)|$ — норма в R^m) имеет вид (2), поэтому справедлива формула цены игры вида (3). Возвращаясь к старой фазовой переменной x , получаем

$$\rho(t_*, x_*) = \max_{|l| \leq 1, l \in R^m} [\langle l, X_m(\vartheta, t_*)x_* \rangle + \langle N_m(t_*)l, l \rangle - \lambda_m[t_*]|l|^2] + \lambda_m[t_*]. \quad (6)$$

Матрица $N_m(t_*)$ в выражении (6) вычисляется по формуле (4) с заменой в этой формуле t на t_* и матрицы $X(\vartheta, \tau)$ на $X_m(\vartheta, \tau)$. Число $\lambda_m[t_*]$ определяется равенством (5) при условии, что $N(\tau)$ заменено в (5) на $N_m(\tau)$, а t на t_* .

Вычисление цены игры по формуле (6) сводится к решению задачи математического программирования на максимум квадрата — тичной формы m переменных. Эта задача не является простой с точки зрения реализации вычислений на ЭВМ. В данной статье излагается алгоритм сведения указанной задачи математического программирования к простым численным процедурам.

Кроме вычисления цены игры, нас интересует вопрос о построении оптимальной стратегии первого игрока. В работе [3]

оптимальная позиционная стратегия $u^{\circ}(t, x, \varepsilon)$ (ε - параметр точности) находится из соотношения

$$\begin{aligned} & \langle x - w^{\circ}, B(t)u^{\circ}(t, x, \varepsilon) \rangle + c^{\circ} \langle \Phi(t)u^{\circ}(t, x, \varepsilon), u^{\circ}(t, x, \varepsilon) \rangle = \\ & = \min_{u \in P} [\langle x - w^{\circ}, B(t)u \rangle + c^{\circ} \langle \Phi(t)u, u \rangle]. \end{aligned} \quad (7)$$

Символами w° , c° обозначены координаты точки, доставляющей минимум выражению

$$\rho(t, w) - c$$

при условии

$$|x - w|^2 + c^2 \leq \varepsilon \sigma(t).$$

Функция $\sigma(t)$ в последнем неравенстве возрастает с ростом t , вообще говоря, по экспоненциальному закону. Разность между гарантируемым стратегией $u^{\circ}(t, x, \varepsilon)$ результатом и ценой игры оценивается величиной $\varepsilon \sigma(\vartheta)$. При достаточно большой длине промежутка $[t_*, \vartheta]$ число $\sigma(\vartheta)$ может быть велико. Чтобы избавиться от этого недостатка, в настоящей работе для отыскания оптимальной стратегии используются несколько видоизмененные соотношения, соответствующие схеме управления со стабилизацией. Численная реализация этих соотношений, как и при нахождении цены игры, сводится к задаче математического программирования, но уже более сложной, чем вычисление цены по формуле (6).

На основе алгоритмов вычисления цены игры и оптимальной стратегии первого игрока разработана стандартная программа, которая строит реализацию фазовой траектории системы (I),

отвечающую оптимальной стратегии первого игрока со стабилизацией, и вычисляет вдоль этой траектории цену игры. За второго игрока в программу заложена стратегия экстремального прицеливания по градиенту функции цены игры. Можно использовать и другие способы управления второго игрока. В разделе 4 даны на этот счет соответствующие инструкции.

Игроки выбирают свои управления в силу принятых стратегий с шагом Δ . Цена вычисляется в каждой позиции $(t_i, x(t_i))$, где $t_i = t_* + i\Delta$, $i = 0, 1, \dots, \frac{\vartheta - t_*}{\Delta}$.

Программа рассчитана на случай постоянных матриц A , B , C , Φ , Ψ . Для вычисления цены игры постоянство этих матриц несущественно, и часть программы, реализующая нахождение цены, может быть легко приспособлена к случаю, когда A , B , C , Φ , Ψ зависят от t . При конструировании оптимальной стратегии со стабилизацией существенно независимость от времени лишь матриц A и B . Сделав небольшие изменения в программе, можно охватить случаи зависимости от t матриц C , Φ , Ψ .

2. А л г о р и т м в ы ч и с л е н и я ц е н н и г р ы

Пусть (t_*, x_*) - фиксированная позиция. Преобразуем формулу (6) к более удобному виду. Объединим второй и третий члены в выражении под знаком максимума и перейдем от операции \max к операции \min . Обозначив матрицу $\lambda_m[t_*]E - N_m[t_*]$ символом H и вектор $-X_m(\vartheta, t_*)x_*$ символом a , получим

$$\rho(t_*, x_*) = -\min_{|\ell| \leq 1} [\langle \ell, a \rangle + \langle H\ell, \ell \rangle] + \lambda_m [t_*].$$

Из определения числа $\lambda_m [t_*]$ вытекает, что собственные значения матрицы H неотрицательны. Следовательно, минимизируемая функция, стоящая в квадратных скобках, выпукла по ℓ .

Поскольку матрица H симметрична, то существует такая ортогональная матрица Y , что $G = Y'HY$ — диагональная матрица с собственными значениями μ_i матрицы H на диагонали. Столбцами матрицы Y являются единичные собственные векторы матрицы H . Сделаем в формуле (6) замену $\ell = Ys$, $s \in R^m$. С учетом того, что ортогональное преобразование не меняет длины вектора, имеем

$$\rho(t_*, x_*) = \min_{|s| \leq 1} [\langle Gs, s \rangle - 2\langle b, s \rangle] + \lambda_m [t_*],$$

где $b = -\frac{1}{2} Y' a$.

Таким образом, приходим к задаче минимизации выпуклой функции $f_0(s) = \langle Gs, s \rangle - 2\langle b, s \rangle$ при выпуклом ограничении $f_1(s) \leq 0$, $f_1(s) = \langle s, s \rangle - 1$. Для решения этой задачи используем теорему Куна-Таккера [1].

Составим функцию Лагранжа $L(\lambda, s) = f_0(s) + \lambda f_1(s)$. Поскольку для нашей задачи выполнено условие Слейтера, т.е. существует такая точка \bar{s} , что $f_1(\bar{s}) < 0$, то необходимые и достаточные условия оптимальности вектора s_0 можно сформулировать следующим образом.

Достаточность. Если существуют такие число λ^0 и вектор

s^0 , что

$$a1) \quad \lambda^0 \geq 0 \quad ,$$

$$a2) \quad L(\lambda^0, s^0) = \min_{s \in R^m} L(\lambda^0, s) ,$$

$$a3) \quad f_1(s^0) \leq 0$$

$$a4) \quad \lambda^0 f_1(s^0) = 0 ,$$

то вектор s^0 минимизирует функцию $f_0(s)$ при условии $f_1(s) \leq 0$.

Необходимость. Если вектор s^0 минимизирует $f_0(s)$ при ограничении $f_1(s) \leq 0$, то найдется такое число λ^0 , что пара λ^0 , s^0 будет удовлетворять условиям a1)-a4).

Выпишем конкретный вид условий a1)-a4) применительно к нашим функциям:

$$в1) \quad \lambda \geq 0 \quad ,$$

$$в2) \quad (G + \lambda E)s = \beta \quad ,$$

$$в3) \quad \langle s, s \rangle - 1 \leq 0 \quad ,$$

$$в4) \quad \lambda(\langle s, s \rangle - 1) = 0 \quad .$$

Приведем алгоритм нахождения пары λ^0 , s^0 , удовлетворяющей соотношениям в1)-в4). Поскольку матрица G диагональна, и на ее диагонали стоят неотрицательные числа $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m$, то при $\lambda > 0$ уравнение в2) разрешимо относительно вектора s . Имеем

$$s(\lambda) = (G + \lambda E)^{-1} \beta \quad , \quad \lambda > 0 \quad ,$$

или в координатной форме:

$$s_i(\lambda) = \frac{\beta_i}{\mu_i + \lambda}, \quad \lambda > 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Определим на промежутке $[0, +\infty)$ функцию f . Для $\lambda > 0$ положим

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i^2}{(\mu_i + \lambda)^2}. \quad (8)$$

Значение $f(0)$ зададим равенством

$$f(0) = \lim_{\lambda \rightarrow +0} f(\lambda).$$

Отметим некоторые свойства функции f . Для положительных λ значение $f(\lambda)$ совпадает с $\langle s(\lambda), s(\lambda) \rangle$. При $\lambda = 0$ значение $f(0)$ может быть как конечным, так и бесконечным. Бесконечность $f(0)$ означает, что уравнение в2) не имеет решения при $\lambda = 0$. Если же $f(0)$ конечно, то уравнение в2) имеет решение при $\lambda = 0$ (возможно не единственное), и для каждого решения s^* выполнено равенство $f(0) = \langle s^*, s^* \rangle$. Непосредственные вычисления показывают, что при $\lambda > 0$ первая производная $\frac{df}{d\lambda}(\lambda)$ отрицательна, а вторая $\frac{d^2f}{d\lambda^2}(\lambda)$ неотрицательна. Следовательно, функция f выпукла и монотонно убывает. Легко видеть, что $f(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Качественный характер функции f в случае $f(0) < \infty$ показан на рис.1. Рис. 2 соответствует случаю $f(0) = \infty$.

Рассмотрим уравнение $f(\lambda) = 1$. Если существует по-

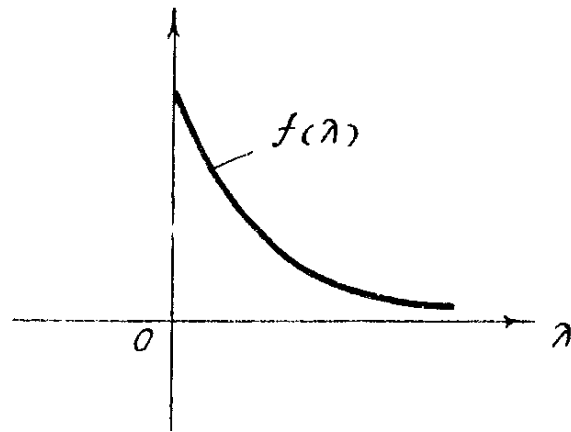


Рис. 1

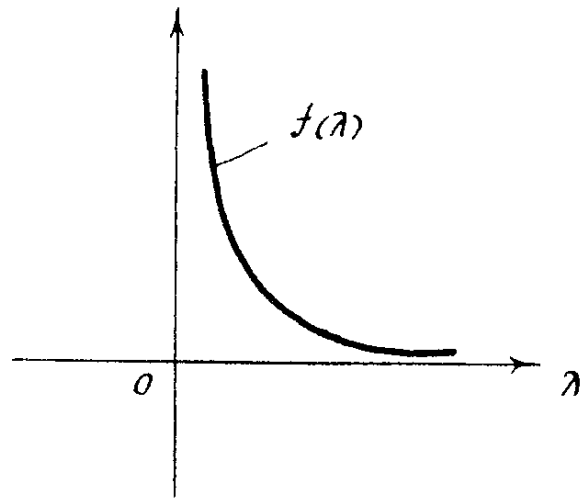


Рис. 2

положительное решение λ^0 этого уравнения, то пара λ^0 , $s^0 = s(\lambda^0)$ будет единственной оптимальной парой.

Предположим теперь, что не существует положительного решения уравнения $f(\lambda) = 1$. Примем $\lambda^0 = 0$, а вектор s^0 определим формулой

$$s_i^0 = \begin{cases} \frac{b_i}{\mu_i}, & b_i \neq 0 \\ 0, & b_i = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Покажем, что $\mu_i \neq 0$ при $b_i \neq 0$. Действительно, из нашего предположения следует, что $f(0) \leq 1$. Поэтому уравнение в2) имеет решение при $\lambda = 0$. Последнее означает, что $\mu_i = 0$ только тогда, когда $b_i = 0$. Пара $\lambda^0 = 0$, s^0 очевидно удовлетворяет условию в2), но тогда в силу свойств функции f имеем $f(0) = \langle s^0, s^0 \rangle$. Так как $f(0) \leq 1$, то $\langle s^0, s^0 \rangle \leq 1$, т.е. выполнено условие в3). Условие в4) выполнено тривиальным образом. Следовательно, пара $\lambda^0 = 0$, s^0 является локальной оптимальной парой.

Отметим, что если вектор, минимизирующий $f_0(s)$ при ограничении $f_j(s)$, не единствен, то обязательно реализуется случай $\lambda^0 = 0$, и формула (9) дает один из минимизирующих векторов, а именно тот из них, который имеет наименьшую длину.

Таким образом, нахождение минимизирующего вектора s^0 сводится к вычислению точки пересечения графиков функций $y = f(\lambda)$ и $y = 1$. Для этого используется метод Ньютона. Начальное приближение в силу выпуклости и монотонного

убывания функции f должно быть взято слева от искомой точки пересечения. Вид функции $f(\lambda)$ позволяет достаточно эффективно выбирать начальное приближение. Поясним, как это сделано в программе.

Положим $\beta = \max \{ |b_i| - \mu_i : i = \overline{1, m} \}$. Если $\beta > 0$, то непосредственно из формулы (8) для функции f вытекает неравенство $1 \leq f(\beta) \leq m$. Поэтому возьмем число β в качестве начального приближения. В случае $\beta \leq 0$ выполняется неравенство $f(0) \leq m$. Если $f(0) \geq 1$, то берем нуль в качестве начального приближения. Если же $f(0) < 1$, то уравнение $f(\lambda) = 1$ не имеет решения, то есть реализуется случай $\lambda^0 = 0$, и вектор J^0 находится по формуле (9).

Блок-схема алгоритма вычисления вектора J^0 приведена на рис. 3.

3. Вычисление оптимального гарантирующего управления первого игрока

Определение стратегии U^0

Как отмечалось в первом разделе, оптимальная стратегия $u^0(t, x, \varepsilon)$ из [3] не очень удобна. Рассмотрим оптимальную стратегию $U^0(t, x, \varepsilon)$ первого игрока, использующую стабилизирующую добавку. Способы управления со стабилизацией описаны в [2, § 59].

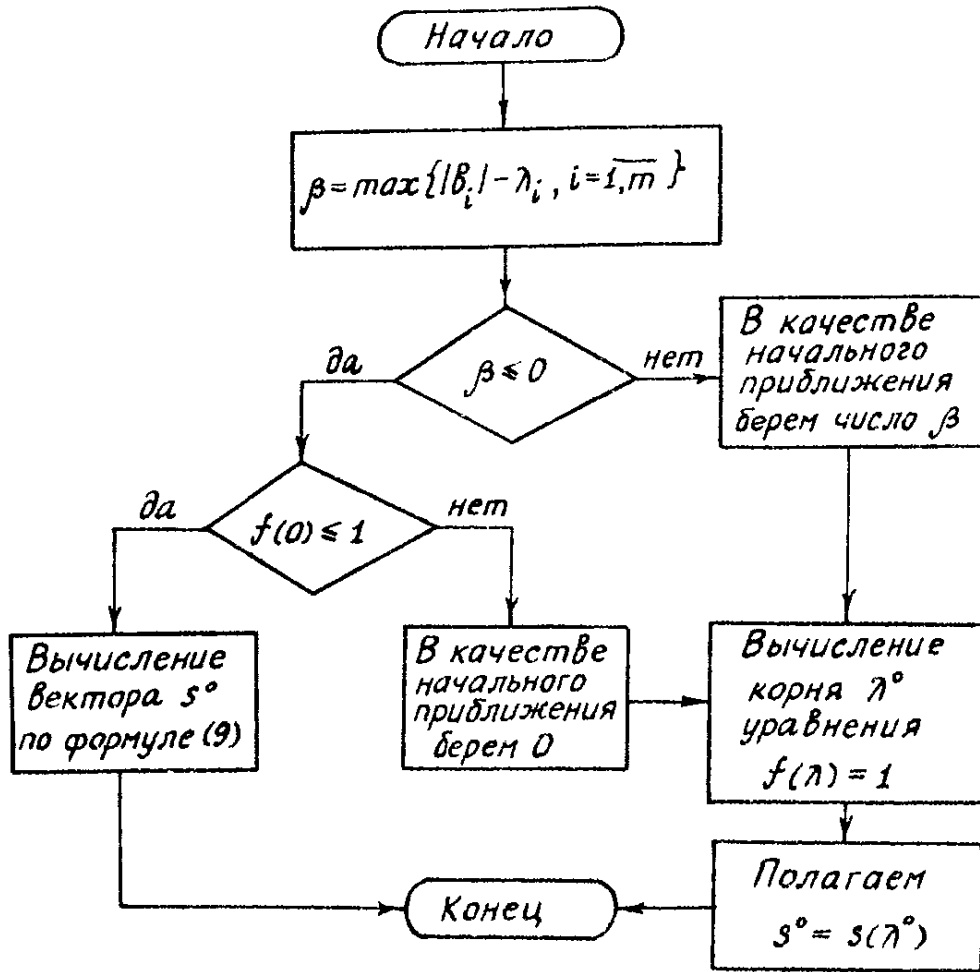


Рис.3. Блок-схема вычисления вектора s^0 .

Будем считать, что матрицы A, B постоянны и система $\dot{x} = Ax + Bu$ стабилизируема [4]. Выберем матрицу P так, чтобы матрица $A + BP$ имела отрицательные собственные значения. Найдем симметричную положительную матрицу Λ из условия

$$\frac{d}{dt} \langle \Lambda x, x \rangle \Big|_{\dot{x} = (A + BP)x} = -\alpha \langle x, x \rangle,$$

где α - заданное положительное число. Известно [5], что такая матрица Λ существует и единственна.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть задана позиция $(t, x) \in [t_*, \vartheta) \times R^n$. Определим пару $w_0 = w_0(t, x, \varepsilon), c_0 = c_0(t, x, \varepsilon)$ из соотношения

$$\rho(t, w_0(t, x, \varepsilon)) - c_0(t, x, \varepsilon) = \min_{w, c} [\rho(t, w) - c] \quad (10)$$

при условии

$$\langle \Lambda(x - w), x - w \rangle + c^2 \leq \varepsilon^2. \quad (11)$$

Найдем такой вектор $\tilde{u}(t, x, \varepsilon) \in R^p$, что

$$\min_u [\langle \Lambda(x - w_0)Bu + c_0 \Phi u, u \rangle] = \quad (12)$$

$$= \langle \Lambda(x - w_0), B\tilde{u}(t, x, \varepsilon) \rangle + c_0 \langle \Phi \tilde{u}(t, x, \varepsilon), \tilde{u}(t, x, \varepsilon) \rangle.$$

Формула (12) аналогична соотношению (7). Положим

$$U^\circ(t, x, \varepsilon) = \tilde{u}(t, x, \varepsilon) + P(x - w_0(t, x, \varepsilon)).$$

Второе слагаемое здесь имеет смысл стабилизирующей добавки [2]. Стратегия U^0 обеспечивает разность между гарантированным результатом и ценой игры не большую, чем величина $[1 + (\vartheta - t_*)] \xi \varepsilon$, где ξ — постоянная, не зависящая от длины промежутка $[t_*, \vartheta]$.

Переход к задаче выпуклого программирования. Применение теоремы Куна — Таккера

Опишем алгоритм вычисления значения стратегии U^0 в произвольной фиксированной позиции $(t, x) \in [t_0, \vartheta) \times R^n$. Дифференцируя по u выражение в квадратных скобках формулы (12), имеем

$$\tilde{u}(t, x, \varepsilon) = - \frac{1}{2c_0(t, x, \varepsilon)} \Phi^{-1}(t) B' \Lambda(x - w_0(t, x, \varepsilon)).$$

Таким образом, основная трудность при нахождении U^0 заключается в вычислении пары w_0, c_0 , удовлетворяющей соотношению (10) при условии (11). Перейдем к решению этой задачи.

Подставим в правую часть равенства (10) выражение (6) для цены игры. Получим

$$\min_{w, c} \max_{|l| \leq 1} [\langle l, X_m(\vartheta, t) w \rangle + \langle N_m(t) l, l \rangle - \lambda [t] \langle l, l \rangle + \lambda [t] - c] \quad (13)$$

Здесь минимум берется по w и c , которые связаны условием (11). Функция, стоящая в квадратных скобках, вогнута по

l и линейна по w, c . Кроме того, при каждом фиксированном l минимум этой функции по w, c достигается на единственной паре $w(l), c(l)$. Поэтому операции \min и \max можно переставить. Выполнив эту перестановку и обозначив $K(t) = N(t) - \lambda [t] E$, приходим к выражению

$$\max_{|l| \leq 1} [\langle l, X_m(\vartheta, t)x \rangle + \langle K(t) l, l \rangle + \quad (14)$$

$$+ \min_{w, c} [\langle l, X_m(\vartheta, t)(w-x) \rangle - c] + \lambda [t] .$$

Покажем, что в (14) минимум по w, c , удовлетворяющим условию (II), достигается при

$$w(l) = x - \varepsilon \Lambda^{-1} X_m'(\vartheta, t) l / \sqrt{1 + \langle \mathcal{D}l, l \rangle}, \quad (15)$$

$$c(l) = \varepsilon / \sqrt{1 + \langle \mathcal{D}l, l \rangle} .$$

Символом \mathcal{D} в формулах (15) обозначена матрица $X_m(\vartheta, t) \Lambda^{-1} X_m'(\vartheta, t)$ размера $m \times m$. Положим $h = w - x$ и рассмотрим $n+1$ -мерное пространство векторов (h, c) . Определим в этом пространстве скалярное произведение формулой

$$\langle (h_1, c_1); (h_2, c_2) \rangle_{\Lambda} = \langle \Lambda h_1, h_2 \rangle + c_1 c_2 .$$

Норму, соответствующую этому произведению, обозначим $\| \cdot \|_{\Lambda}$. С учетом введенных обозначений задачу отыскания минимума в

(I4) при ограничении (II) можно записать в виде

$$\min_{\|h, c\|_{\Lambda} \leq 1} \langle (\Lambda^{-1} X'_m(\vartheta, t) \ell, -1); (h, c) \rangle_{\Lambda} .$$

Очевидно, что минимум достигается на векторе

$$(h(\ell), c(\ell)) = -\varepsilon \frac{(\Lambda^{-1} X'_m(\vartheta, t) \ell, -1)}{\|(\Lambda^{-1} X'_m(\vartheta, t) \ell, -1)\|_{\Lambda}} .$$

Отсюда

$$h(\ell) = -\varepsilon \Lambda^{-1} X'_m(\vartheta, t) / \sqrt{1 + \langle \mathcal{D}\ell, \ell \rangle} ,$$

$$c(\ell) = \varepsilon / \sqrt{1 + \langle \mathcal{D}\ell, \ell \rangle} .$$

Возвращаясь от переменной h к переменной w , получим (I5).

Вычислив минимум по w, c в (I4) и заменив в этой формуле \max на \min , получим для правой части равенства (I0) выражение

$$-\min_{\|\ell\| \leq 1, \ell \in R^m} [K\ell, g] + \langle M\ell, \ell \rangle + \varepsilon \sqrt{1 + \langle \mathcal{D}\ell, \ell \rangle} + \lambda[t] , \quad (I6)$$

где $g = -X'_m(\vartheta, t)x$, $M = -K(t)$.

Обозначим через $f_0(\ell)$ минимизируемую функцию в (I6). Положим $f_1(\ell) = \langle \ell, \ell \rangle - 1$. Приходим к задаче минимизации функции $f_0(\ell)$ при условии $f_1(\ell) \leq 0$. Вычисляя вторую производную от функции f_0 по ℓ , убеждаемся в ее положительной определенности при всех $\ell \in R^m$. Отсю-

да вытекает строгая выпуклость по ℓ функции f_0 . Применим к полученной задаче теорему Куна-Таккера.

Составим функцию Лагранжа $L(\lambda, \ell) = f_0(\ell) + \lambda f_1(\ell)$. Используя формулировку необходимых и достаточных условий теоремы, приведенную во втором разделе, а также дифференцируемость по ℓ функции $L(\lambda, \ell)$, получим для отыскания оптимальной пары λ^0, ℓ^0 соотношения:

$$c1) \quad \lambda \geq 0,$$

$$c2) \quad g + (2M + 2\lambda E + \frac{\varepsilon D}{\sqrt{1 + \langle D\ell, \ell \rangle}}) \ell = 0,$$

$$c3) \quad \langle \ell, \ell \rangle - 1 \leq 0,$$

$$c4) \quad \lambda (\langle \ell, \ell \rangle - 1) = 0.$$

Левая часть соотношения c2) представляет из себя с точностью до транспонирования частную производную $\frac{dL}{d\ell}(\lambda, \ell)$.

Итак, задача вычисления значений стратегии $U^0(t, x, \varepsilon)$ сведена к нахождению вектора ℓ^0 , доставляющего минимум функции $f_0(\ell)$ при ограничении $f_1(\ell) \leq 0$.

А л г о р и т м в ы ч и с л е н и я м и н и м и з и р у ю щ е г о в е к т о р а ℓ^0

Из предыдущего ясно, что для отыскания минимизирующего вектора ℓ^0 в выражении (I6) достаточно найти пару λ^0, ℓ^0 , удовлетворяющую соотношениям c1)–c4). Перейдем к описанию алгоритма вычисления такой пары.

Покажем сначала, как при фиксированном $\lambda \geq 0$ найти решение $\ell(\lambda)$ уравнения c2). Перепишем уравнение c2) в виде системы

$$\begin{cases} g + (2M + 2\lambda E + \frac{\varepsilon \mathcal{D}}{\sqrt{1+d}})l = 0 \\ \langle \mathcal{D}l, l \rangle = d. \end{cases} \quad (I7)$$

Так как собственные значения матрицы M неотрицательны, а матрица \mathcal{D} — положительно определенная, то при $\lambda \geq 0$ матрица $S_\lambda(d) = 2M + 2\lambda E + \frac{\varepsilon \mathcal{D}}{\sqrt{1+d}}$ невырожденная, и первое уравнение системы (I7) можно разрешить относительно l . Обозначим решение через $l_\lambda(d)$. Имеем $l_\lambda(d) = S_\lambda(d)^{-1}g$. Подставив $l_\lambda(d)$ во второе уравнение системы (I7), получим

$$\langle \mathcal{D}l_\lambda(d), l_\lambda(d) \rangle = d. \quad (I8)$$

Отметим, что если уравнение (I8) имеет корень d_λ^* , то в силу положительной определенности матрицы \mathcal{D} он может быть только положительным. Очевидно, что искомый вектор $l(\lambda)$ (т.е. решение уравнения с2) находится по формуле $l(\lambda) = l_\lambda(d_\lambda^*)$. Если же уравнение (I8) решения не имеет, то это означает, что не имеет решения и уравнение с2). Из дальнейшего будет ясно, что последнее возможно лишь в случае $\lambda = 0$.

Исследуем уравнение (I8), для чего рассмотрим при $d \in [0, +\infty)$ функцию

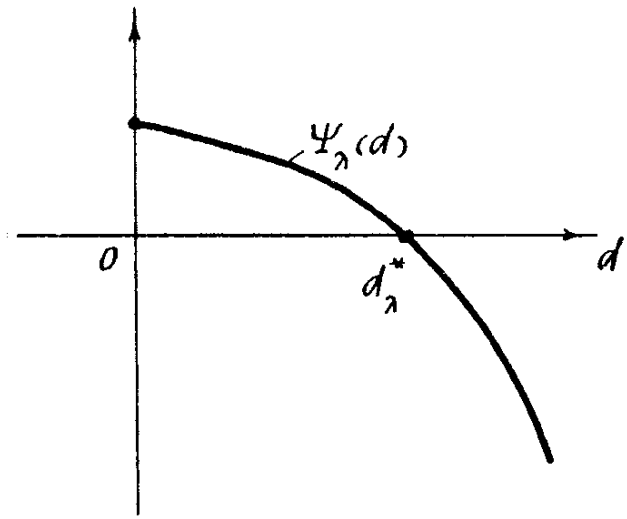
$$\psi_\lambda(d) = \langle \mathcal{D}l_\lambda(d), l_\lambda(d) \rangle - d.$$

Вычислив вторую производную от ψ_λ по d (используя при

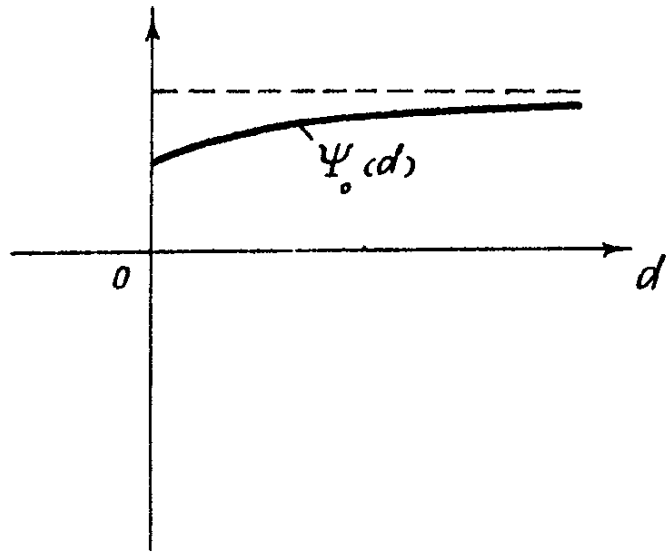
этом первое уравнение системы (I7) и теорему о производной неявной функции), убедимся в ее неположительности. Следовательно, функция ψ_λ вогнута по d . Легко проверяется, что $\psi_\lambda(0) > 0$ для $\lambda \geq 0$. Кроме того, если $\lambda > 0$, то $\psi_\lambda(d) \rightarrow -\infty$ при $d \rightarrow \infty$. Если же $\lambda = 0$, то $\psi_\lambda(d)$ может оставаться положительной при всех $d \geq 0$. Таким образом, в случае $\lambda > 0$ уравнение (I8) имеет корень d_λ^* (рис. 4). В случае $\lambda = 0$ оно может не иметь решения (рис. 5).

Корень уравнения (I8) отыскивается методом Ньютона. Поскольку функция $\psi_\lambda(d)$ вогнута и при переходе через корень меняет знак с плюса на минус, то начальное приближение в методе Ньютона надо брать справа от корня.

Опишем процедуру нахождения начального приближения. В ходе этой процедуры проверяется также, имеет ли уравнение (I8) решение. Полагаем $d_1 = 10$ и находим $\psi_\lambda(d_1)$. Если $\psi_\lambda(d_1) \leq 0$, то берем d_1 за начальное приближение. Если $\psi_\lambda(d_1) > 0$, то полагаем $d_2 = 10 d_1$ и вычисляем $\psi_\lambda(d_2)$. Процесс продолжаем до тех пор, пока для некоторого $k \leq 10$ не получим $\psi_\lambda(d_k) \leq 0$. Число d_k и возьмем в качестве начального приближения. Если для любого $1 \leq k \leq 10$ имеем $\psi_\lambda(d_k) > 0$, то считаем, что уравнение (I8) не имеет корня, поскольку, если даже и существует корень d_λ^* , то $d_\lambda^* > 10^{10}$. Но тогда из (I8) получим $\langle \mathcal{D}v(\lambda), v(\lambda) \rangle > 10^{10}$. Отсюда $\langle v(\lambda), v(\lambda) \rangle \geq 10^{10}/\mu$, где μ — наибольшее собственное значение матрицы \mathcal{D} . Естественно считать, что все собственные значения матрицы \mathcal{D} меньше 10^{10} , т.к. оперирование с большими числами выводит за пределы возможностей машины. По-



Puc. 4



Puc. 5

этому $\langle v(\lambda), v(\lambda) \rangle > 1$ и вектор $v(\lambda)$ не может быть оптимальным (не удовлетворяет соотношению с3)).

Таким образом, задача нахождения вектора $v(\lambda)$ по заданному $\lambda \geq 0$ решена. Используя формулу для производной неявной функции, нетрудно из соотношения с2) найти выражение для $\frac{dv}{d\lambda}(\lambda)$ через $v(\lambda)$. Алгоритм отыскания $v(\lambda)$ и $\frac{dv}{d\lambda}(\lambda)$ по заданному $\lambda \geq 0$ оформлен в виде подпрограммы.

Пара λ^0, v^0 , удовлетворяющая условиям с1)-с4), ищется следующим образом. Положим $\lambda = 0$ и найдем $v(0)$ - решение уравнения с2). Если решение $v(0)$ существует и при этом $\langle v(0), v(0) \rangle \leq 1$, то пара $\lambda^0 = 0, v^0$ - искомая. Предположим теперь, что либо: а) нет решения $v(0)$, либо: в) решение $v(0)$ есть, но $\langle v(0), v(0) \rangle > 1$. В каждом из этих случаев переходим к отысканию корня уравнения

$$\langle v(\lambda), v(\lambda) \rangle = 1. \quad (I9)$$

Покажем, что существует положительный корень уравнения (I9). Рассмотрим функцию $f(\lambda) = \langle v(\lambda), v(\lambda) \rangle$. Используя соотношение с2) и теорему о производной неявной функции, можно подчитать $\frac{df}{d\lambda}(\lambda)$, $\frac{d^2f}{d\lambda^2}(\lambda)$ и убедиться, что $\frac{df}{d\lambda}(\lambda) < 0$, $\frac{d^2f}{d\lambda^2}(\lambda) \geq 0$ для $\lambda \geq 0$. Нетрудно проверить, что $f(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Кроме того, в случае в) имеем $f(0) = \langle v(0), v(0) \rangle > 1$, а в случае а) легко показать, что $f(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +0$. Следовательно, уравнение (I9) имеет положительное решение.

Решение уравнения (I9) отыскивается методом Ньютона. По-

сколькx f выпукла и монотонно убывает, то начальное приближение для метода Ньютона следует выбирать слева от корня.

Это реализовано в программе следующим образом. Полагаем

$\lambda_1 = 0,5$. Если $f(\lambda_1) \geq 1$, то берем λ_1 за начальное приближение. В случае $f(\lambda_1) < 1$ вычисляем $\lambda_2 = \lambda_1/4$. Процесс продолжаем до тех пор, пока для некоторого k не получим $f(\lambda_k) > 1$. Число λ_k и возьмем в качестве начального приближения. Корень λ° уравнения (19) определяет единственный минимизирующий вектор $\ell^\circ = \ell(\lambda^\circ)$.

Описание алгоритма отыскания оптимальной пары $\lambda^\circ; \ell^\circ$ закончено. После подстановки ℓ° в (15) получим $w^\circ = w(\ell^\circ)$, $c^\circ = c(\ell^\circ)$. Далее находим значение $U^\circ(t, x, \varepsilon)$.

4. Краткая характеристика программы

Программа написана на языке ФОРТРАН-ДУБНА для БЭСМ-6. Имя головной программы WAY, подпрограммы: BF, BDF, BOPTL, BPSI, PSQPSI, VALUE, CONTR1, FAN, CONTR2, REY, FUND, REGA, CENA, FKT, QFKT. Для интегрирования дифференциального уравнения (I) используется стандартная программа INTSTP из библиотеки стандартных программ ОИЯИ ДУБНА.

Программа рассчитана на случай постоянных матриц A , B , C , Φ , Ψ и предназначена для вычисления цены дифференциальной игры (I) с показателем качества

$$Y_m(x[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]) = \int_{t_*}^{\theta} [\langle \Phi u(t), u'(t) \rangle -$$

$$-\langle \Psi v[t_1], v[t_1] \rangle] dt + \left[\sum_{i=1}^m x_i^2(\vartheta) \right]^{1/2},$$

а также для построения траекторий системы (I) в силу оптимальной стратегии $U^\circ(t, x, \varepsilon)$ первого игрока. За второго игрока используется стратегия $V(t, x)$, имеющая смысл экстремального прицеливания по градиенту функции цены игры. Максимальная допустимая размерность системы (I) $n=10$.

Перед началом работы программы *WAY* на магнитную ленту должны быть записаны: исходные данные A, B, C, t_* , $\vartheta, \Delta, n, m, \rho, q$; матрицы $Y(t_i), X_m(\vartheta, t_i), N_m(t_i)$ собственные значения матриц $N_m(t_i)$. Здесь t_i - узлы разбиения отрезка $[t_*, \vartheta]$ с постоянным шагом Δ . Отмеченные исходные данные считываются программой *WAY* с магнитной ленты, а остальные исходные данные (матрицы Φ, Ψ, P, Λ , начальная позиция (t_*, x_*) , число ε) вводятся с перфокарт. В процессе работы по мере надобности считываются матрицы $Y(t_i), X_m(\vartheta, t_i), N_m(t_i)$ и собственные значения матриц $N_m(t_i)$.

Предварительная запись на магнитную ленту указанной выше информации производится вспомогательной программой *TRA*. Программа *TRA* использует подпрограммы *SUB2, FUND, PR*, а также стандартную программу *INTSTP* для интегрирования дифференциального уравнения $\dot{x} = A'x$ при вычислении фундаментальных матриц $X_m(\vartheta, t_i)$ и стандартную программу *AEN1R* из библиотеки стандартных программ *MGU* для вычисления матриц $Y(t_i)$ и собственных значений матриц $N_m(t_i)$. Интеграл в выражении (4) для $N_m(t)$

подсчитывается методом Симпсона.

Б л о к - о х е м а

Напомним, что выражение для стратегии $U^\circ(t, x, \varepsilon)$ содержит два слагаемых: член $\tilde{u}(t, x, \varepsilon)$ и стабилизирующую добавку. Обозначим $\tilde{u}[t] = \tilde{u}(t, x[t], \varepsilon)$, а символом $u_{CT}[t]$ — реализацию стабилизирующей добавки вдоль движения системы. Положим

$$\beta_{CT}(t) = \int_{t_*}^t [\langle \Phi(\tilde{u}[\tau] + u_{CT}[\tau]), \tilde{u}[\tau] + u_{CT}[\tau] \rangle - \langle \Psi v[\tau], v[\tau] \rangle] d\tau,$$

$$\beta(t) = \int_{t_*}^t [\langle \Phi \tilde{u}[\tau], \tilde{u}[\tau] \rangle - \langle \Psi v[\tau], v[\tau] \rangle] d\tau,$$

$$\alpha(t) = \int_{t_*}^t \langle u_{CT}[\tau], u_{CT}[\tau] \rangle d\tau.$$

Остальные обозначения в блок-схеме (рис. 6) введены в предыдущих разделах.

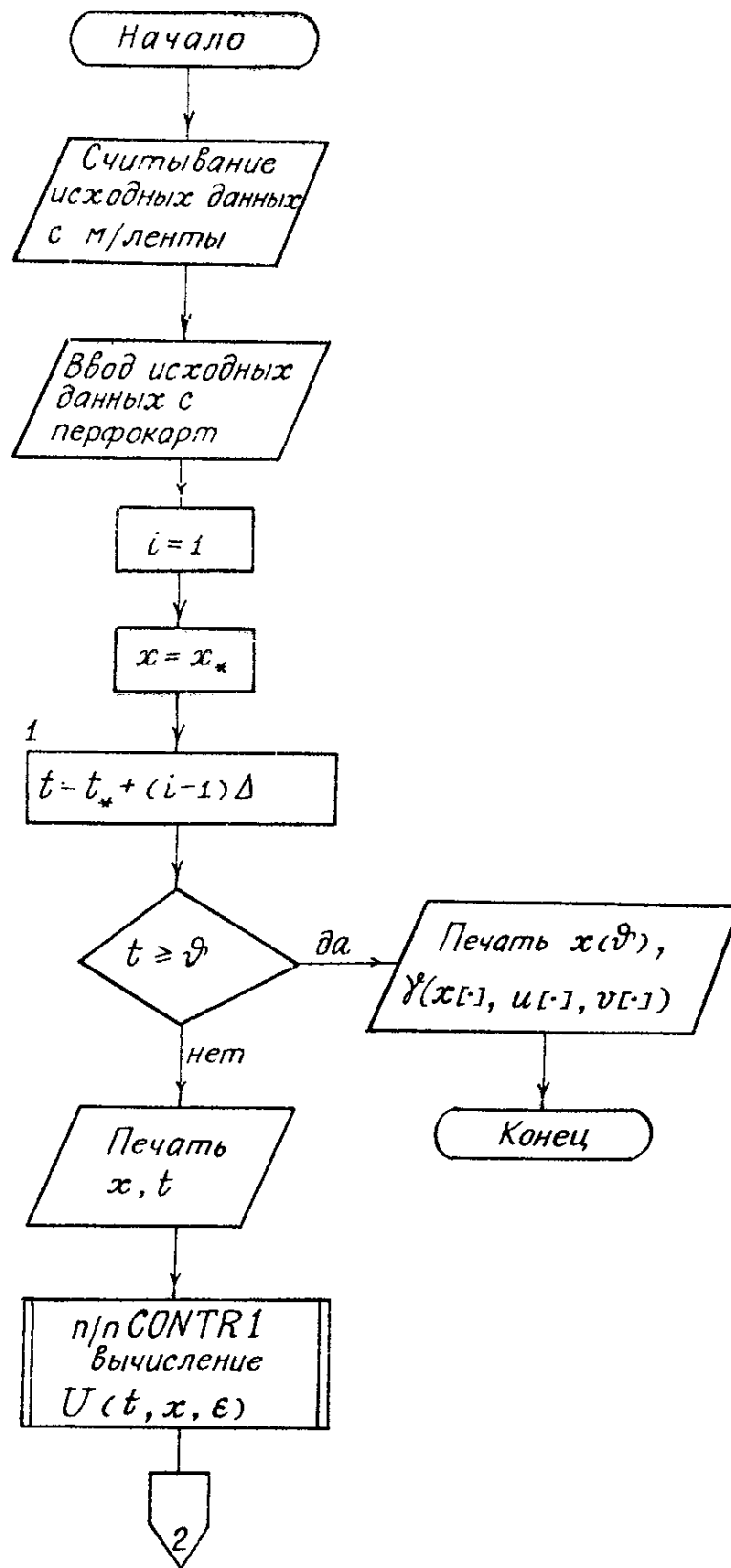
И с п о л ь з у е м ы е п е р е м е н н ы е

N — порядок системы (I),

$N1$ — число m слагаемых в терминальном члене функционала платы,

$A(10, 10)$ — двумерный массив, содержащий матрицу A системы (I),

$B(10, 10)$ — двумерный массив, содержащий матрицу B ,



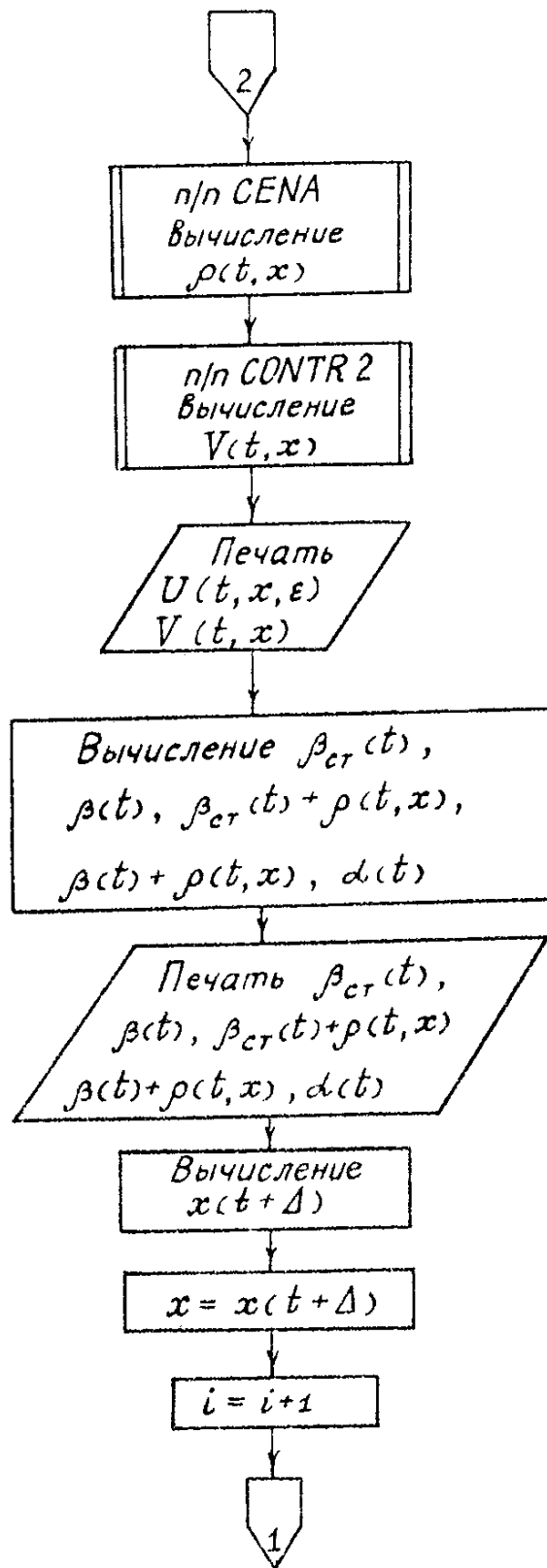


Рис.6. Блок-схема программы WAY.

- $C(10, 10)$ – двумерный массив, содержащий матрицу C ,
 $F01(10, 10)$ – двумерный массив, содержащий матрицу Φ
 функционала платы,
 $F02(10, 10)$ – двумерный массив, содержащий матрицу Ψ
 функционала платы,
 NB – размерность p управления первого игрока,
 NC – размерность q управления второго игрока,
 $GINV(10, 10)$ – двумерный массив, содержащий матрицу A^{-1} ,
 $PP(10, 10)$ – двумерный массив, содержащий матрицу P ,
 $T\theta$ – момент t_0 ,
 TET – момент окончания игры ϑ ,
 TZ – момент t_* начала процесса управления,
 $X(10)$ – одномерный массив, содержащий координаты фазового
 вектора x (в начальный момент t_* массив
 содержит координаты начальной точки x_*),
 EPS – число ε ,
 $STEP$ – шаг Δ разбиения отрезка $[t_0, \vartheta]$ точками t_i ,
 MI – количество частей дополнительного разбиения отрезков
 $[t_i, t_{i+1}]$ при интегрировании уравнения (I),
 $U(10)$ – одномерный массив, содержащий координаты вектора
 $U^\circ(t_i, x(t_i), \varepsilon)$,
 $V(10)$ – одномерный массив, содержащий координаты вектора
 $V(t_i, x(t_i))$,

- CEN** - значение $\rho(t_i, x(t_i))$ функции цены игры,
SUM - значение $\beta(t_i)$,
SUM1 - величина $\beta_{CT}(t_i)$,
CYMMA - сумма $\beta(t_i) + \rho(t_i, x(t_i))$,
CYMMA1 - сумма $\beta_{CT}(t_i) + \rho(t_i, x(t_i))$,
PUINT - величина $\alpha(t_i)$,
PLATA - значение показателя качества γ_m^* без учета стабилизирующей добавки (т.е. при подчете γ_m^* в качестве $u[\tau]$ берем не $\tilde{u}[\tau] + u_{CT}[\tau]$, а только $\tilde{u}[\tau]$),
PLATA1 - значение показателя качества γ_m^* с учетом стабилизирующей добавки.

В в о д д а н н ы х и в ы в о д р е з у л ь т а т о в

В таблице I показан порядок ввода с перфокарт исходных данных для работы программы **TRA**. Последовательность ввода информации для программы **WAY** представлена в таблице 2. Там, где информация уместается на одной карте, в графе "количество чисел на одной перфокарте" стоит прочерк.

Перед началом счета на печать выдаются исходные данные задачи. Результатами счета являются: траектория системы (I) в силу стратегий $U^o(t, x, \epsilon)$, $V(t, x)$ цена игры в текущей позиции $(t_i, x(t_i))$, реализации стратегий $U^o(t, x, \epsilon)$, $V(t, x)$ вдоль движения системы, значение показателя качества γ_m^* . Для каждого момента t_i информация на печать выдается в следующем виде:

Таблица 1

Вводимая информация	Количество чисел на одной перфокарте	Формат
<i>N, N1, NB, NC, MI</i>	-	<i>5I3</i>
<i>T0, TET, STEP</i>	-	<i>10 F7.3</i>
<i>A</i> (по строкам)	10	<i>10 F7.3</i>
<i>C</i> (по строкам)	10	<i>10 F7.3</i>
<i>B</i> (по строкам)	10	<i>10 F7.3</i>
<i>F1</i> (по строкам)	10	<i>10 F7.3</i>
<i>F2</i> (по строкам)	10	<i>10 F7.3</i>

Таблица 2

Вводимая информация	Количество чисел на перфокарте	Формат
<i>TZ</i>	-	<i>F7.3</i>
<i>X</i>	-	<i>F7.3</i>
<i>MI</i>	-	<i>I3</i>
<i>EPS</i>	-	<i>F7.3</i>
<i>F01</i> (по строкам)	10	<i>F7.3</i>
<i>F02</i> (по строкам)	10	<i>F7.3</i>
<i>GINV</i> (по строкам)	10	<i>F7.3</i>
<i>PP</i> (по столбцам)	10	<i>F7.3</i>

1 строка $T = (t_i)$ $X(T)$: (координаты фазового вектора $x(t_i)$)

2 строка $CENA =$ (значение $\rho(t_i, x(t_i))$)
 $SUM =$ (значение $\beta(t_i)$) $CYMMA =$
(величина $\beta(t_i) + \rho(t_i, x(t_i))$) $SUM1 =$
(значение $\beta_{CT}(t_i)$) $CYMMA1 =$
(величина $\beta_{CT}(t_i) + \rho(t_i, x(t_i))$)
 $PUINT =$ (значение $\alpha(t_i)$)

3 строка $U =$ (координаты вектора $U(t_i, x(t_i), \varepsilon)$)

4 строка $V =$ (координаты вектора $V(t_i, x(t_i))$)

После завершения счета по программе печатаются две строки

$X(TET)$: (координаты вектора $x(t^*)$)
 $PLATA =$ (значение показателя качества γ_m^*
без учета стабилизирующей добавки), $PLATA1 =$
(значение показателя качества γ_m^* с учетом стабили-
зирующей добавки)

Особенности программы

Как было сказано в разделе I, за второго игрока можно использовать, кроме стратегии $V(t, x)$, другие способы управления. Для этого нужно изменить подпрограмму

$CONTR2$. Новая подпрограмма $CONTR2$ должна иметь форму

$SUBROUTINE CONTR2(IC, X)$

DIMENSION A(10,10), B(10,10), C(10,10),
 F1(10,10), F2(10,10), U(10), V(10), X(10), PU(10)
 COMMON /INTST/ A, B, C, F1, F2, N, N1,
 NB, NC, U, V, PU

{ заполнение массива V путем вычисления q коор-
 динат управляющего воздействия второго игрока.

RETURN

END

Т е с т о в а я з а д а ч а

Для дифференциальной игры четвертого порядка

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = 2.523 x_1 - 1.261 x_2 + 0.0171 u - 0.086 v$$

$$\dot{x}_4 = -3.784 x_1 + 3.363 x_2 - 0.0257 u + 0.429 v.$$

$$J(x, u, v) = \int_0^3 (10^{-4} u^2 - 10^2 v^2) d\tau + |x(3)|,$$

описывающей конфликтно-управляемое движение двойного физи-
 ческого маятника, вычислены цена игры в позиции $t_* = 0$,

$x_* = (0.2, -0.2, 0, 0)$, координаты фазового вектора
 в момент окончания $\mathcal{T} = 3$ и значение показателя качест-
 ва J_m^* . При счете полагалось $\Delta = 0.005$, $\varepsilon = 0.01$,
 $m = 4$, $\rho = q = 1$. Шаг дополнительного разбиения
 отрезков $[t_i, t_{i+1}]$ при интегрировании системы (I)

был взят $\Delta/2$. Матрицы P и Λ^{-1} были выбраны в виде:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 6.548875 & 0.661201 & -2.472944 & -0.135930 \\ 0.661201 & 0.137141 & -0.407295 & -0.031143 \\ -2.472944 & -0.407295 & 1.306769 & 0.089088 \\ -0.135930 & -0.031143 & 0.089088 & 0.007216 \end{pmatrix},$$

$$P = (-147.219683, 133.406359, 0.243763, 15.726395).$$

Получены следующие результаты: $\rho(t_*, x_*) = 0.406355$,

$$x(z) = (-0.0213, -0.0021, 0.0079, 0.0004),$$

$$y_m^* = 0.4078168.$$

ТЕКСТ ПРОГРАММЫ TRA

```

PROGRAM TRA
DIMENSION X(10,10),
GA(10,10),A(10,10),
B(10,10),C(10,10),
F1(10,10),F2(10,10),
Q(10,10),CT(10),
XP(10,10,30),GAP(10,10,
30),RAB(10),Y(10,10),
EV(10)
COMMON/A/A,N
EXTERNAL FUN
1 FORMAT(5I3)
2 FORMAT(10E7.3)
3 FORMAT(10D10.4)
4 FORMAT(1X,'MATRIX A')
5 FORMAT(1X,'MATRIX F')
6 FORMAT(1X,'MATRIX C')
7 FORMAT(1X,'MATRIX Y')
8 FORMAT(1X,'MATRIX P')
9 FORMAT(1X,'X= ',I2,IX)
10 PRINT4
11 PRINT2,((A(I,J),J=1,N),
I=1,N)
12 PRINT5
13 PRINT2,((B(IR,JR),JR=1,
NB),IR=1,N)
14 PRINT6
15 PRINT2,((C(I,J),J=1,NC),
I=1,N)
16 PRINT7
17 PRINT3,((F1(IR,JR),JR=1,
NB),IR=1,NB)
18 PRINT8
19 PRINT3,((F2(I,J),J=1,NC),
I=1,NC)
20 NTO=(NTO-NO)/NTO+1,N-2
21 NQIP=(NQIP-1)/NQIP+1
22 NQ=NTO/30
23 NR=NTO-NQ*30
24 C ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
25 READ(5,N,N1,NB,NO)
26 READ(5,CT,N1)
27 READ2,((A(IR,JR),JR=1,
N),IR=1,N)
28 READ2,((C(IR,JR),JR=1,
NC),IR=1,NC)
29 READ2,((F1(IR,JR),JR=1,
NB),IR=1,N)
30 READ2,((F2(IR,JR),JR=1,
NC),IR=1,NC)
31 C ПЕЧАТЬ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
32 PRINT3,N,N1,NB,NO
33 PRINT4
34 PRINT2,((A(I,J),J=1,N),
I=1,N)
35 PRINT5
36 PRINT2,((B(IR,JR),JR=1,
NB),IR=1,N)
37 PRINT6
38 PRINT2,((C(I,J),J=1,NC),
I=1,N)
39 PRINT7
40 PRINT3,((F1(IR,JR),JR=1,
NB),IR=1,NB)
41 PRINT8
42 PRINT3,((F2(I,J),I=1,
NC),J=1,NC)
43 IPI=1
44 I,N=1
45 T=0,
46 N11=N1*2

```

На страницах 281 - 293 идёт текст программы на Фортране.

```

FUNCTION DFKT(Z,XXO,VAL      IF(RZ)1,2,1
,N1)                          1 S=S-2.*(XXI(I)/RZ)**2
DIMENSION XXO(10),          /RZ
VAL(10)                      2 CONTINUE
S=0.                          DFKT=S
DO 2 I=1,N1                  RETURN
RZ=Z+VAL(I)                  END

```

Л и т е р а т у р а

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - М.: Наука, 1979. - 432 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. - М.: Наука, 1974. - 456 с.
3. Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. Одна задача на минимум гарантированного результата. - Изв. АН СССР. Техн.кибернетика, 1983, № 2, с. 6-23.
4. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. - М.: Наука, 1972. - 574 с.
5. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. - М.: Наука, 1966. - 530 с.
6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. - М.: Наука, 1981. - 288 с.