АКАДЕМИЯ НАУК СССР УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ МИНИМАКСНОГО УПРАВЛЕНИЯ · 1985

М. Ю. ФИЛИМОНОВ

СОПРЯЖЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ЛИНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Рассматривается дифференциальная игра на плоскости с нефиксированным временем окончания. Оптимальная стратегия первого игрока определяется специальной линией, разбивающей плоскость на две части. Согласно терминологии Р. Айзекса [1], некоторые дуги линии являются барьерами, остальные — эквивокальными кривыми. В книге Р. Айзекса поставлен вопрос [1, стр. 358]: всегда ли экивокальная кривая гладко сопрягается с барьером? В настоящей работе дается отрицательный ответ на этот вопрос.

§ 1. Пусть движение конфликтно-управляемой системы на плоскости описывается дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v - z_2, \\ \dot{z}_2 &= u. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u, v — управляющие воздействия первого и второго игроков, стесненные ограничениями

$$|u| \leqslant \mu, \quad 0 \leqslant v \leqslant \nu.$$

Первый игрок стремится перевести систему (1.1) в заданную точку $m=(0, c)$ за наименьшее время. Интересы второго игрока противоположны.

Опишем формализацию дифференциальной игры [2] за первого игрока. Под допустимыми стратегиями (управлениями обратной связи) первого игрока будем понимать произвольные функции U: $(t, z) \to U(t, z)$, удовлетворяющие условию $|U(t, z)| \leqslant \mu$. Символом $y_\Delta(\cdot, z_0, U, v(\cdot))$ обозначим ломаную Эйлера, порожденную начальной точкой z_0, стратегией U, дискретом $\Delta > 0$ и измеримой функцией времени $v(\cdot)$, удовлетворяющей при любом t условию $0 \leqslant v(t) \leqslant \nu$. Начальный момент t_0 условимся считать равным 0.

Скажем, что стратегия U для начальной точки z_0 гарантирует окончание игры к моменту ϑ, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любых $\Delta \leqslant \delta$, $v(\cdot)$ ломаная Эйлера $y_\Delta(\cdot,$

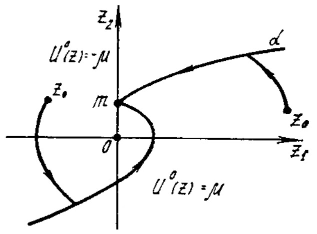

Рис. 1.

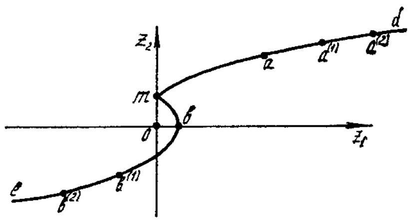

Рис. 2.

z_0, U, $v(\cdot)$) попадает в ε-окрестность точки m на отрезке $[0, \vartheta]$. Точную нижнюю грань таких ϑ (при фиксированных U, z_0) обозначим через $\theta_U(z_0)$.

Положем $T^0(z_0)=\min\limits_U \theta_U(z_0)$, если $\theta_U(z_0)<\infty$ хотя бы при одной стратегии U, и $T^0(z_0)=\infty$ в противном. Стратегию, на которой достигается минимум, назовем оптимальной стратегией первого игрока, соответствующей начальной точке z_0. Стратегию U^0 назовем оптимальной универсальной [3, 7], если она доставляет минимум для всех точек z_0, где $T^0(z_0)<\infty$.

При $\nu=0$ система (1.1) переходит в канонический пример теории управления

$$\dot z_1=-z_2, \quad \dot z_2=u, \quad |u|\leqslant\mu,$$

где цель управления — минимизировать время перевода в заданную точку m. В этом примере оптимальное управление обратной связи определяется линией α (рис. 1), разбивающей плоскость на две части и состоящей из кусков парабол

$$z_1=(c^2-z_2^2)/2\mu, \quad z_1=(z_2^2-c^2)/2\mu.$$

Оптимальное управление равно μ ниже линии α и $-\mu$ — выше этой линии. Типичные оптимальные траектории показаны на рис. 1.

Если $\nu>0$, $c\leqslant\nu$, то, как следует из [4], $T^0(z_0]=\infty$ для любой начальной точки $z_0\neq m$. В связи с этим будем считать $c>\nu>0$.

§ 2. В работах [5, 6] описано решение дифференциальной игры с неполной информацией, которая переходит в задачу § 1, если предположить, что первый игрок в каждый момент t имеет точную информацию о фазовых координатах системы. При этом основную роль для определения оптимальной стратегии первого игрока играет линия γ (рис. 2), разбивающая плоскость на две части.

Дуга mb (ma) линии γ описывается уравнением $z_1=(c^2-z_2^2)/2\mu$ ($z_1=(z_2^2-c^2)/2\mu$) и является фазовой траекторией системы (1.1) при $v\equiv0$, $u\equiv\mu$ ($u\equiv-\mu$), проходящей через точку m. Кривые ad, be удовлетворяют следующим свойствам (которые и лежат в основе их определения).

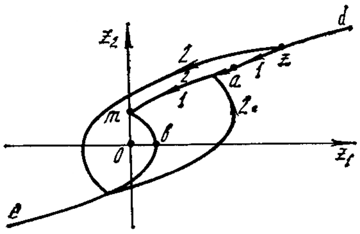

Рис. 3.

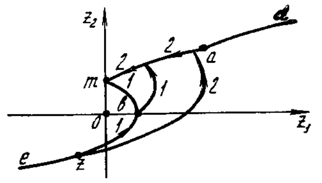

Рис. 4.

1. Для любой точки z на ad время $T^{(1)}(z)$ движения системы по кривой mad при $v \equiv \nu$ из точки z до точки m равно времени $T^{(2)}(z)$ движения из точки z при $u \equiv -\mu$, $v \equiv 0$ до выхода на дугу be, затем при $u \equiv \mu$, $v \equiv \nu$ до выхода на кривую mad и далее по mad при $v \equiv \nu$ до точки m (на рис. 3 траектория первого движения отмечена цифрой *1*, второго — цифрой *2*).

2. Для любой точки z на be время $T^{(1)}(z)$ движения по дуге be при $v \equiv 0$ из точки z до точки b, затем при $u \equiv \mu$, $v \equiv \nu$ до выхода на кривую mad и далее по mad при $v \equiv \nu$ до точки m равно времени $T^{(2)}(z)$ движения из точки z при $u \equiv \mu$, $v \equiv \nu$ до выхода на кривую mad, далее по mad при $v \equiv \nu$ до точки m (на рис. 4 траектория первого движения отмечена цифрой *1*, второго — цифрой *2*).

Кривые be, ad строятся последовательно по кускам (рис. 2): вначале дуга $bb^{(1)}$, затем на ее основе дуга $aa^{(1)}$, далее дуга $b^{(1)}b^{(2)}$ и т. д. В результате кривые be, ad набираются из бесконечного числа дуг. Дуга $bb^{(1)}$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dz_1}{dz_2} = -\frac{z_2}{\mu} - \frac{2\nu z_2}{\mu\left(\sqrt{\nu^2 - 4\nu z_2 + 4\mu z_1 + 2z_2^2 + 2c^2} - \nu - 2z_2\right)} \qquad (2.1)$$

с начальными условиями $z_{01} = b_1 = c^2/2\mu$, $z_{02} = b_2 = 0$ и представляет собой интегральную кривую этого уравнения. Для остальных дуг кривых be, ad не удается получить аналитического описания, и в [6] они задаются как предел некоторых специальных линий. Точка a определяется как первая (если идти по параболе $z_1 = (z_2^2 - c^2)/2\mu$ вправо от m) точка z, для которой $T^{(1)}(z) = T^{(2)}(z)$, где $T^{(1)}(z)$, $T^{(2)}(z)$ описаны выше в свойстве 1. Вторая координата a_2 точки a вычисляется по формуле

$$a_2 = \nu - p_2 \exp\left[2(\nu - 2p_2)/\nu\right].$$

Здесь p_2 — вторая координата точки p пересечения параболы $z_1 = (c^2 - z_2^2)/2\mu$ с дугой $bb^{(1)}$.

В работах [5, 6] формализация дифференциальной игры за первого игрока несколько иная, чем здесь в § 1. Основное отличие в том, что в [5, 6] при определении ломаных Эйлера до-

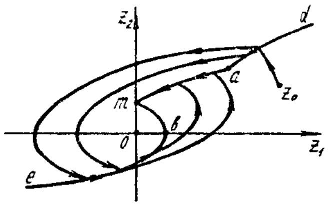

Рис. 5.

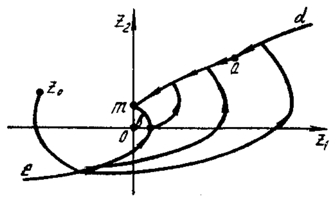

Рис. 6.

пускается зависимость очередного дискрета времени (на котором управление первого игрока держится постоянным) от позиции, где оно выбирается. Можно, однако, показать, что в рассматриваемом примере такое отличие несущественно и при формализации, описанной в § 1, оптимальная стратегия первого игрока также определяется линией γ. А именно $U^0(z)=\mu$, если z лежит ниже линии γ; $U^0(z)=-\mu$, если z лежит выше линии γ. На линии γ, за исключением дуги mb, значение $U^0(z)$ можно выбирать произвольно, лишь бы выполнялось неравенство $|U^0(z)|\leqslant\mu$. На дуге mb следует положить $U^0(z)=\mu$. Стратегия U^0 не зависит от начальной точки и является, таким образом, универсальной. Заметим также, что она есть функция лишь фазовой переменной z и не зависит от t.

Оптимальное время $T^0(z_0)$ конечно для любой начальной точки z_0 на плоскости. Функция $z_0\to T^0(z_0)$ непрерывна на всей плоскости, за исключением дуги bma (точки b и a не включаются) линии γ. Согласно терминологии Р. Айзекса [1], дуга bma — барьер.

Для z_0 на дуге ma время $T^0(z_0)$ вычисляется по формуле

$$T^0(z_0)=\frac{z_{02}-c}{\mu}+\frac{\nu}{\mu}\ln\frac{z_{02}-\nu}{c-\nu}$$

и является временем движения системы (1.1) по дуге ma от точки z_0 до точки m при $v\equiv\nu$. Такое движение принадлежит пучку $X(z_0)$ конструктивных движений [2], порожденных начальной точкой z_0 и оптимальной стратегией U^0.

Для любой точки z_0 плоскости рассмотрим пучок $X(z_0)$ конструктивных движений и в нем выделим движения, время перехода которых из z_0 в m равно $T^0(z_0)$. Пучок таких движений обозначим через $X^0(z_0)$. Оказывается, что для всякой точки z_0 на барьере bma пучок $X^0(z_0)$ состоит только из одного движения, но это не обязательно для других точек z_0 плоскости. На рис. 5 показаны траектории пучка $X^0(z_0)$ для точки z_0, лежащей ниже кривой γ, а на рис. 6 — траектории пучка $X^0(z_0)$ для точки z_0 выше кривой γ. Расщепление движений происходит на кривых ad и be. При расщеплении одно из движений идет по кривой, другое сходит с нее. По терминологии Р. Айзекса, кривые ad, be являются экивокальными.

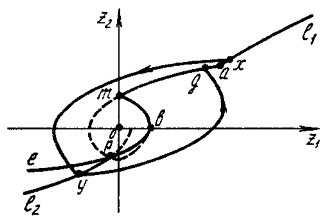

Рис. 7.

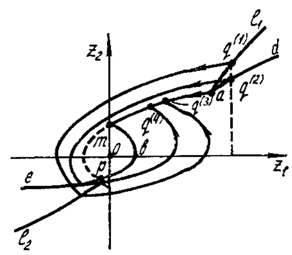

Рис. 8.

Для любого движения из пучка $X^0(z_0)$ отрезок времени $[0, T^0(z_0)]$, на котором оно определено, можно разбить на промежутки, где движение идет в множестве N_1 (ниже γ), в множестве N_2 (выше γ), по кривой *mad* и по кривой *be*. На дуге *mb*, не включающей точки *m* и *b*, движение из пучка $X^0(z_0)$ может быть лишь в начальный момент времени, когда z_0 принадлежит этой дуге. На любом промежутке, где движение идет в N_1 (N_2), оно представляет собой движение системы (1.1) при $u \equiv \mu$, $v \equiv \nu$ ($u \equiv -\mu$, $v \equiv 0$). На любом промежутке, где движение идет по кривой mad (*be*), оно является движением по этой кривой при $v \equiv \nu$ ($v \equiv 0$).

§ 3. Перейдем к вопросу о примыкании эквивокальной кривой к барьеру. Изучая возникновение эквивокальных кривых из барьеров, Р. Айзекс поставил вопрос [1, стр. 358]: всегда ли эквивокальная кривая гладко сопрягается с барьером? Используя дифференциальное уравнение (2.1), нетрудно показать, что нижняя эквивокальная кривая *be* гладко сопрягается с барьером *mb*. Для первого участка верхней эквивокальной кривой *ad* дифференциальное уравнение получить не удается. Тем не менее можно показать, что эквивокальная кривая *ad* отходит от барьера *ma* вверх под ненулевым углом.

Докажем это. Выведем дифференциальное уравнение, описывающее вспомогательную гладкую кривую l_1, проходящую через точку *a*. Для этого параболу $z_1 = (c^2 - z_2^2)/2\mu$ сдвинем параллельно оси z_1 так, чтобы она прошла через точку *p* (рис. 7). Если обозначить величину сдвига вдоль оси z_1 через $k/2\mu$ $(k > 0)$, то уравнение параболы будет иметь вид

$$z_1 = \frac{c^2 - z_2^2}{2\mu} - \frac{k}{2\mu}. \tag{3.1}$$

Из рис. 7 видно, что нас интересуют сдвижки только при $k < 2c^2$. Поэтому в дальнейшем будем считать $k < 2c^2$. Обозначим через l_3 линию, состоящую из кривой *bp* и далее продолженную кривой, удовлетворяющей уравнению (3.1).

Пусть кривая l_1 описывается уравнением $z_1 = \varphi(z_2)$. Возьмем произвольную точку *x* на l_1. Определим точку *y* как точку пересечения с кривой l_2 траектории движения из точки x при $v\equiv 0$, $u\equiv -\mu$. Символом g обозначим точку пересечения с кривой ma траектории системы (1.1) из точки y в силу $v\equiv \nu$, $u\equiv \mu$ (рис. 7). Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$\hat{T}^{(1)}(x)=\hat{T}^{(2)}(x), \tag{3.2}$$

где $\hat{T}^{(1)}(x)$, $\hat{T}^{(2)}(x)$ определяются аналогично $T^{(1)}(x)$, $T^{(2)}(x)$ (§ 2) при замене кривой γ на кривую $\hat{\gamma}$, состоящую из кривых l_2, bma, l_1.

Найдем координаты точек y и g. Точка y является точкой пересечения параболы (3.1) с параболой

$$z_1=\frac{z_2^2-x_2^2}{2\mu}+x_1. \tag{3.3}$$

Приравнивая (3.1) и (3.3), получаем

$$y_2=-\sqrt{(x_2^2-2\mu x_1+c^2-k)/2}. \tag{3.4}$$

Поскольку вторая координата y_2 точки y связана с первой координатой y_1 соотношением (3.1), то

$$g_2=\left(\nu+\sqrt{\nu^2-4\nu y_2+4c^2-2k}\right)/2. \tag{3.5}$$

Распишем равенство (3.2):

$$\int_{a_2}^{x_2}\frac{1}{z_2-\nu}\frac{d\varphi(z_2)}{dz_2}dz_2+\frac{a_2-g_2}{\mu}+\frac{\nu}{\mu}\ln\frac{a_2-\nu}{g_2-\nu}=\frac{x_2-y_2}{\mu}+\frac{g_2}{\mu}-\frac{y_2}{\mu}. \tag{3.6}$$

Подставим выражения для y_2, g_2 из (3.4) и (3.5) в равенство (3.6):

$$\int_{a_2}^{x_2}\frac{1}{z_2-\nu}\frac{d\varphi(z_2)}{dz_2}dz_2+\frac{a_2}{\mu}+$$

$$+\frac{\nu}{\mu}\ln\frac{2(a_2-\nu)}{\sqrt{\nu^2+4\nu\sqrt{(x_2^2-2\mu x_1+c^2-k)/2}+4c^2-2k}-\nu}=$$

$$=\frac{x_2+2\sqrt{(x_2^2-2\mu x_1+c^2-k)/2}}{\mu}+$$

$$+\frac{\nu+\sqrt{\nu^2+4\nu\sqrt{(x_2^2-2\mu x_1+c^2-k)/2}+4c^2-2k}}{\mu}.$$

Дифференцируя последнее уравнение по x_2 и заменяя x на z, получаем

$$\frac{1}{z_2-\nu}\frac{d\varphi(z_2)}{dz_2}-\frac{\nu^2\left(z_2-\mu\frac{d\varphi(z_2)}{dz_2}\right)}{\mu(R_2(z_1,z_2)-\nu)R_2(z_1,z_2)R_1(z_1,z_2)}=$$

$$=\frac{1}{\mu}+\frac{z_2-\mu\frac{d\varphi(z_2)}{dz_2}}{\mu R_1(z_1,z_2)}+\frac{\nu\left(z_2-\mu\frac{d\varphi(z_2)}{dz_2}\right)}{\mu R_1(z_1,z_2)R_2(z_1,z_2)}, \tag{3.7}$$

где

$$R_1(z_1,z_2)=\sqrt{(z_2^2-2\mu z_1+c^2-k)/2},$$

$$R_2(z_1,z_2)=\sqrt{\nu^2+4\nu\sqrt{R_1(z_1,z_2)}+4c^2-2k}.$$

Равенство (3.7) перепишем в виде

$$\frac{dz_1}{dz_2}=\frac{z_2}{\mu}-\frac{\nu}{\mu}+\frac{\nu(z_2-\nu)}{\mu(R_1(z_1,z_2)-\nu+z_2-\nu R_1(z_1,z_2)/R_2(z_1,z_2))}. \tag{3.8}$$

Дифференциальное уравнение (3.8) описывает кривую l_1.

Для того чтобы кривая l_1 отходила от параболы $z_1=(z_2^2-c^2)/2\mu$ (дугой которой является барьер ma) вверх под ненулевым углом, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$-\frac{\nu}{\mu}+\frac{\nu(z_2-\nu)}{\mu(R_1(z_1,z_2)-\nu+z_2-\nu R_1(z_1,z_2)/R_2(z_1,z_2))}<0. \tag{3.9}$$

Подставляя $z_1=(z_2^2-c^2)/2\mu$ в неравенство (3.9) и сокращая второе слагаемое на $z_2-\nu$ $(z_2>\nu)$, получаем

$$-\frac{\nu}{\mu}+\frac{\nu}{\left(1+\frac{\sqrt{c^2-k/2}}{z_2-\nu}-\frac{\nu\sqrt{c^2-k/2}}{(z_2-\nu)\sqrt{\nu^2+4\nu\sqrt{c^2-k/2}+4c^2-2k}}\right)\mu}<0.$$

Для выполнения этого неравенства необходимо и достаточно, чтобы

$$1-\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+4\nu\sqrt{c^2-k/2}+4c^2-2k}}>0. \tag{3.10}$$

Поскольку $\sqrt{\nu^2+4\nu\sqrt{c^2-k/2}+4c^2-2k}>\nu$, то неравенство (3.10) справедливо. Следовательно, кривая l_1 примыкает к барьеру под ненулевым углом. Теперь докажем, что верхняя эквивокальная кривая ad отходит от барьера ma под неменьшим углом, чем кривая l_1. Пусть кривая ad описывается уравнением $z_1=\psi(z_2)$. Нам нужно доказать неравенство

$$\left.\frac{d\varphi(z_2)}{dz_2}\right|_{z_2=a_2} \geqslant \left.\frac{d\psi(z_2)}{dz_2}\right|_{z_2=a_2}. \tag{3.11}$$

Предположим противное. Тогда вблизи точки a кривая ad идет ниже кривой l_1. Выберем точку $q^{(1)}$ $\left(q_2^{(1)}>a_2\right)$ достаточно близко к a. По $q^{(1)}$ определим точки $q^{(2)}$, $q^{(3)}$, $q^{(4)}$ (рис. 8). Очевидно, время оборота $\hat{t}[q^{(1)}, q^{(3)}]=\hat{T}^{(2)}(q^{(1)})-\hat{T}^{(1)}(q^{(3)})$ больше времени оборота $t[q^{(2)}, q^{(4)}]=T^{(2)}(q^{(2)})-T^{(1)}(q^{(4)})$, т. е. справедливо неравенство

$$\hat{t}[q^{(1)}, q^{(3)}]>t[q^{(2)}, q^{(4)}]. \tag{3.12}$$

С другой стороны, можно записать неравенства

$$\bar{t}[q^{(2)}, q^{(4)}]>\bar{t}[q^{(2)}, q^{(3)}]>\breve{t}[q^{(1)}, q^{(3)}], \tag{3.13}$$

где через $\bar{t}[q^{(2)}, q^{(4)}]$ ($\bar{t}[q^{(2)}, q^{(3)}]$) обозначено время движения по кривой mad при $v\equiv\nu$ от точки $q^{(2)}$ до точки $q^{(4)}$ ($q^{(3)}$), равное $T^{(1)}(q^{(2)})-T^{(1)}(q^{(4)})$ ($T^{(1)}(q^{(2)})-T^{(1)}(q^{(3)})$), а через $\breve{t}[q^{(1)}, q^{(3)}]$ — время движения по кривым ma, l_1 при $v\equiv\nu$ от точки $q^{(1)}$ до точки $q^{(3)}$, равное $\hat{T}(q^{(1)})-\hat{T}^{(1)}(q^{(3)})$. Второе неравенство в (3.13) вытекает из того, что изменение первой координаты при движении по кривым $aq^{(1)}$, $aq^{(2)}$ описывается соотношением $\dot{z}_1=\nu-z_2$, кривая $aq^{(1)}$ лежит выше кривой $aq^{(2)}$ и $q_1^{(1)}=q_1^{(2)}$ (рис. 8). Из свойств кривых ad, l_1 следует, что

$$\bar{t}[q^{(2)}, q^{(4)}]=t[q^{(2)}, q^{(4)}],\ \breve{t}[q^{(1)}, q^{(3)}]=\hat{t}[q^{(1)}, q^{(3)}]. \tag{3.14}$$

Из соотношений (3.13) и (3.14) вытекает неравенство $\hat{t}[q^{(1)}, q^{(3)}]<t[q^{(2)}, q^{(4)}]$. Таким образом, получили противоречие с (3.12). Оно и доказывает справедливость неравенства (3.11). Следовательно, верхняя эквивокальная кривая ad отходит от барьера вверх под ненулевым углом.

Таким образом, дан отрицательный ответ на вопрос из книги Р. Айзекса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Красовский Н. Н. Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели.— Матем. сб., 1978, т. 107, вып. 4, с. 541—571.
4. Пацко В. С. Дифференциальная игра уклонения на плоскости.— Прикл. матем. и мех., 1977, т. 41, вып. 4, с. 604—608.
5. Пацко В. С. Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I.— Дифференц. уравнения, 1971, т. 7, № 3, с. 424—435.
6. Пацко В. С. Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. II.— Там же, 1972, т. 8, № 8, с. 1423—1435.
7. Субботина Н. Н. Универсальные оптимальные стратегии в дифференциальных играх.— Там же, 1983, т. 19, № 11, с. 1890—1896.

Рисунки в напечатанном тексте получились малого размера. Поэтому ниже приведены оригиналы рисунков 3-8.

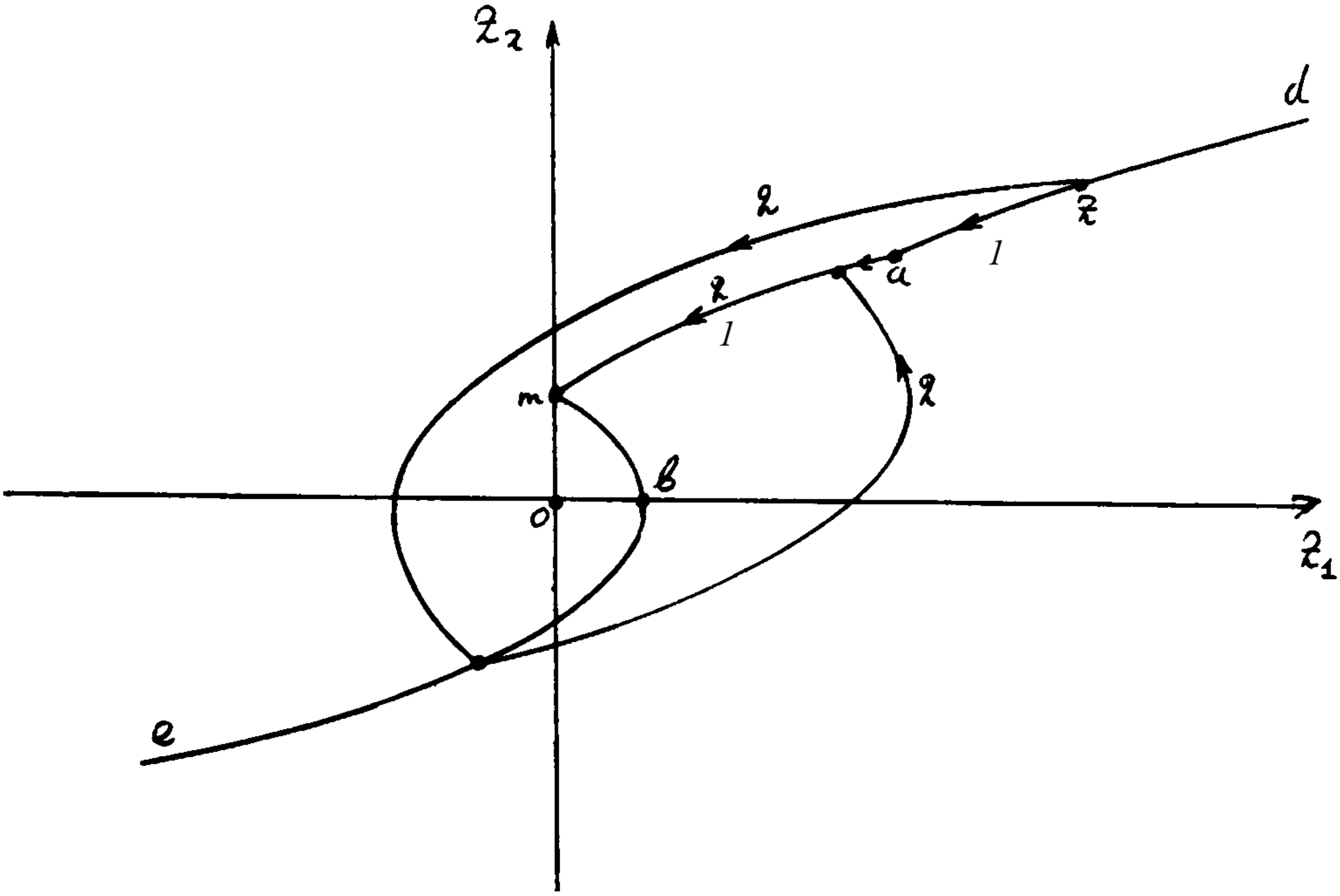

Рис. 3

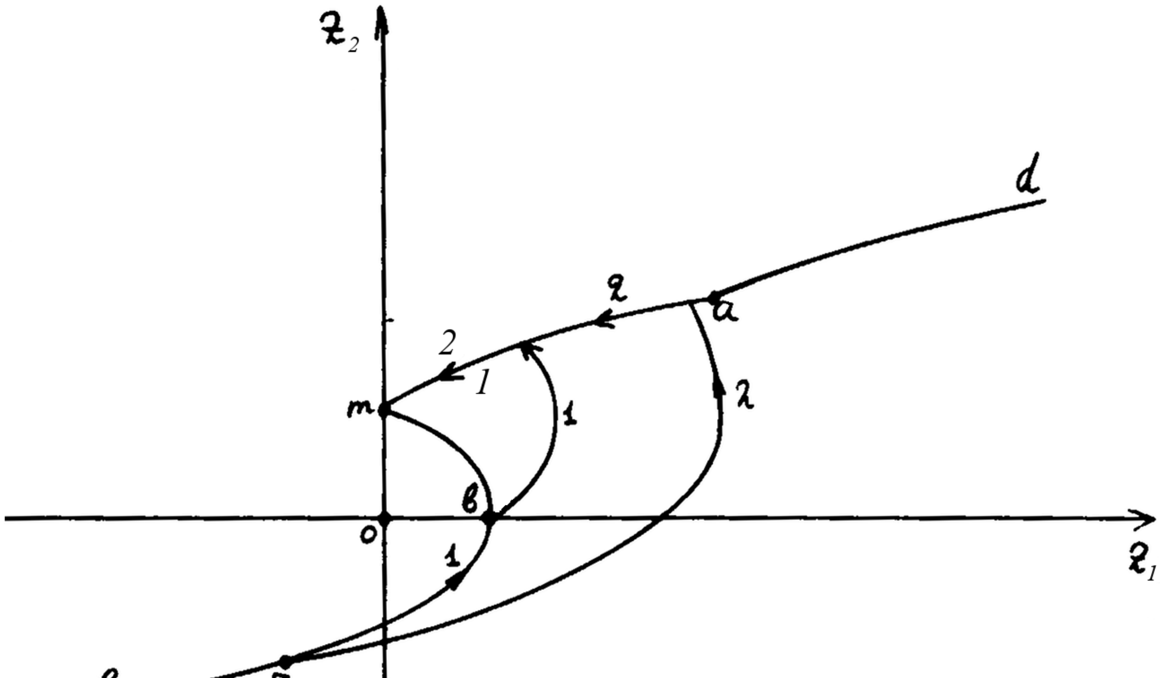

Рис. 4

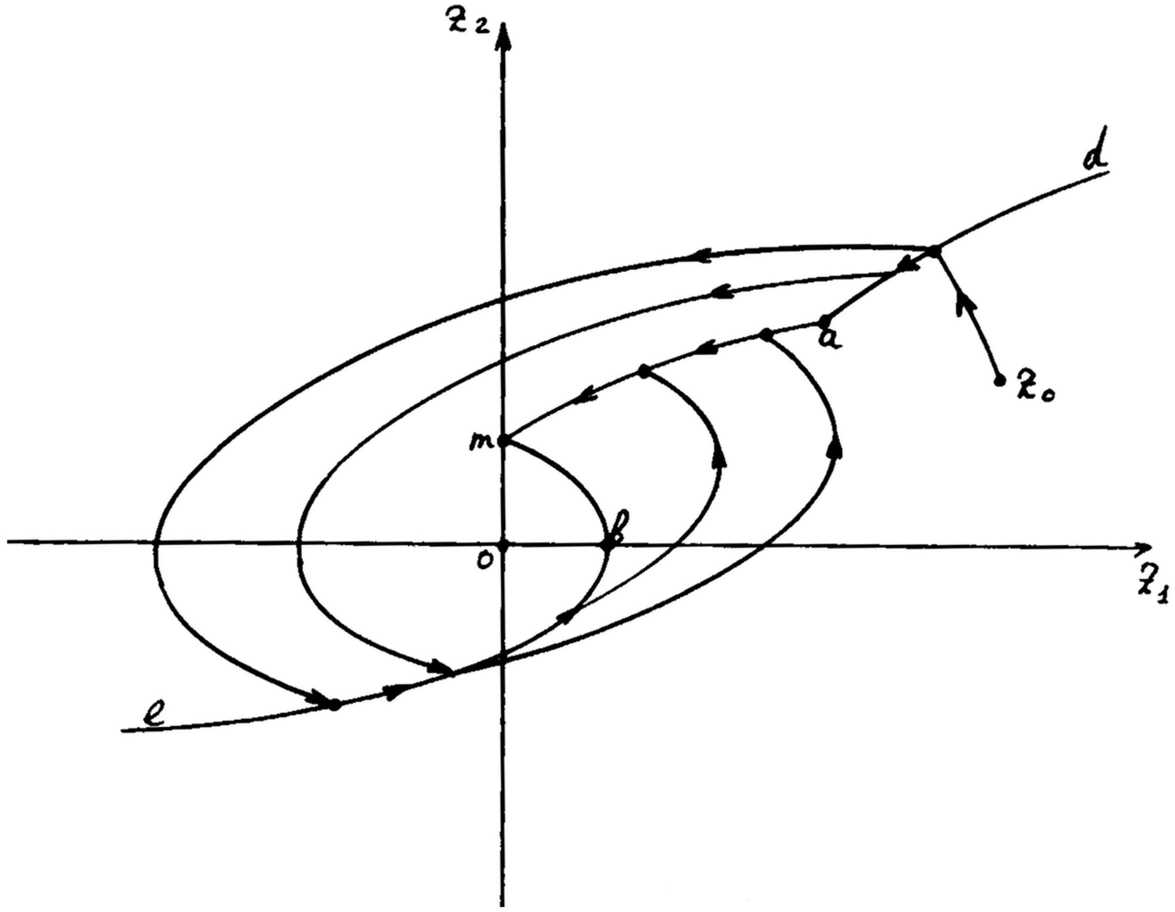

Рис. 5

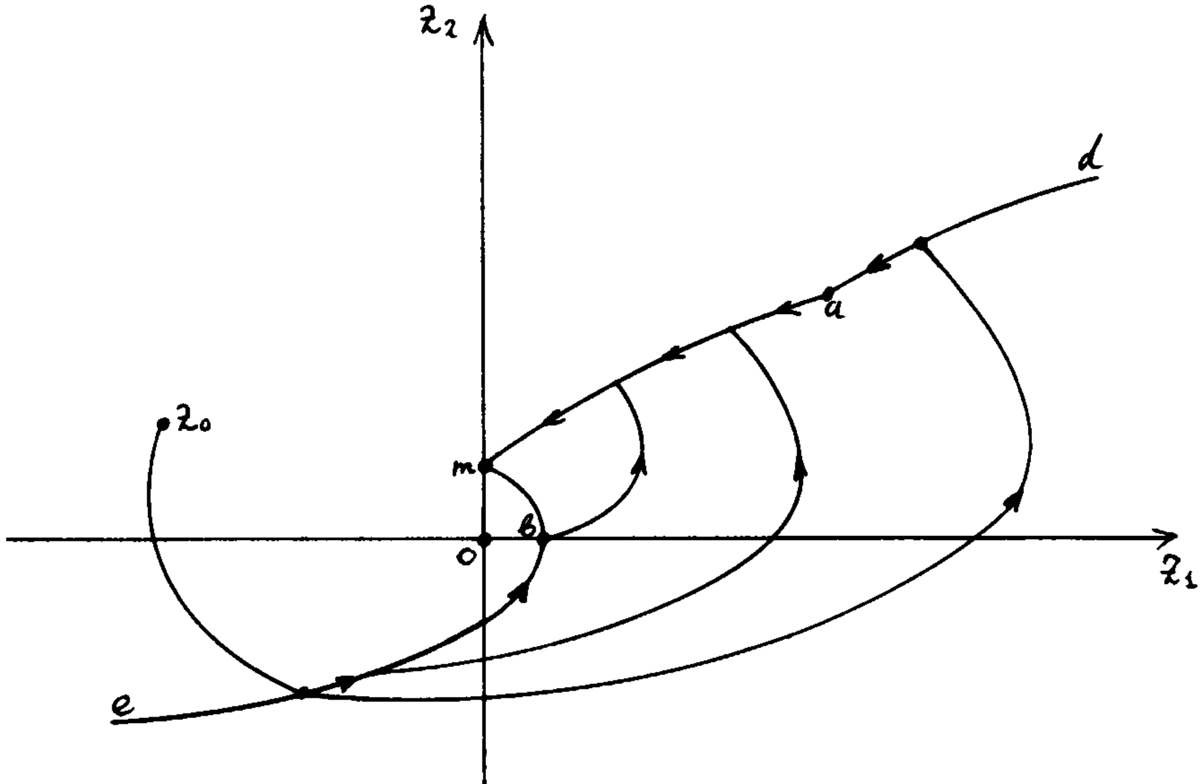

Рис. 6

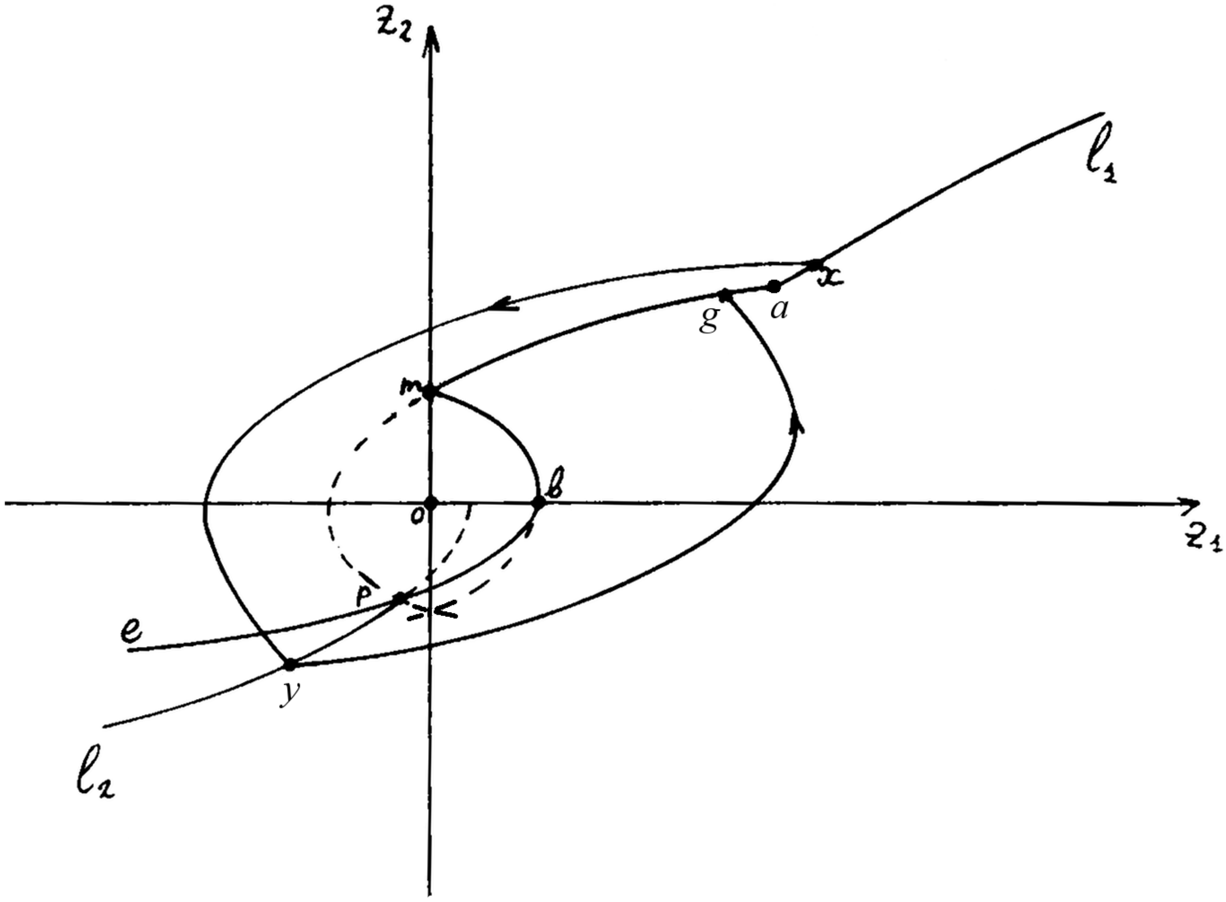

Рис. 7

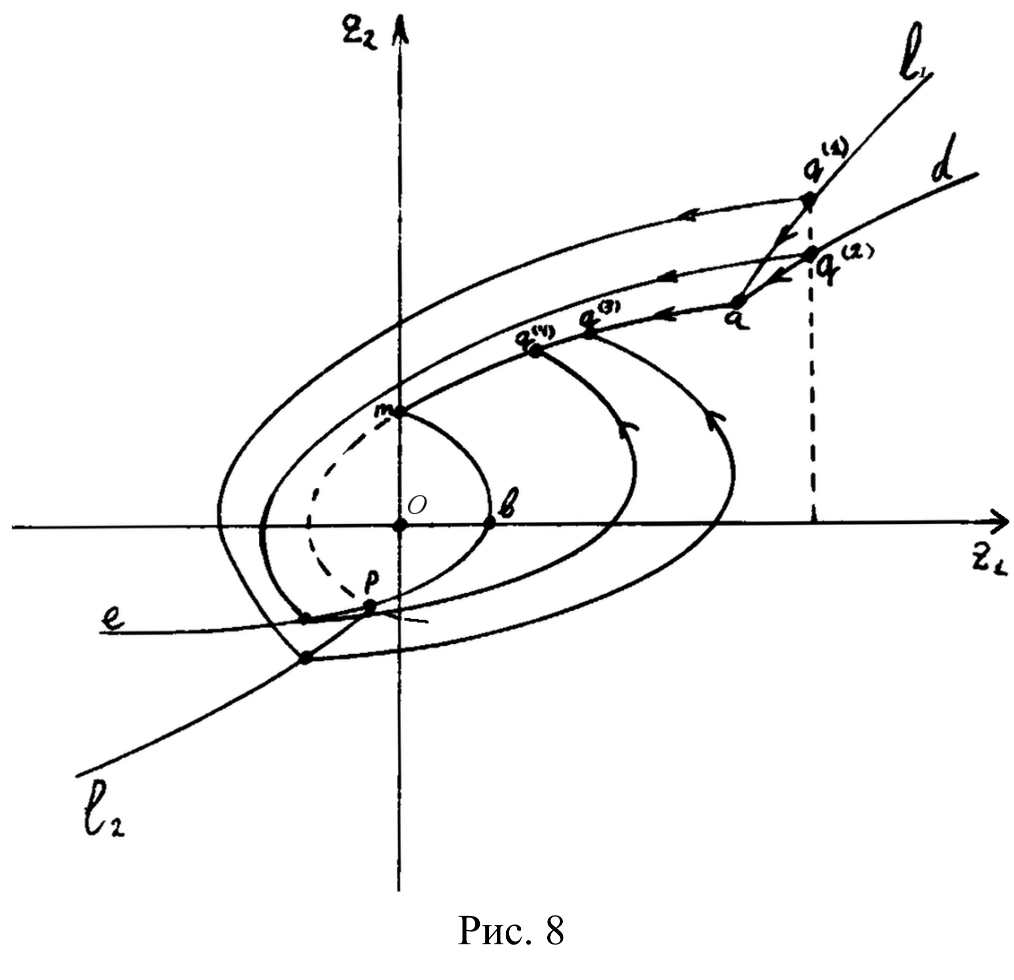

Рис. 8