АКАДЕМИЯ НАУК СССР
УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИРОВАННЫМ РЕЗУЛЬТАТОМ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР · УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИРОВАННЫМ РЕЗУЛЬТАТОМ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

СВЕРДЛОВСК 1987

УДК 519.9

Управление с гарантированным результатом: Сб. науч. трудов. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987.

Рассматриваются задачи позиционного управления, оптимального по гарантированному результату либо обеспечивающего достижение заданной цели. Эти задачи исследуются в основном в рамках экстремальной конструкции. Статьи содержат новые теоретические данные в указанном направлении, а также разработки и обоснования алгоритмов для решения на ЭВМ определенных типов задач гарантированного управления.

Сборник представляет интерес для специалистов в области теории оптимального управления и ее приложений.

Ответственные редакторы

доктор физико-математических наук **А. И. Субботин**,
кандидат физико-математических наук **В. Н. Ушаков**

Рецензент

кандидат физико-математических наук **Э. Г. Альбрехт**

$У \frac{20204-1448-206(85)}{055(02)7} 6-1987$

АКАДЕМИЯ НАУК СССР · УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИРОВАННЫМ РЕЗУЛЬТАТОМ . 1987

М. А. ЗАРХ, В. С. ПАЦКО

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ВТОРОГО ИГРОКА В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВА ОТТАЛКИВАНИЯ

Рассматривается линейная антагонистическая дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания, геометрическими ограничениями на управляющие параметры и выпуклой терминальной функцией платы [4]. Описываются два варианта задания оптимальной стратегии второго (максимизирующего) игрока. Приводится пример, просчитанный на ЭВМ. Статья примыкает к работам [2, 4, 5, 9, 10, 13].

§ 1. Постановка задачи

Считаем, что стандартным преобразованием [4, 8] линейная антагонистическая дифференциальная игра двух лиц с фиксированным моментом окончания ϑ приведена к эквивалентному виду

$$\begin{gathered}\dot{y}(t)=B^1(t)u+C^1(t)v,\\ y(t)\in R^n,\quad u\in P^1,\quad v\in Q^1\end{gathered}\tag{1.1}$$

без фазовой переменной в правой части. Функцию платы $\gamma^1: R^n\to R$ считаем выпуклой и липшицевой. Условимся, что $\gamma^1(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$. Первый игрок распоряжется параметром u и минимизирует $\gamma^1(y(\vartheta))$. Параметр v принадлежит второму игроку, его цель — максимизация $\gamma^1(y(\vartheta))$. Управляющие параметры u, v — конечно-мерные векторы, выбираемые из выпуклых компактов P^1 и Q^1. Матрицы $B^1(t)$, $C^1(t)$ предполагаем липшицевыми по t с константами ψ, χ. Начальный момент обозначим t_* и будем считать, что он выбирается из заданного промежутка $T=[t_0, \vartheta]$.

Цель работы — построение оптимальной стратегии второго игрока в игре (1.1). Описываются два варианта. В основе каждого из них лежит свойство отталкивания, формулируемое и доказываемое в § 3, 4.

§ 2. Аппроксимирующая система

Пусть ω — разбиение промежутка T с шагом $\varkappa$, а $t_e=t_0+e\varkappa$, $e=0, 1, 2, \ldots,$ — точки разбиения. Обозначим через B^2, C^2

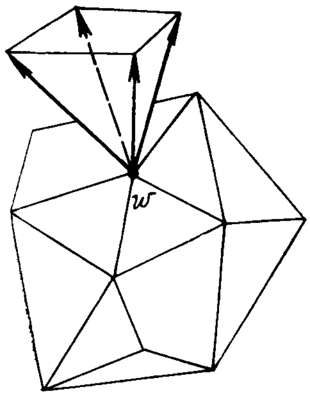

Рис. 1.

кусочно-постоянные с шагом $\varkappa$, непрерывные справа аппроксимации функций B^1, C^1:

$$B^2(t) = B^1(t_e),\ C^2(t) = C^1(t_e),\ t \in [t_e, t_{e+1}),\ e = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Компакты P^1, Q^1 приблизим выпуклыми многогранниками P^2, Q^2, а функцию γ^1 — выпуклой липшицевой функцией γ^2 с многогранными множествами уровня. Дифференциальную игру

$$\dot{y}(t) = B^2(t)u + C^2(t)v, \quad y(t) \in R^n,\quad u \in P^2,\quad v \in Q^2,\quad t \in T \tag{2.1}$$

с моментом окончания ϑ и платой γ^2 назовем аппроксимирующей игрой.

Множество уровня $\{(t, x) \in T \times R^n : \Gamma^i(t, x) \leqslant c\}$ функции цены Γ^i в игре $(i, 1)$, $i = 1, 2$, обозначим W_c^i. Пусть $W_c^i(t) = \{x \in R^n : (t, x) \in W_c^i\}$ — сечение множества W_c^i в момент t.

При любом e сечение $W_c^2(t_e)$ — выпуклый многогранник. Определим попятную процедуру построения многогранников $W_c(t_e)$, оценивающих $W_c^2(t_e)$ сверху. В одном из естественных случаев конкретизации этой процедуры реализуется построение многогранников $W_c^2(t_e)$, т. е. $W_c(t_e) = W_c^2(t_e)$ для всех e. Строящиеся многогранники считаем невырожденными.

Обозначим через $N(F)$ совокупность всех единичных внешних нормалей к граням размерности $n-1$ невырожденного многогранника $F \subset R^n$. Пусть ρ — символ опорной функции.

Примем $W_c(\vartheta) = M_c^2 = \{x \in R^n : \gamma^2(x) \leqslant c\}$. Пусть найдены многогранники $W_c(\vartheta), \ldots, W_c(t_{e+2}), W_c(t_{e+1})$. Положим

$$\eta_c(l, t_e) = \rho(l, W_c(t_{e+1})) + \varkappa\rho(l, -B^2(t_e)P^2) - \varkappa\rho(l, C^2(t_e)Q^2),\quad l \in R^n. \tag{2.2}$$

Обозначим через $L_c(t_e)$ произвольный конечный набор единичных векторов, такой, что

$$N(W_c(t_{e+1})) \subset L_c(t_e),\quad t_e \neq \vartheta.$$

Многогранник $W_c(t_e)$ зададим по формуле

$$W_c(t_e) = \{x \in R^n : l'x \leqslant \eta_c(l, t_e),\ l \in L_c(t_e)\}. \tag{2.3}$$

Опорная функция $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ многогранника $W_c(t_e)$ кусочно-линейна. Именно, каждой вершине w многогранника соответствует выпуклый конус, порожденный внешними нормалями к граням размерности $n-1$, содержащим w (рис. 1; $n = 3$). В этом конусе функция $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ линейна, а единичные нормали к граням — образующие конуса. В случае $n = 2$ количество образующих равно двум, при $n \geqslant 3$ оно не меньше n. Условимся, что при $n \geqslant 3$ всякий конус линейности функции $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ разбит без добавления новых образующих на n-гранные конусы. Употребляя выражение «конус линейности функции $\rho(\cdot, W_c \times (t_e))$», подразумеваем, что число его образующих равно n.

Приведем естественные примеры задания набора $L_c(t_e)$.

1). Набор $L_c(t_e)$ не зависит от e, т. е. $L_c(t_e) = L$, $e = 0, 1, 2, \ldots$ Для выполнения вложения $N(W_c(t_{e+1})) \subset L$ достаточно потребовать, чтобы $N(M_c^2) \subset L$.

2). Набор $L_c(t_e)$ есть совокупность всех нормалей многогранника $W_c(t_{e+1}) - \varkappa B^2(t_e) P^2$, т. е. $L_c(t_e) = N(W_c(t_{e+1}) - \varkappa B^2 \times (t_e) P^2)$. Опорная функция многогранника $W_c(t_{e+1}) - \varkappa B^2(t_e) P^2$ есть сумма первых двух слагаемых в формуле (2.2).

3). $N(W_c(t_{e+1})) \subset L_c(t_e) \subset N(W_c(t_{e+1}) - \varkappa B^2(t_e) P^2)$. Этот случай соответствует ситуации, когда при построении $W_c(t_e)$ на основе $W_c(t_{e+1})$ в качестве промежуточного действия, как и в случае 2), находим опорную функцию многогранника $W_c(t_{e+1}) - \varkappa B^2(t_e) P^2$, но определяем ее не точно, а приближенно, «склеивая» очень близкие образующие конусов линейности опорной функции и ликвидируя «вытянутые» конусы линейности (последнее при размерности $n \geqslant 3$), оставляя, однако, все образующие, принадлежащие $N(W_c(t_{e+1}))$.

В случаях 1), 3) многогранники $W_c(t_e)$, определяемые формулами (2.2), (2.3), оценивают сверху сечения $W_c^2(t_e)$ множества уровня функции цены игры (2.1). В случае 2) справедливо равенство $W_c(t_e) = W_c^2(t_e)$ [7].

При $n = 2, 3$ алгоритмы построения множеств $W_c(t_e)$, приближающих сечения $W_c^2(t_e)$, а стало быть и $W_c^1(t_e)$, доведены до стандартных вычислительных программ [1, 15]. Для нелинейных дифференциальных игр численные методы попятных конструкций рассматривались в работах [11, 14].

Зафиксируем промежуток $[c_*, c^*]$, считая, что $c^* > c_* \geqslant \min \times \{\gamma^2(x) : x \in R^n\}$. Содержательно числа c_*, c^* можно трактовать как оценки снизу и сверху функции цены Γ^1 на интересующем нас множестве начальных позиций. Пусть O — единичный шар в R^n, а S — единичная сфера. Предположим существование такого числа $r > 0$ и такой липшицевой функции $g: T \to R^n$, что $g(t) + rO \subset W_c^1(t)$ для всех $c \in [c_*, c^*]$ и $t \in T$. Выберем $\boldsymbol{R} > 0$ так, чтобы $g(t) + \boldsymbol{R}O \supset W_c^1(t)$, $c \in [c_*, c^*]$, $t \in T$. Стало быть,

$$g(t) + rO \subset W_c^1(t) \subset g(t) + \boldsymbol{R}O, \quad c \in [c_*, c^*], \quad t \in T. \tag{2.4}$$

Будем считать также, что

$$g(t_e) + rO \subset W_c(t_e) \subset g(t_e) + \boldsymbol{R}O, \quad c \in [c_*, c^*], \quad e = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

для всех достаточно малых $\varkappa$ и всех P^2, Q^2, γ^2, достаточно близких к P^1, Q^1, γ^1. Ограничение на малость $\varkappa$ сформулируем следующим образом. Пусть

$$\zeta = \max_{t \in T} \| B^1(t) \|, \quad \xi = \max_{t \in T} \| C^1(t) \|, \quad \mu = \max_{p \in P_*} |p|, \quad \nu = \max_{q \in Q_*} |q|.$$

Здесь P_* (Q_*) — охватывающий множество P (Q) компакт, содержащий $P^2(Q^2)$. Условимся, что

$$\varkappa \leqslant r/2\,(\zeta\mu + \xi\nu). \tag{2.6}$$

Введем обозначение

$$d_c(t_e,\ l,\ x) = \rho(l,\ W_c(t_e)) - l'x, \quad l \in S.$$

Величина d_c — «расстояние» от точки x до отвечающей вектору l опорной гиперплоскости к множеству $W_c(t_e)$. Величина d_c имеет знак плюс, если x принадлежит тому же полупространству, что и $W_c(t_e)$, и знак минус, если x и $W_c(t_e)$ разделяются указанной гиперплоскостью. Положим

$$Q^i(l,\ t) = \arg\max_{q \in Q^i} l'C^i(t)\,q, \quad i = 1,\ 2.$$

Пусть U^i, $i = 1,\ 2,$ — множество измеримых функций $u(\cdot)$ из T в P^i. Символ cone ниже означает выпуклую коническую оболочку.

§ 3. Свойство отталкивания для аппроксимирующей системы

Основными утверждениями данного параграфа являются теоремы 3.1, 3.2. Вначале сформулируем вспомогательное

Утверждение 3.1. Пусть векторы $l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_m$ принадлежат единичной сфере S и линейно-независимы. Пусть далее

$$g^* \in R^n;\ a_s \in R,\ s = \overline{1,\ m};\ b > 0,\ R^* \geqslant r^* > 0;$$

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{cone}\{l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_m\},\ \boldsymbol{\Pi} = \{x \in R^n : l_s'x \leqslant a_s,\ s = \overline{1,\ m}\},$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \{x \in R^n : l_s'x \leqslant a_s + b,\ s = \overline{1,\ m}\}.$$

Тогда, если

$$l'g^* + r^* \leqslant \rho(l,\ \boldsymbol{\Pi}) \leqslant l'g^* + R^*, \quad l \in \boldsymbol{E} \cap S,$$

то

$$\rho(l,\ \boldsymbol{\Gamma}) \leqslant \rho(l,\ \boldsymbol{\Pi}) + R^*b/r^*,\ l \in \boldsymbol{E} \cap S.$$

Доказательство утверждения достаточно простое и поэтому не приводится.

В этом параграфе будем считать параметр $c \in [c_*,\ c^*]$ зафиксированным. В связи с этим условимся опускать нижний индекс c в используемых обозначениях (исключение — формулировки и пояснения теорем 3.1, 3.2). Например, вместо $W_c(t_e)$ будем писать $W(t_e)$ и т. д. Вводимые ниже константы не зависят от c. Положим

$$\varphi(l,\ t_e) = \varkappa[\rho(l,\ -B^2(t_e)\,P^2) - \rho(l,\ C^2(t_e)\,Q^2)].$$

Для любого e и всех $l \in S$ в силу (2.6) имеем

$$|\varphi(l,\ t_e)| \leqslant r/2. \tag{3.1}$$

Обозначим

$$d^*(l,\ t_e) = \eta(l,\ t_e) - \rho(l,\ W(t_e)),$$

$$\sigma^* = (1 + 3\boldsymbol{R}/r)(\psi\mu + \chi\nu).$$

Равенство (2.2) запишем через $\varphi(l,\ t_e)$:

$$\eta(l,\ t_e) = \rho(l,\ W(t_{e+1})) + \varphi(l,\ t_e).$$

Лемма 3.1. Для всех $t_e \in \omega$ ($t_e \neq \vartheta,\ t_e \neq \vartheta - \varkappa$) и любого $\bar{l} \in S$ справедливо неравенство[1]

$$d^*(\bar{l},\ t_{e+1}) \leqslant d^*(\bar{l},\ t_e) + \sigma^* \varkappa^2.$$

Доказательство. Обозначим

$$\tilde{\eta}(l,\ t_e) = \rho(l,\ W(t_{e+1})) + \varphi(l,\ t_{e+1}),$$

$$\tilde{W}(t_e) = \{x \in R^n : l'x \leqslant \tilde{\eta}(l,\ t_e),\ l \in L(t_e)\},$$

$$\tilde{d}(l,\ t_e) = \tilde{\eta}(l,\ t_e) - \rho(l,\ \tilde{W}(t_e)).$$

Так как множество $W(t_{e+1})$ содержит в себе шар радиуса r, то из неравенства (3.1) следует, что $\tilde{W}(t_e)$ содержит шар радиуса $r/2$. Более точно

$$l'g(t_{e+1}) + r/2 \leqslant \rho(l,\ \tilde{W}(t_e)),\quad e = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ t_e \neq \vartheta,\ l \in S. \qquad (3.2)$$

Справедлива также оценка сверху:

$$\rho(l,\ \tilde{W}(t_e)) \leqslant l'g(t_{e+1}) + 3\boldsymbol{R}/2,\quad e = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ t_e \neq \vartheta,\ l \in S. \qquad (3.3)$$

Докажем ее при помощи утверждения 3.1. Зафиксируем момент t_e и произвольный конус линейности K функции $\rho(\cdot,\ W(t_{e+1}))$. Пусть l_s, $s = \overline{1,\ n}$ — образующие конуса. Векторы $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — нормали многогранника $W(t_{e+1})$. В силу вложения $N(W(t_{e+1})) \subset L(t_e)$ они принадлежат $L(t_e)$. Отсюда и из неравенства (3.1) вытекает, что многогранник $\tilde{W}(t_e)$ содержится в множестве

$$\Gamma = \{x \in R^n : l_s' x \leqslant \rho(l_s,\ W(t_{e+1})) + r/2,\ s = \overline{1,\ n}\}.$$

Пусть

$$\boldsymbol{\Pi} = \{x \in R^n : l_s' x \leqslant \rho(l_s,\ W(t_{e+1})),\ s = \overline{1,\ n}\}.$$

Имеем $\rho(l,\ \boldsymbol{\Pi}) = \rho(l,\ W(t_{e+1}))$ при $l \in K$. Используя утверждение 3.1 при $E = K$, $g^* = g(t_{e+1})$, $r^* = r$, $R^* = \boldsymbol{R}$, $b = r/2$, получаем

$$\rho(l,\ \Gamma) \leqslant \rho(l,\ W(t_{e+1})) + \boldsymbol{R}/2,\quad l \in K \cap S.$$

Отсюда, учитывая неравенство $\rho(l,\ W(t_{e+1})) \leqslant l'g(t_{e+1}) + \boldsymbol{R}$ и произвольность выбора момента t_e и конуса K, приходим к оценке (3.3).

Запишем разность $d^*(l,\ t_{e+1}) - d^*(l,\ t_e)$ в виде

$$d^*(l,\ t_{e+1}) - d^*(l,\ t_e) = [d^*(l,\ t_{e+1}) - \tilde{d}(l,\ t_e)] +$$

---

[1] Здесь и далее индекс 2 у величин, имеющих смысл промежутка времени, означает вторую степень, во всех других случаях — это признак величины, относящейся к системе (2.1) (индекс 1 — к системе (1.1))

$$+[\tilde{d}(l,\ t_e)-d^*(l,\ t_e)]. \tag{3.4}$$

Зафиксируем момент t_e и единичный вектор $\bar{l}$. Оценим первую разность в правой части равенства (3.4). Расписывая ее, получаем

$$d^*(\bar{l},\ t_{e+1})-\tilde{d}(\bar{l},\ t_e)=\rho(\bar{l},\ W(t_{e+2}))+\varphi(\bar{l},\ t_{e+1})-$$
$$-\rho(\bar{l},\ W(t_{e+1}))-\rho(\bar{l},\ W(t_{e+1}))-\varphi(\bar{l},\ t_{e+1})+\rho(\bar{l},\ \tilde{W}(t_e))=$$
$$=\rho(\bar{l},\ W(t_{e+2}))-2\rho(\bar{l},\ W(t_{e+1}))+\rho(\bar{l},\ \tilde{W}(t_e)). \tag{3.5}$$

Пусть $\bar{K}=\operatorname{cone}\{l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n\}$ — конус линейности функции $\rho(\cdot,\ W(t_{e+1}))$, содержащий $\bar{l}$. Подберем неотрицательные коэффициенты $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ так, что $\bar{l}=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s l_s$. В силу вложения $N(W(t_{e+1}))\subset L(t_e)$ векторы $l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n$ принадлежат $L(t_e)$. Поэтому

$$\rho(l_s,\ \tilde{W}(t_e))\leqslant\tilde{\eta}(l_s,\ t_e)=\rho(l_s,\ W(t_{e+1}))+\varphi(l_s,\ t_{e+1}),\ s=\overline{1,\ n}. \tag{3.6}$$

Очевидно также

$$\rho(l_s,\ W(t_{e+1}))=\eta(l_s,\ t_{e+1}),\quad s=1,\ n. \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.6), (3.7) имеем

$$\rho(l_s,\ \tilde{W}(t_e))\leqslant\eta(l_s,\ t_{e+1})+\varphi(l_s,\ t_{e+1}),\ s=\overline{1,\ n}.$$

Стало быть,

$$\rho(\bar{l},\ \tilde{W}(t_e))\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\rho(l_s,\ \tilde{W}(t_e))\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s[\eta(l_s,\ t_{e+1})+\varphi(t_s,\ t_{e+1})].$$

Подставим эту оценку, а также соотношения

$$\rho(\bar{l},\ W(t_{e+2}))\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\rho(l_s,\ W(t_{e+2})),$$

$$\rho(\bar{l},\ W(t_{e+1}))=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\rho(l_s,\ W(t_{e+1}))=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\eta(l_s,\ t_{e+1})$$

в формулу (3.5). Получим

$$d^*(\bar{l},\ t_{e+1})-\tilde{d}(\bar{l},\ t_e)\leqslant\sum_{s=1}^{n}\lambda_s[\rho(l_s,\ W(t_{e+2}))-$$
$$-2\eta(l_s,\ t_{e+1})+\eta(l_s,\ t_{e+1})+\varphi(l_s,\ t_{e+1})].$$

Сумма в квадратных скобках равна нулю. Таким образом,

$$d^*(\bar{l},\ t_{e+1})-\tilde{d}(\bar{l},\ t_e)\leqslant 0. \tag{3.8}$$

Оценим вторую разность в правой части равенства (3.4). Расписывая ее, получаем

$$\tilde{d}(\bar{l},\ t_e)-d^*(\bar{l},\ t_e)=\rho(\bar{l},\ W(t_{e+1}))+\varphi(\bar{l},\ t_{e+1})-$$
$$-\rho(\bar{l},\ \tilde{W}(t_e))-\rho(\bar{l},\ W(t_{e+1}))-\varphi(\bar{l},\ t_e)+\rho(\bar{l},\ W(t_e))=$$
$$=\varphi(\bar{l},\ t_{e+1})-\varphi(\bar{l},\ t_e)+\rho(\bar{l},\ W(t_e))-\rho(\bar{l},\ \tilde{W}(t_e)). \tag{3.9}$$

Зафиксированный вектор $\bar{l}$ принадлежит некоторому конусу линейности $\tilde{K}$ функции $\rho(\cdot,\ \tilde{W}(t_e))$. Образующие конуса — нормали к граням многогранника $\tilde{W}(t_e)$. Отобрав должным образом n образующих $\tilde{l}_1,\ \tilde{l}_2,\ \ldots,\ \tilde{l}_n$, запишем вектор $\bar{l}$ в виде $\bar{l}=\sum\limits_{s=1}^{n}\gamma_s\tilde{l}_s$, где коэффициенты γ_s неотрицательны.

С учетом неравенств (3.2), (3.3), имеем

$$\bar{l}'g(t_{e+1})+\frac{\tilde{r}}{2}\sum_{s=1}^{n}\gamma_s=\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\tilde{l}_s'\,g(t_{e+1})+\frac{\tilde{r}}{2}\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\rho(\tilde{l}_s,\ \tilde{W}(t_e))=\rho(\bar{l},\ \tilde{W}(t_e))\leqslant\bar{l}'g(t_{e+1})+3\boldsymbol{R}/2.$$

Отсюда

$$\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\leqslant 3\boldsymbol{R}/r. \tag{3.10}$$

Поскольку $\tilde{l}_s,\ s=\overline{1,\ n}$, — нормали к граням $\tilde{W}(t_e)$, то $\rho(\tilde{l}_s,\ \tilde{W}(t_e))=\tilde{\eta}(\tilde{l}_s,\ t_e),\ s=\overline{1,\ n}$, и поэтому

$$\rho(\bar{l},\ \tilde{W}(t_e))=\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\rho(\tilde{l}_s,\ W(t_e))=\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\tilde{\eta}(\tilde{l}_s,\ t_e). \tag{3.11}$$

Каждый из векторов $\tilde{l}_s,\ s=\overline{1,\ n}$, принадлежит набору $L(t_e)$. Следовательно, $\rho(\tilde{l}_s,\ W(t_e))\leqslant\eta(\tilde{l}_s,\ t_e),\ s=\overline{1,\ n}$. Отсюда

$$\rho(\bar{l},\ W(t_e))\leqslant\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\rho(\tilde{l}_s,\ W(t_e))\leqslant\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\eta(\tilde{l}_s,\ t_e). \tag{3.12}$$

Подставим (3.11), (3.12) в (3.9). С учетом (3.10) получим

$$\tilde{d}(\bar{l},\ t_e)-d^*(\bar{l},\ t_e)\leqslant\varphi(\bar{l},\ t_{e+1})-\varphi(\bar{l},\ t_e)+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\gamma_s[\eta(\tilde{l}_s,\ t_e)-\tilde{\eta}(\tilde{l}_s,\ t_e)]\leqslant\varphi(\bar{l},\ t_{e+1})+\varphi(\bar{l},\ t_e)+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\gamma_s[\varphi(\tilde{l}_s,\ t_e)-\varphi(\tilde{l}_s,\ t_{e+1})]\leqslant\left(1+\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\right)\max_{l\in S}|\varphi(l,\ t_e)-$$
$$-\varphi(l,\ t_{e+1})|\leqslant(1+3\boldsymbol{R}/r)\max_{l\in S}|\varphi(l,\ t_e)-\varphi(l,\ t_{e+1})|. \tag{3.13}$$

Оценим величину максимума в правой части этого неравенства. Имеем

$$\max_{l\in S}|\varphi(l,\ t_s)-\varphi(l,\ t_{s+1})|\leqslant\varkappa[\max_{l\in S}|\rho(l,\ -B^2(t_e)P^2)-$$
$$-\rho(l,\ -B^2(t_{e+1})P^2)|+\max_{l\in S}|\rho(l,\ C^2(t_e)Q^2)-\rho(l,\ C^2(t_{e+1})Q^2)|]. \tag{3.14}$$

Зафиксируем произвольный единичный вектор l. Предположим, что $\rho(l,\ -B^2(t_e)P^2)-\rho(l,\ -B^2(t_{e+1})P^2)\geqslant 0$. Пусть p^* — элемент из P^2, для которого $-l'B^2(t_e)\,p^* = \max\limits_{p\in P^2}(-l'B^2(t_e)\,p)$. Тогда

$$|\rho(l,\ -B^2(t_e)\,P^2) - \rho(l,\ -B^2(t_{e+1})\,P^2)| = \rho(l,\ -B^2(t_e)\,P^2) -$$
$$- \rho(l,\ -B^2(t_{e+1})\,P^2) \leqslant -l'B^2(t_e)\,p^* + l'B^2(t_{e+1})\,p^* \leqslant$$
$$\leqslant \| B^2(t_{e+1}) - B^2(t_e)\| \, |p^*| \leqslant \psi\mu\varkappa.$$

Такое же неравенство получается и в случае $\rho(l,\ -B^2(t_e)\,P^2) - \rho(l,\ -B^2(t_{e+1})\,P^2) < 0$. Поэтому

$$\max_{l\in S}|\rho(l,\ -B^2(t_e)\,P^2) - \rho(l,\ -B^2(t_{e+1})\,P^2)| \leqslant \psi\mu\varkappa.$$

Аналогичным образом

$$\max_{l\in S}|\rho(l,\ C^2(t_e)\,Q^2) - \rho(l,\ C^2(t_{e+1})\,Q^2)| \leqslant \chi\nu\varkappa.$$

Подставляя полученные оценки в (3.14), записываем

$$\max_{l\in S}|\varphi(l,\ t_e) - \varphi(l,\ t_{e+1})| \leqslant (\psi\mu + \chi\nu)\,\varkappa^2.$$

Возвращаясь к (3.13), получаем

$$\breve{d}(\bar{l},\ t_e) - d^*(\bar{l},\ t_e) \leqslant (1 + 3\boldsymbol{R}/r))\,(\psi\mu + \chi\nu)\,\varkappa^2. \tag{3.15}$$

Доказываемое неравенство $d^*(\bar{l},\ t_{e+1}) \leqslant d^*(\bar{l},\ t_e) + \sigma^*\varkappa^2$ вытекает из соотношений (3.4), (3.8), (3.15).

Теорема 3.1. Существует такая константа $\sigma > 0$, что

$$\rho(l,\ W_c(t_i)) + \min_{u(\cdot)\in \mathrm{U}^2} l' \int_{t_i}^{t_j} (B^2(\tau)\,u(\tau) + C^2(\tau)\,q)\,d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \rho(l,\ W_c(t_j)) - \sigma(t_j - t_i)^2,\quad c\in[c_*,\ c^*] \tag{3.16}$$

для всех $t_i,\ t_j \in \omega\,(t_j > t_i)$, любых $l \in N(W_c(t_i))$ и $q \in Q^2(l,\ t_i)$.

Неравенство (3.16) выражает свойство отталкивания системы (2.1) от $W_c(t_j)$ по направлению внешней нормали к грани размерности $n-1$ многогранника $W_c(t_i)$ и имеет следующий геометрический смысл. Пусть точка $\bar{x}$ принадлежит опорной гиперплоскости $l'x = \rho(l,\ W_c(t_i))$ к $W_c(t_i)$, где l — единичная нормаль многогранника $W_c(t_i)$ (рис. 2), и пусть второй игрок держит на $[t_i,\ t_j]$ постоянное управление $v(t) \equiv q \in Q^2(l,\ t_i)$, экстремальное в момент t_i по вектору l. Тогда при любом управлении первого игрока движение системы (2.1) в момент t_j принадлежит полупространству $l'x \geqslant \rho(l,\ W_c(t_j)) - \sigma(t_j - t_i)^2$. На рис. 2 символом $\bar{G}$ обозначена совокупность всех возможных состояний в момент t_j при $v(t) \equiv q$.

Из формул (2.2), (2.3), определяющих многогранники $W_c(t_e)$, следует, что $\eta_c(l,\ t_e) = \rho(l,\ W_c(t_e))$ при $l \in N(W_c(t_e))$. Поэтому равенство (2.2) для $l \in N(W_c(t_e))$ можно переписать, учитывая постоянство функций B^2, C^2 на $[t_e,\ t_{e+1})$, в виде

$$\rho(l,\ W_c(t_e)) + \min_{u(\cdot)\in \mathrm{U}^2} l' \int_{t_e}^{t_{e+1}} (B^2(\tau)\,u(\tau) + C^2(\tau)\,q)\,d\tau =$$
$$= \rho(l,\ W_c(t_{e+1})),\quad q \in Q^2(l,\ t_e).$$

Таким образом, неравенство (3.16) выполнено при $j=i+1$. Случай $j>i+1$ уже не столь очевиден. Перейдем к нему.

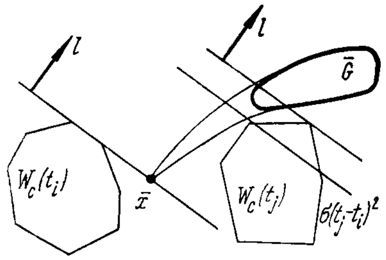

Рис. 2.

Доказательство теоремы 3.1 для случая $j>i+1$. Рассмотрим вспомогательное, экстремальное по вектору l кусочно-постоянное программное управление $\bar{v}(\cdot)$, заданное на промежутке $[t_i, t_j)$ соотношением

$$l'C^2(t)\bar{v}(t)=\max_{q\in Q^2} l'C^2(t)q,\quad t\in[t_i,\ t_j).$$

Докажем неравенство

$$\rho(l,\ W(t_i))+\min_{u(\cdot)\in U^2} l'\int_{t_i}^{t_j}(B^2(\tau)u(\tau)+C^2(\tau)\bar{v}(\tau))\,d\tau\geqslant$$

$$\geqslant\rho(l,\ W(t_j))-\frac{\sigma^*}{2}(t_j-t_i)^2. \tag{3.17}$$

Пусть $\bar{u}(\cdot)$ — экстремальное по вектору l программное управление первого игрока:

$$l'B^2(t)\bar{u}(t)=\min_{p\in P^2} l'B^2(t)p,\quad t\in[t_i,\ t_j).$$

Символ $y^2(\cdot)$ означает движение $y^2(\cdot;\ t_i,\ x,\ \bar{u}(\cdot),\ \bar{v}(\cdot))$ системы (2.1) в силу управлений $\bar{u}(\cdot)$, $\bar{v}(\cdot)$ из позиции $(t_i,\ x)$, где точка x произвольна, но фиксирована. Имеем

$$\eta(l,\ t_e)=\rho(l,\ W(t_{e+1}))+\varkappa[\rho(l,\ -B^2(t_e)P^2)-\rho(l,\ C^2(t_e)Q^2)]=$$

$$=\rho(l,\ W(t_{e+1}))-l'\int_{t_e}^{t_{e+1}}(B^2(\tau)\bar{u}(\tau)+C^2(\tau)\bar{v}(\tau))\,d\tau=$$

$$=\rho(l,\ W(t_{e+1}))-l'y^2(t_{e+1})+l'y^2(t_e),\quad e=\overline{i,\ j-1}.$$

Отсюда, учитывая определение $d^*(l,\ t_e)$, получаем

$$d(t_{e+1},\ l,\ y^2(t_{e+1}))=\rho(l,\ W(t_{e+1}))-l'y^2(t_{e+1})=$$

$$=\eta(l,\ t_e)-l'y^2(t_e)=d^*(l,\ t_e)+\rho(l,\ W(t_e))-l'y^2(t_e)=$$

$$=d^*(l,\ t_e)+d(t_e,\ l,\ y^2(t_e)),\quad e=\overline{i,\ j-1}. \tag{3.18}$$

Осуществляя в (3.18) последовательную подстановку при $e=j-1$, $j-2,\ \ldots,\ i$ и применяя одновременно лемму 3.1, приходим к цепочке неравенств

$$d(t_j,\ l,\ y^2(t_j))=d(t_{j-1},\ l,\ y^2(t_{j-1}))+d^*(l,\ t_{j-1}),$$

$$d(t_j,\ l,\ y^2(t_j))\leqslant d(t_{j-2},\ l,\ y^2(t_{j-2}))+2d^*(l,\ t_{j-2})+\sigma^*\varkappa^2,$$

$$d(t_j,\ l,\ y^2(t_j))\leqslant d(t_{j-3},\ l,\ y^2(t_{j-3}))+3d^*(l,\ t_{j-3})+2\sigma^*\varkappa^2+\sigma^*\varkappa^2,$$

. . . .

$$d(t_j,\ l,\ y^2(t_j)) \leqslant d(t_i,\ l,\ y^2(t_i)) + (j-i)\, d^*(l,\ t_i) + \\ + [(j-i-1)+(j-i-2)+\ldots+2+1]\,\sigma^*\varkappa^2.$$

Так как l — нормаль многогранника $W(t_j)$, то величина $d^*(l,\ t_i)$ равна нулю. Поэтому

$$d(t_j,\ l,\ y^2(t_j)) \leqslant d(t_i,\ l,\ y^2(t_i)) + (j-i)(j-i-1)\,\sigma^*\varkappa^2/2.$$

Учитывая, что $(j-i)\varkappa = t_j - t_i$, получаем неравенство

$$d(t_j,\ l,\ y^2(t_j)) \leqslant d(t_i,\ l,\ y^2(t_i)) + \sigma^*(t_j - t_i)^2/2,$$

которое эквивалентно (3.17).

Пусть $q \in Q^2(l,\ t_i)$. Используя (3.17), записываем соотношение

$$\rho(l,\ W(t_i)) + \min_{u(\cdot)\in \mathrm{U}^2} l' \int_{t_i}^{t_j} (B^2(\tau)\,u(\tau) + C^2(\tau)\,q)\,d\tau =$$

$$= \rho(l,\ W(t_i)) + \min_{u(\cdot)\in \mathrm{U}^2} l' \int_{t_i}^{t_j} (B^2(\tau)\,u(\tau) + C^2(\tau)\,\bar v(\tau))\,d\tau +$$

$$+ l' \int_{t_i}^{t_j} C^2(\tau)\,(q - \bar v(\tau))\,d\tau \geqslant \rho(l,\ W(t_j)) - \sigma^*(t_j - t_i)^2/2 +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_j} l'C^2(\tau)\,(q - \bar v(\tau))\,d\tau.$$

Поскольку

$$\int_{t_i}^{t_j} l'C^2(\tau)\,(q-\bar v(\tau))\,d\tau = \int_{t_i}^{t_j} l'\,(C^2(\tau) - C^2(t_i))\,(q - \bar v(\tau))\,d\tau +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_j} l'C^2(t_i)\,(q - \bar v(\tau))\,d\tau \geqslant -\left| \int_{t_i}^{t_j} l'\,(C^2(\tau) - C^2(t_i))\,(q - \bar v(\tau))\,d\tau \right| \geqslant$$

$$\geqslant -\chi\nu\,(t_j - t_i)^2,$$

то тем самым неравенство (3.16) доказано, причем

$$\sigma = \sigma^*/2 + \chi\nu.$$

Доказательство теоремы 3.1 закончено.

Как было отмечено выше, теорема 3.1 описывает свойство отталкивания системы (2.1) по направлению вектора нормали к многограннику $W_c(t_i)$. На самом деле свойство отталкивания справедливо для более широкого множества векторов, чем совокупность векторов нормалей. Перейдем к его описанию. Пусть $\Lambda_c(t_e)$ — объединение всех конусов линейности $K = \operatorname{cone}\{l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n\}$ функции $\rho(\cdot,\ W_c(t_e))$, для каждого из которых

$$\bigcap_{s=1}^{n} Q^2(l_s,\ t_e) = \varnothing.$$

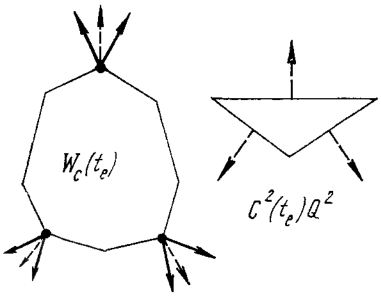

Рис. 3.

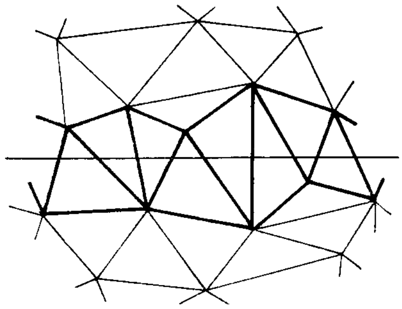

Рис. 4.

Конусы линейности, входящие в $\Lambda_c(t_e)$, для краткости будем называть «плохими». На рис. 3 для случая $n=2$ изображены многоугольник $W_c(t_e)$ и плохие конусы. При $n=2$ плохими являются те конусы линейности функции $\rho(\cdot, W_c(t_e))$, во внутренность которых попадают нормали многоугольника $C^2(t_e)Q^2$ (на рис. 3 $C^2(t_e)Q^2$ — треугольник). Если $n=3$ и Q^2 — отрезок, то плохими будут те из конусов линейности, внутренность которых пересекается проходящей через нуль плоскостью, ортогональной отрезку $C^2(t_e)Q^2$. На рис. 4 схематично представлена часть конусов линейности опорной функции многогранника $W_c(t_e)$. Плоскость, ортогональная отрезку $C^2(t_e)Q^2$, показана в виде прямой. Жирными линиями выделены плохие конусы. В общем случае конус линейности функции $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ относится к плохим, если его внутренность пересекается с границей хотя бы одного из конусов линейности опорной функции многогранника $C^2(t_e)Q^2$. Многогранник $C^2(t_e)Q^2$ при этом может быть вырожденным.

Свойство отталкивания справедливо при $l\in N(W_c(t_i))\cup$ $\cup(S\diagdown\Lambda(t_i))$. Это устанавливает

Теорема 3.2. Пусть $t_i,\ t_j\in\omega$ $(t_j>t_i)$, $l\in N(W_c(t_i))\cup(S\diagdown\Lambda(t_i))$, $q\in Q^2(l,\ t_i)$. Тогда

$$\rho(l,\ W_c(t_i))+\min_{u(\cdot)\in \mathbf{U}^2} l'\int_{t_i}^{t_j}(B^2(\tau)u(\tau)+C^2(\tau)q)\,d\tau\geqslant$$

$$\geqslant\rho(l,\ W_c(t_j))-\boldsymbol{R}\sigma(t_j-t_i)^2/r. \tag{3.19}$$

Здесь σ — константа из неравенства (3.16).

Доказательство. При $l\in N(W(t_i))$ (нижний индекс c опускаем) неравенство (3.19) выполнено по теореме 3.1. Пусть $l\notin N(W(t_i))$. Выделим конус линейности K, содержащий l $(K\cap\Lambda(t_i)=\varnothing)$. Пусть $\widehat{K}=\operatorname{cone}\{l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_m\}$, $1<m\leqslant n$, —

грань минимальной размерности конуса K, во внутренности которой лежит l (грань размерности n считаем совпадающей с K).

Покажем, что $Q^2(l, t_i) \subset \bigcap_{s=1}^{m} Q^2(l_s, t_i)$. Запишем вектор l в виде

$$l = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s l_s, \quad \lambda_s > 0, \quad s = \overline{1, m}.$$

Пусть $\bar{q}$, q^* — произвольные элементы из $Q^2(l, t_i)$ и $\bigcap_{s=1}^{m} Q^2(l_s, t_i)$ соответственно. Имеем $l'C^2(t_i)\bar{q} \geqslant l'C^2(t_i) q^*$. Следовательно,

$$\sum_{s=1}^{m} \lambda_s l_s' C^2(t_i) \bar{q} \geqslant \sum_{s=1}^{m} \lambda_s l_s' C^2(t_i) q^*. \tag{3.20}$$

С другой стороны,

$$l_s' C^2(t_i) \bar{q} \leqslant l_s' C^2(t_i) q^*, \quad s = \overline{1, m}. \tag{3.21}$$

Так как $\lambda_s > 0$ при всех s, то из неравенств (3.21), (3.22) получаем

$$l_s' C^2(t_i) \bar{q} = l_s' C^2(t_i) q^*, \quad s = \overline{1, m}.$$

Отсюда $\bar{q} \in \bigcap_{s=1}^{m} Q^2(l_s, t_i)$.

Рассмотрим произвольный вектор $q \in Q^2(l, t_i)$. По доказанному, $q \in Q^2(l_s, t_i)$ для всех $s = \overline{1, m}$. Символом $G_q(t_i, t_j)$ обозначим совокупность всех состояний x в момент t_i, для каждого из которых в системе (2.1) при $v(t) \equiv q \in Q^2$ существует программное управление $u(\cdot)$ первого игрока, переводящее систему (2.1) в момент t_j на $W(t_j)$. Опорная функция множества $G_q(t_i, t_j)$ описывается соотношением

$$\rho(\tilde{l}, G_q(t_i, t_j)) = \rho(\tilde{l}, W(t_j)) + \max_{u(\cdot) \in \mathrm{U}^2} \left[-\tilde{l}' \int_{t_i}^{t_j} (B^2(\tau) u(\tau) + \right.$$

$$\left. + C^2(\tau) q) \, d\tau \right] = \rho(\tilde{l}, W(t_j)) - \min_{u(\cdot) \in \mathrm{U}^2} \tilde{l}' \int_{t_i}^{t_j} (B^2(\tau) u(\tau) +$$

$$+ C^2(\tau) q) \, d\tau, \quad \tilde{l} \in R^n.$$

Поскольку $l_s \in N(W(t_i))$, $s = \overline{1, m}$, то из теоремы 3.1 вытекает

$$\rho(l_s, W(t_i)) + \min_{u(\cdot) \in \mathrm{U}^2} l_s' \int_{t_i}^{t_j} (B^2(\tau) u(\tau) + C^2(\tau) q) \, d\tau \geqslant \rho(l_s, W(t_j)) -$$

$$- \sigma(t_j - t_i)^2, \; s = \overline{1, m},$$

или, что то же самое,

$$\rho(l_s, G_q(t_i, t_j)) \leqslant \rho(l_s, W(t_i)) + \sigma(t_j - t_i)^2, \quad s = \overline{1, m}. \tag{3.22}$$

Неравенство (3.22) означает, что $G_q(t_i,\ t_j)$ принадлежит множеству

$$\Gamma = \{x \in R^n:\ l'_s x \leqslant \rho(l_s,\ W(t_i)) + \sigma(t_j - t_i)^2,\ s = \overline{1,\ m}\}.$$

Положим

$$\Pi = \{x \in R^n:\ l'_s x \leqslant \rho(l_s,\ W(t_i)),\ s = \overline{1,\ m}\}.$$

Имеем $\rho(\breve{l},\ \Pi) = \rho(\breve{l},\ W(t_i))$ при любом $\breve{l} \in \breve{K}$. Учитывая (2.5), применяем утверждение 3.1 при $\boldsymbol{E} = \breve{K}$, $g^* = g(t_i)$, $r^* = r$, $R^* = \boldsymbol{R}$. Получаем соотношение

$$\rho(l,\ G_q(t_i,\ t_j)) \leqslant \rho(l,\ W(t_i)) + \boldsymbol{R}\sigma(t_j - t_i)^2/r,$$

эквивалентное неравенству (3.19).

§ 4. Свойство отталкивания для исходной системы

В этом параграфе будет доказано свойство отталкивания в игре (1.1). Доказательство опирается на теорему 3.1. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, во многом аналогичное утверждению 3.1. Приведем его без доказательства.

Утверждение 4.1. Пусть $\mathscr{L}$ — некоторое множество единичных векторов, φ_l, $f_l\ (l \in \mathscr{L})$ — действительные числа, $R^* \geqslant r^* > 0$,

$$\Phi_l = \{x \in R^n:\ l'x \leqslant \varphi_l\},\quad F_l = \{x \in R^n:\ l'x \leqslant f_l\},$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \bigcap_{l \in \mathscr{L}} \Phi_l,\quad \boldsymbol{F} = \bigcap_{l \in \mathscr{L}} F_l.$$

Если $r^*O \subset \boldsymbol{\Phi} \subset R^*O$ и $|\varphi_l - f_l| \leqslant b \leqslant r^*$ для всех $l \in \mathscr{L}$, то $H(\boldsymbol{\Phi},\ \boldsymbol{F}) \leqslant R^*b/r^*$.

Здесь и далее H — символ Хаусдорфова расстояния.

Введем обозначение

$$\mathscr{D} = \{(t,\ x) \in T \times R^n:\ c_* < \Gamma^1(t,\ x) \leqslant c^*\},$$

где Γ^1 — функция цены игры (1.1), числа c_*, c^* введены в § 2. Сопоставим каждой позиции $(t,\ x) \in \mathscr{D}$ конус

$$\mathscr{K}(t,\ x) = \{l \in R^n:\ \rho(l,\ W^1_{\Gamma^1(t,\ x)}(t)) = l'x\},$$

в котором опорная функция множества $W^1_{\Gamma^1(t,\ x)}(t)$ линейна. Конус $\mathscr{K}(t,\ x)$ выпуклый, замкнутый, отличен от нуля и не содержит линейных подпространств.

Вектор конуса назовем крайним, если его нельзя представить как сумму линейно независимых векторов конуса. При $(t,\ x) \in \mathscr{D}$ обозначим через $\mathscr{L}(t,\ x)$ совокупность единичных крайних векторов конуса $\mathscr{K}(t,\ x)$. Пусть $\mathscr{L}(t,\ x) = 0$ при $(t,\ x) \notin \mathscr{D}$.

Забегая вперед, укажем, что для векторов из множества $\mathscr{L}(t,\ x)$, $(t,\ x) \in \mathscr{D}$ будет доказано свойство отталкивания.

Зафиксируем произвольную позицию $(\bar{t},\ \bar{x}) \in \mathscr{D}$, $\bar{t} < \vartheta$, и число $\Delta > 0$, $\bar{t} + \Delta \leqslant \vartheta$. Положим $\bar{c} = \Gamma^1(\bar{t},\ \bar{x})$.

Введем на промежутке $[\bar{t},\ \vartheta]$ аппроксимирующую последовательность игр, каждая из которых задается аналогично (2.1):

$$\dot{y}(t) = B_k^2(t)\,u + C_k^2(t)\,v,$$
$$y(t) \in R^n, \quad u \in P_k, \quad v \in Q_k. \tag{4.1}$$

Здесь B_k^2, C_k^2 — кусочно-постоянные с шагом $\varkappa = \Delta/k$ непрерывные справа аппроксимации функций B^1, C^1. Множества P_k^2, Q_k^2 — выпуклые многогранники, причем $H(P_k, P) \to 0$, $H(Q_k, Q) \to 0$ при $k \to \infty$. Липшицевы, выпуклые, с многогранными множествами уровня функции платы γ_k^2 равномерно сходятся к γ^1 на достаточно большом компакте. Для любых k, c, t множества уровня $W_c^{2,k}(t)$ функции цены игры (4.1) — выпуклые многогранники. Из работы [6] следует, что

$$H(W_c^{2,k}(t),\ W_c^1(t)) \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{4.2}$$

Пусть $\bar{l} \in \mathscr{L}(\bar{t}, \bar{x})$. Обозначим через l_k ближайшую к $\bar{l}$ единичную нормаль к грани размерности $n-1$ многогранника $W_{\bar{c}}^{2,k}(\bar{t})$. В случае неединственности берем любую из ближайших.

Лемма 4.1. Справедливо предельное соотношение

$$|l_k - \bar{l}| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Доказательство. Пусть α — число, удовлетворяющее условию $0 < \alpha < \sqrt{2}$. Положим

$$A(\alpha) = \{x \in R^n\colon\ l'x \leqslant \rho(l,\ W_{\bar{c}}^1(\bar{t})),\ |l| = 1,\ |l - \bar{l}| \geqslant \alpha\}.$$

Если α мало, то множество $\Phi(\alpha) = A(\alpha) - g(\bar{t})$ содержится в шаре $2\boldsymbol{R}O$. Действительно, из условия (2.4) следует, что $\Phi(\alpha)$ принадлежит множеству $\{x \in R^n\colon\ l'x \leqslant \boldsymbol{R},\ |l| = 1,\ |l - \bar{l}| \geqslant \alpha\}$, которое при малых α содержится в шаре $2\boldsymbol{R}O$.

Докажем справедливость неравенства

$$b(\alpha) = \rho(\bar{l},\ A(\alpha)) - \rho(\bar{l},\ W_{\bar{c}}^1(\bar{t})) > 0. \tag{4.3}$$

Из определения множества $A(\alpha)$ вытекает равенство

$$\rho(\bar{l},\ A(\alpha)) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\ W_{\bar{c}}^1(\bar{t}))\colon \tag{4.4}$$
$$\bar{l} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,\ \xi_i \neq 0,\ |\bar{l} - \xi_i/|\xi_i|| \geqslant \alpha\Big\}.$$

В силу условия (2.4) инфимум в (4.4) достигается. Пусть

$$\rho(\bar{l},\ A(\alpha)) = \sum_{i=1}^{n} \rho(\bar{\xi}_i,\ W_{\bar{c}}^1(\bar{t})),\ \bar{l} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i,$$
$$\bar{\xi}_i \neq 0,\ |\bar{l} - \bar{\xi}_i/|\bar{\xi}_i|| \geqslant \alpha.$$

Определение опорной функции влечет неравенства $\bar{\xi}_i'\bar{x} \leqslant \rho(\bar{\xi}_i,\ W_{\bar{c}}^1(\bar{t}))$, $i = \overline{1, n}$. Так как $\bar{l}$ — крайний вектор конуса $\mathscr{K}(\bar{t}, \bar{x})$, то хотя бы одно из этих неравенств строгое. Поэтому

$$\rho(\bar{l},\ W^1_{\bar{c}}\ (\bar{t})) = \bar{l}'\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}'_i\bar{x} < \sum_{i=1}^{n} \rho(\bar{\xi}_i,\ W^1_{\bar{c}}\ (\bar{t})) = \rho(\bar{l},\ A(\alpha)).$$

Соотношение (4.3) установлено.

Предположим, что утверждение леммы 4.2 неверно. Не меняя обозначений, будем считать, что $|l_k - \bar{l}| \geqslant \bar{\alpha} > 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ и кроме того, $\Phi(\bar{\alpha}) \subset 2\boldsymbol{R}O$. Из определения последовательности (l_k) следуют равенства

$$W^{2,k}_{\bar{c}}(\bar{t}) = \{x \in R^n\colon\ l'x \leqslant \rho(l,\ W^{2,k}_{\bar{c}}(\bar{t})),\ |l| = 1,\ |l - \bar{l}| \geqslant \bar{\alpha}\},$$

$$k = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Чтобы воспользоваться утверждением 4.1, положим

$$r^* = r,\ R^* = 2\boldsymbol{R},\ \varphi_l = \rho(l,\ W^1_{\bar{c}}(\bar{t})) - l'g(\bar{t}),$$

$$f_l = \rho(l,\ W^{2,k}_{\bar{c}}(\bar{t})) - l'g(\bar{t}),\ \mathscr{L} = \{l \in R^n\colon |l| = 1,\ |l - \bar{l}| \geqslant \bar{\alpha}\},$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \Phi(\bar{\alpha}),\ \boldsymbol{F} = W^{2,k}_{\bar{c}}(\bar{t}) - g(\bar{t}).$$

Перепишем свойство (4.2) в виде

$$\forall b > 0\ \exists J_b\colon\ \forall k \geqslant J_b\ \forall l\ (|l| = 1),$$

$$|\varphi_l - f_l| = |\rho(l,\ W^1_{\bar{c}}(\bar{t})) - \rho(l,\ W^{2,k}_{\bar{c}}(\bar{t}))| \leqslant b.$$

Пусть $b = \min\{r,\ rb(\bar{\alpha})/4\boldsymbol{R}\}$. Применив утверждение 4.1 при $k \geqslant J_b$, получим

$$H(A(\bar{\alpha}),\ W^{2,k}_{\bar{c}}(\bar{t})) = H(\boldsymbol{\Phi},\ \boldsymbol{F}) \leqslant b(\bar{\alpha})/2. \tag{4.5}$$

Из соотношений (4.5) и (4.3) при $\alpha = \bar{\alpha}$ вытекают неравенства

$$\rho(\bar{l},\ W^{2,k}_{\bar{c}}(\bar{t})) - \rho(\bar{l},\ W^1_{\bar{c}}(\bar{t})) > b(\bar{\alpha})/2,\ k \geqslant J_b,$$

которые противоречат (4.2). Лемма доказана.

Обозначим через U^2_k совокупность измеримых функций $u(\cdot)\colon T \to P^2_k$. Из липшицевости функции C^1 следует, что $\|C^2_k(\tau) - C^2_k(\bar{t})\| \leqslant \chi(\tau - \bar{t}),\ \tau \in T,\ \tau > \bar{t}$.

Теорема 4.1. Для любого вектора $l \in \mathscr{L}(\bar{t},\ \bar{x})$ и любого постоянного управления $q \in Q^1(\bar{l},\ \bar{t})$ справедливо неравенство

$$\rho(l,\ W^1_{\bar{c}}(\bar{t})) + \min_{u(\cdot) \in \mathrm{U}^1} l' \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta} (B^1(\tau)u(\tau) + C^1(\tau)q)\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \rho(l,\ W^1_{\bar{c}}(\bar{t} + \Delta)) - \bar{\sigma}\Delta^2, \tag{4.6}$$

где

$$\bar{\sigma} = \sigma + \chi\nu.$$

Доказательство. Неоднократно будем пользоваться тем, что опорная функция произвольного компактного множества Z удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\max\{|z|\colon z \in Z\}$. Зафиксируем вектор $l \in \mathscr{L}(\bar{t},\ \bar{x})$ и постоянное управление q.

Пусть l_k, $k=1, 2, \ldots$ — последовательность нормалей многогранников $W_{\bar{c}}^{2,k}(\bar{t})$ из леммы 4.2, т. е. $|l_k - l| \to 0$ при $k \to \infty$. Из теоремы 3.1 получаем

$$\rho(l_k, W_{\bar{c}}^{2,k}(\bar{t})) + \min_{u(\cdot)\in \mathrm{U}_k^2} l_k' \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta} (B_k^2(\tau)u(\tau) + C_k^2(\tau)q_k)\,d\tau \geqslant \rho(l_k, W_{\bar{c}}^{2,k}(\bar{t}+\Delta)) - \sigma\Delta^2. \tag{4.7}$$

Здесь q_k удовлетворяют условию

$$l_k' C_k^2(\bar{t})\,q_k = \max_{\breve{q}\in Q_k^2} l_k' C_k^2(\bar{t})\,\breve{q}.$$

Оценим разность между соответствующими слагаемыми в (4.6) и (4.7). Имеем

$$|\rho(l, W_{\bar{c}}^{1}(\bar{t})) - \rho(l_k, W_{\bar{c}}^{2,k}(\bar{t}))| = |\rho(l, W_{\bar{c}}^{1}(\bar{t})) - \rho(l_k, W_{\bar{c}}^{1}(\bar{t})) + \rho(l_k, W_{\bar{c}}^{1}(\bar{t})) - \rho(l_k, W_{\bar{c}}^{2,k}(\bar{t}))| \leqslant$$
$$\leqslant (\max_{t\in T}|g(t)| + \boldsymbol{R})|l_k - l| + H(W_{\bar{c}}^{1}(\bar{t}), W_{\bar{c}}^{2,k}(\bar{t})).$$

Следовательно,

$$\rho(l, W_{\bar{c}}^{1}(\bar{t})) - \rho(l_k, W_{\bar{c}}^{2,k}(\bar{t})) \geqslant -\varepsilon_1^k, \quad \varepsilon_1^k \to +0, \quad k \to \infty. \tag{4.8}$$

Аналогично

$$\rho(l_k, W_{\bar{c}}^{2,k}(\bar{t}+\Delta)) - \rho(l, W_{\bar{c}}^{1}(\bar{t}+\Delta)) \geqslant -\varepsilon_2^k, \quad \varepsilon_2^k \to +0, \quad k \to \infty. \tag{4.9}$$

Оценим разность

$$\min_{u(\cdot)\in \mathrm{U}^1} l' \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta} B^1(\tau)u(\tau)\,d\tau - \min_{u(\cdot)\in \mathrm{U}_k^2} l_k' \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta} B_k^2(\tau)u(\tau)\,d\tau =$$
$$= \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\Delta} (\rho(l_k, -B_k^2(\tau)P_k^2) - \rho(l, -B^1(\tau)P^1))\,d\tau.$$

Имеем

$$|\rho(l_k, -B_k^2(\tau)P_k^2) - \rho(l, -B^1(\tau)P^1)| = |\rho(l_k, -B_k^2(\tau)P_k^2) - \rho(l_k, -B^1(\tau)P_k^2) + \rho(l_k, -B^1(\tau)P_k^2) -$$
$$- \rho(l_k, -B^1(\tau)P^1) + \rho(l_k, -B^1(\tau)P^1) - \rho(l, -B^1(\tau)P^1)| \leqslant \max_{p\in P_k^2}|p| \max_{\tau\in T}\|B^1(\tau) - B_k^2(\tau)\| +$$
$$+ \max_{\tau\in T}\|B^1(\tau)\|\,H(P^1, P_k^2) + \max_{\tau\in T}\|B^1(\tau)\| \max_{p\in P^1}|p|\,|l_k - l|.$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\min_{u(\cdot)\in \mathbf{U}^1} l' \int_{\bar t}^{\bar t+\Delta} B^1(\tau)\, u(\tau)\, d\tau - \min_{u(\cdot)\in \mathbf{U}_k^2} l_k' \int_{\bar t}^{\bar t+\Delta} B_k^2(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \geqslant -\varepsilon_3^k,$$

$$\varepsilon_3^k \to +0, \quad k\to\infty. \tag{4.10}$$

Рассмотрим разность

$$l' \int_{\bar t}^{\bar t+\Delta} C^1(\tau)\, q\, d\tau - l_k' \int_{\bar t}^{\bar t+\Delta} C_k^2(\tau)\, q_k d\tau = \int_{\bar t}^{\bar t+\Delta} \big(l' C^1(\tau)\, q -$$

$$- l_k' C_k^2(\tau)\, q_k\big)\, d\tau.$$

Прибавляя и вычитая $l'C^1(\bar t)\, q$, $l_k' C_k^2(\bar t)\, q_k$, преобразуем подынтегральное выражение правой части к виду

$$l'\,(C^1(\tau) - C^1(\bar t))\, q + \big(l'C^1(\bar t)\, q - l_k' C_k^2(\bar t)\, q_k\big) + l_k' \times$$

$$\times \big(C_k^2(\bar t) - C_k^2(\tau)\big)\, q_k.$$

Модуль первого слагаемого оценивается сверху величиной $\max \times |\breve q| \chi\Delta$, $\breve q \in Q^1$, третьего — величиной

$$\max_{\breve q\in Q_k^2} |\breve q| \chi\Delta \leqslant \max_{\breve q\in Q^1} |\breve q| \chi\Delta + \chi H\big(Q^1,\ Q_k^2\big).$$

Пользуясь определением векторов q, q_k и равенством $C_k^2(\bar t) = C^1(\bar t)$, справедливым при аппроксимации (4.1), записываем второе слагаемое в форме $\rho\,(l,\ C^1(\bar t)\, Q^1) - \rho\,\big(l_k,\ C^1(\bar t)\, Q_k^2\big)$. Получаем

$$|\rho\,(l,\ C^1(\bar t)\, Q^1) - \rho\,\big(l_k,\ C^1(\bar t)\, Q_k^2\big)| = |\rho\,(l,\ C^1(\bar t)\, Q^1) - \rho\,\big(l_k,$$

$$C^1(\bar t)\, Q^1\big) + \rho\,\big(l_k,\ C^1(\bar t)\, Q^1\big) - \rho\,\big(l_k,\ C^1(\bar t)\, Q_k^2\big)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\tau\in T} \| C^1(\tau) \| \max_{\breve q\in Q^1} |\breve q|\, |l_k - l| + \max_{\tau\in T} \| C^1(\tau) \|\, H\big(Q^1,\ Q_k^2\big).$$

С учетом полученных оценок имеем соотношение

$$l' \int_{\bar t}^{\bar t+\Delta} C^1(\tau)\, q\, d\tau - l_k' \int_{\bar t}^{\bar t+\Delta} C_k^2(\tau)\, q_k d\tau \geqslant -\max_{q\in Q^1} |q| \chi\Delta^2 -$$

$$-\varepsilon_4^k = -\chi\nu\Delta^2 - \varepsilon_4^k, \quad \varepsilon_4^k \to +0, \quad k\to\infty. \tag{4.11}$$

Из неравенств (4.7) — (4.11) получим

$$\sigma\,\big(l,\ W_{\bar c}^1(\bar t)\big) + \min_{u(\cdot)\in \mathbf{U}^1} l' \int_{\bar t}^{\bar t+\Delta} (B^1(\tau)\, u(\tau) + C^1(\tau)\, q)\, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \rho\,\big(l,\ W_{\bar c}^1(\bar t+\Delta)\big) - (\sigma + \chi\nu)\,\Delta^2 - \varepsilon_1^k - \varepsilon_2^k - \varepsilon_3^k - \varepsilon_4^k.$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 4.1, остается перейти к пределу при $k\to\infty$.

Доказанная теорема аналогична теореме 3.1, описывающей свойство отталкивания в игре (2.1) по направлениям внешних нормалей многогранников $W_c(t_c)$. Для выпуклых компактов $W_c^1(t)$ аналогом множества внешних нормалей является совокупность крайних векторов всех конусов линейности опорной функции $\rho(\cdot, W_c^1(t))$. В теореме 4.1 доказано свойство отталкивания в игре (1.1) для такой совокупности векторов. Данный результат можно было бы обобщить, распространив свойство отталкивания на внутренние векторы «хороших» конусов линейности опорной функции $\rho(\cdot, W_c^1(t))$. При этом получили бы утверждение, аналогичное теореме 3.2. Однако для определения в § 6 универсальной стратегии второго игрока и доказательства ее оптимальности достаточно свойства отталкивания, описываемого теоремой 4.1.

§ 5. Экстремальное кусочно-программное управление второго игрока

Опишем алгоритм управления второго игрока для системы (1.1), использующий свойство отталкивания от многогранников $W_c(t_e)$. Для реализации алгоритма нужно зафиксировать некоторое $c \in [c_*, c^*]$ и, обрабатывая многогранники $W_c(t_e)$, $e = 0, 1, 2, \ldots$, снять информацию о плохих конусах и значениях опорной функции $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ на образующих этих конусов. Условимся в данном параграфе считать начальный момент t_* совпадающим с одним из моментов t_e, шаг Δ дискретной схемы [4] управления второго игрока будем полагать постоянным и кратным $\varkappa$. Положим $\tau_0 = t_*$, $\tau_k = \tau_{k-1} + \Delta$, $k = 1, 2, \ldots$. В каждый момент τ_k управление второго игрока будем выбирать как экстремальное на некотором векторе. В начальный момент t_* следует задать единичный начальный вектор l_*. О задании этого вектора, так же как и о выборе конкретного значения параметра c, будет сказано ниже. Пока считаем их выбранными и зафиксированными.

Алгоритм управления опишем для двух случаев: а) когда фазовый вектор $y^1(\tau_k)$ состояния системы (1.1) в момент τ_k известен точно, в) когда в схему управления вместо точного фазового вектора $y^1(\tau_k)$ подается замер $z^1(\tau_k)$. Алгоритм а) в отличие от алгоритма в) не обладает свойством устойчивости. Однако он проще, и, знакомясь с ним, легче понять существо дела.

Рассмотрим алгоритм а). Пусть даны начальная позиция $(t_*, x_*) = (t_*, y^1(t_*))$ и некоторый начальный вектор l_*. Формирование управления на каждом шаге дискретной схемы однотипно. Опишем общий шаг. В момент τ_k имеем фазовый вектор $y^1(\tau_k)$ и вектор $l(\tau_k)$, передаваемый с предыдущего шага и выбранный в момент τ_{k-1}. Формально считаем

$$l(t) = l(\tau_k), \quad t \in (\tau_{k-1}, \tau_k], \quad k = 1, 2, \ldots, \quad l(\tau_0) = l_*.$$

Если $l(\tau_k) \notin \Lambda_c(\tau_k)$, то вектор $l(\tau_k)$ не меняем, положив $l(\tau_{k+1}) =$

$= l(\tau_k)$. Если $l(\tau_k) \in \Lambda_c(\tau_k)$, т. е. обнаружен плохой конус $K = \operatorname{cone}\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$, содержащий вектор $l(\tau_k)$, то в качестве $l(\tau_{k+1})$ выберем ту из образующих $l_1, l_2, \ldots, l_n$ конуса K, на которой реализуется минимум расстояний $d_c(\tau_k, l_s, y^1(\tau_k))$, $s = \overline{1, n}$:

$$d_c(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k)) = \min_{1 \leqslant s \leqslant n} d_c(\tau_k, l_s, y^1(\tau_k)).$$

В качестве управляющего воздействия второго игрока на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1})$ возьмем любой вектор из совокупности экстремальных векторов

$$Q^1(l(\tau_{k+1}), \tau_k).$$

Пусть на промежутке $[t_*, \vartheta]$ управление второго игрока вырабатывалось по алгоритму а). Тогда при любом $t_i \geqslant t_*$, $t_i \in \omega$, справедлива оценка

$$d_c(t_i, l(t_i), y^1(t_i)) \leqslant \max\{0, d_c(t_*, l_*, y^1(t_*))\} + \\ + \left(\frac{R}{r}\sigma + \chi\nu\right)(t_i - t_*)\Delta + \varepsilon(t_*, t_i). \tag{5.1}$$

Здесь σ — константа из неравенства (3.16), величина $\varepsilon(t_*, t_e)$ характеризует различие динамик систем (1.1), (2.1) и описывается соотношением

$$\varepsilon(t_i, t_j) = \int_{t_i}^{t_j} \max_{|l| \leqslant 1} [\min_{p \in P^2} l'B^2(\tau)p - \min_{p \in P^1} l'B^1(\tau)p + \\ + \max_{q \in Q^2} l'C^2(\tau)q - \max_{q \in Q^1} l'C^1(\tau)q]\, d\tau.$$

Предположим теперь, что состояние $y^1(\tau_k)$ замеряется неточно и в каждый момент τ_k в схему формирования управления вместо $y^1(\tau_k)$ подается замер $z^1(\tau_k)$. Пусть α — оценка точности, т. е. $|y^1(\tau_k) - z^1(\tau_k)| \leqslant \alpha$ при любом k. Алгоритм в) отличается от алгоритма а) несколько иным выбором вектора $l(\tau_{k+1})$.

Зафиксируем число μ_*, $0 < \mu_* < 1$. Выбор параметра μ_* пока не будем связывать с числом α. В момент t_* имеем замер $z^1(t_*)$ и вектор l_*. Рассмотрим общий шаг. В момент τ_k имеем замер $z^1(\tau_k)$ и вектор $l(\tau_k)$, передаваемый с предыдущего шага. Если $l(\tau_k) \notin \Lambda_c(\tau_k)$, полагаем $l(\tau_{k+1}) = l(\tau_k)$. Пусть $l(\tau_k) \in \Lambda_c(\tau_k)$, т. е. обнаружен плохой конус $K = \operatorname{cone}\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$, содержащий вектор $l(\tau_k)$. При одновременном выполнении неравенств $l'(\tau_k) \times l_s \leqslant 1 - \mu_*$, $s = \overline{1, n}$, в качестве вектора $l(\tau_{k+1})$ выберем ту из образующих $l_1, l_2, \ldots, l_n$ конуса K, на которой реализуется минимум расстояний $d_c(\tau_k, l_s, z^1(\tau_k))$, $s = \overline{1, n}$. Если $l'(\tau_k) l_s > 1 - \mu_*$ хотя бы для одного $s = \overline{1, n}$, то примем $l(\tau_{k+1}) = l(\tau_k)$. Таким образом, описан выбор вектора $l(\tau_{k+1})$. В качестве управляющего воздействия второго игрока на промежуток $[\tau_k, \tau_{k+1})$ возьмем любой вектор из $Q^1(l(\tau_{k+1}), \tau_k)$.

Пусть на промежутке $[t_*, \vartheta]$ управление второго игрока вырабатывалось по алгоритму в). Тогда при любом $t_i \geqslant t_*$, $t_i \in \omega$, справедлива оценка

$$d_c(t_i, l(t_i), y^1(t_i)) \leqslant \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu_*} + 2\alpha, d_c(t_*, l_*, y^1(t_*))\right\} + \\ + \sigma_1(t_i - t_*)\Delta + \sigma_2(t_i - t_*)\sqrt{\mu_*} + \varepsilon(t_*, t_i), \tag{5.2}$$

где σ_1, σ_2 — положительные константы. Поскольку $d_c(t_*, l_*, y^1 \times \times (t_*)) \leqslant d_c(t_*, l_*, z^1(t_*)) + \alpha$, то правую часть оценки (5.2) можно записать через $z^1(t_*)$, а именно

$$d_c(t_i, l(t_i), y^1(t_i)) \leqslant \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu_*}, d_c(t_*, l_*, z^1(t_*))\right\} + \\ + 2\alpha + \sigma_1(t_i - t_*)\Delta + \sigma_2(t_i - t_*)\sqrt{\mu_*} + \varepsilon(t_*, t_i). \tag{5.3}$$

Доказательство оценок (5.1), (5.2) приведено ниже. Прежде сделаем несколько замечаний.

1. При фиксированном c оценки (5.1) — (5.3) зависят от выбора начального вектора l_*. Пусть, например, начальная точка $y^1(t_*)$ принадлежит границе многогранника $W_c(t_*)$. Если в качестве l_* взять единичную внешнюю нормаль к $W_c(t_*)$ в точке $y^1(t_*)$, то начальное расстояние $d_c(t_*, l_*, y^1(t_*))$ равно нулю. Когда вместо $y^1(t_*)$ известен лишь замер $z^1(t_*)$, то в качестве l_* целесообразно брать тот из векторов нормалей к $W_c(t_*)$, на котором достигается минимум величины $d_c(t_*, l, z^1(t_*))$. В связи с этим желательно хранить для момента t_* (и только для этого момента) полную информацию об опорной функции многогранника $W_c(t_*)$.

2. При малой величине начального расстояния $d_c(t_*, l_*, y^1(t_*))$ и малом шаге Δ алгоритмы а), в) обеспечивают удержание фазового вектора $y^1(t_e)$ системы (1.1) в любой момент t_e вблизи множества $R^n \setminus \operatorname{int} W_c(t_e)$. Это видно из оценок (5.1), (5.2). Для определенности будем говорить об оценке (5.2). Из нее для момента ϑ получаем

$$d_c(\vartheta, l(\vartheta), y^1(\vartheta)) \leqslant \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu_*} + 2\alpha, d_c(t_*, l_*, \right. \\ \left. y^1(t_*))\right\} + \sigma_1(\vartheta - t_*)\Delta + \sigma_2(\vartheta - t_*)\sqrt{\mu_*} + \varepsilon(t_*, \vartheta). \tag{5.4}$$

Таким образом, расстояние от точки $y^1(\vartheta)$ до множества $R^n \setminus \operatorname{int} W_c(\vartheta) = \{x \in R^n\colon \gamma^2(x) \geqslant c\}$ не превышает величины, стоящей в правой части неравенства (5.4). Пусть λ^2 — константа Липшица функции γ^2, X — компактное множество, оценивающее сверху возможные положения $y^1(\vartheta)$, $\|\gamma^1 - \gamma^2\|_X = \max\{|\gamma^1(x) - \gamma^2(x)|\colon x \in X\}$. Символом $\mathcal{F}$ обозначим правую часть оценки (5.4). Имеем

$$\gamma^1(y^1(\vartheta)) \geqslant c - \lambda^2\mathcal{F} - \|\gamma^1 - \gamma^2\|_X. \tag{5.5}$$

Неравенство (5.5) характеризует гарантию второго игрока в игре (1.1), когда он использует алгоритм в). Второе и третье слагаемые в правой части (5.5) малы, если обеспечена достаточная близость исходной и аппроксимирующих игр, малы шаг Δ, начальное расстояние $d_c(t_*, l_*, y^1(t_*))$, величины α и μ_* $\left(\text{параметр } \mu_* \text{ можно выбирать по заданному } \alpha, \text{ например, } \mu_* = \sqrt{\alpha}\right)$. Гарантия второго игрока при этом близка к числу c. Если, кроме того, число c близко к цене $\Gamma^1(t_*, y^1(t_*))$ игры (1.1) в позиции $(t_*, y^1(t_*))$, то гарантия второго игрока близка к оптимальной. Следовательно, желательно, чтобы попятная процедура построения многогранников $W_c(t_e)$ давала хорошее приближение к множествам $W_c^1(t_e)$ и фиксируемое нами число c выбиралось с учетом информации о начальной позиции $(t_*, y^1(t_*))$ таким образом, чтобы при взятом c обеспечивалась близость $y^1(t_*)$ к границе многогранника $W_c(t_*)$.

Оценки (5.2) — (5.5) говорят об устойчивости алгоритма в) относительно погрешностей измерения состояния системы (1.1). Имеет место также устойчивость относительно погрешностей построения многогранников $W_c(t_e)$. Напротив, можно показать, что алгоритм а) неустойчив.

3. Пусть τ_k — произвольный момент, при котором вектор $l(\tau_k)$ заменяется на новый, отличный от него вектор $l(\tau_{k+1})$. Зная вектор $l(\tau_{k+1})$, можем в момент τ_k просчитать следующий момент τ_m, $m > k$, когда уже вектор $l(\tau_m) = l(\tau_{k+1})$ попадет в плохой конус и будет заменен на новый вектор. Следовательно, в момент τ_k можем сформировать кусочно-постоянное программное управление второго игрока на весь промежуток $[\tau_k, \tau_m)$. В момент τ_m, используя информацию о состоянии системы (1.1), выбираем новый вектор $l(\tau_{m+1})$, определяем промежуток $[\tau_m, \tau_j)$, $j > m$, на котором он не будет меняться, формируем программное управление на промежуток $[\tau_m, \tau_j)$ и т. д. Таким образом, управление второго игрока, определяемое алгоритмами а), в), может быть реализовано как кусочно-программное (что и объясняет название этого параграфа). Переход с одной программы на другую происходит в момент смены вектора отталкивания.

Перейдем к изложению доказательства оценок (5.1), (5.2). При доказательстве оценки (5.2) будем считать выполненным следующее предположение: существует такая константа $\beta > 0$, что для любого конуса линейности $K = \operatorname{cone}\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ опорной функции $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ имеет место неравенство

$$|l_s - l_k||D_{sm}| \leqslant \beta |D|, \quad s, k, m = \overline{1, n}. \tag{5.6}$$

Здесь D — определитель матрицы, составленной из координат векторов $l_1, l_2, \ldots, l_n$, D_{sm} — алгебраическое дополнение ее элемента с номерами s, m. Условие (5.6) ограничивает «вытянутость» конусов линейности опорной функции $\rho(\cdot, W_c(t_e))$.

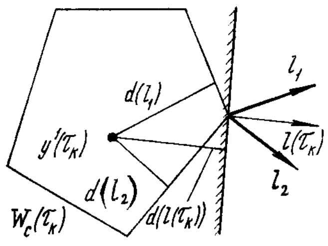

Рис. 5.

В основе доказательства оценок (5.1), (5.2) лежит оценка изменения величины d_c на одном шаге $[\tau_k, \tau_{k+1})$ дискретной схемы управления второго игрока. Основная идея состоит в следующем. Расстояние $d_c(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$, которое существует на момент τ_k после k-го шага, при замене в момент τ_k вектора $l(\tau_k)$ на вектор $l(\tau_{k+1})$ переходит в расстояние $d_c(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k))$. На промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1})$ управление второго игрока постоянно и выбирается из условия экстремума на векторе $l(\tau_{k+1})$. В момент τ_{k+1} получим расстояние $d_c(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1}))$. Таким образом, просчет $d_c(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1}))$ по $d_c(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$ распадается на два этапа: оценку расстояния $d_c(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k))$ по $d_c(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$ и оценку $d_c(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1}))$ по $d_c(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k))$.

Для оценки величины $d_c(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k))$ через $d_c(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$ используем утверждение 5.1. Из него, в частности, следует, что если вектор $l(\tau_k)$ попадает в некоторый плохой конус линейности $K = \text{cone}\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ и точка $y^1(\tau_k)$ принадлежит опорному полупространству $l'(\tau_k)x \leqslant \rho(l(\tau_k), W_c(\tau_k))$, то хотя бы для одного вектора l_s из совокупности $l_1, l_2, \ldots, l_n$ расстояние $d_c(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$ не больше расстояния $d_c(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$ (рис. 5; $n = 2$; величина $d_c(\tau_k, l, y^1(\tau_k))$ для краткости обозначена через $d(l)$). Если, кроме того, вектор $l(\tau_k)$ далек от образующих $l_1, l_2, \ldots, l_n$ в том смысле, что $l'(\tau_k)l_s \leqslant 1 - \mu_*$ для всех $s = \overline{1, n}$, то минимальное из расстояний $d_c(\tau_k, l_s, y^1(\tau_k))$, $s = \overline{1, n}$, меньше $d_c(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$ по крайней мере на величину $d_c(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))\mu_*$. При анализе алгоритма а) нужно в утверждении 5.1 взять $\mu^* = 0$. Лемма 5.1 дает оценку отталкивания по вектору l, когда он попадает в плохой конус, но близок к одной из его образующих. Условие (5.6) требуется именно для этой леммы. Лемма 5.1 наряду с теоремой 3.2 используется для оценки величины $d_c(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1}))$ через $d_c(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k))$. При анализе алгоритма а) лемма 5.1 не нужна.

Отметим, что при анализе алгоритма в) оцениваем, как и в случае алгоритма а), расстояние d_c, определяемое истинным (но не известным нам) состоянием $y^1(t)$ системы (1.1), в то время как управление второго игрока формируется по замеру $z^1(t)$.

Утверждение 5.1. Пусть $\mu^* \in [0, 1)$ и единичные векторы $\bar{l}$, l_1, l_2, $\ldots$, l_n таковы, что

$$\bar{l} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s l_s, \quad \lambda_s \geqslant 0, \quad \bar{l}' l_s \leqslant 1 - \mu^*, \quad s = \overline{1, n}.$$

Если при некоторых $x \in R^n$ и $h \geqslant 0$ выполнено неравенство $\bar{l}'x \geqslant -h$, то

$$\max_{1 \leqslant s \leqslant n} l_s' x \geqslant -h + h\mu^*.$$

Лемма 5.1. Пусть $\mu^* \in [0, 1)$, $c \in [c_*, c^*]$, $t_i \in \omega$ и единичный вектор l принадлежит конусу линейности $K = \operatorname{cone}\{l_1, l_2, \ldots, l_n\} \subset \Lambda_c(t_i)$. Пусть $l' l_s \geqslant 1 - \mu^*$ при некотором s, $1 \leqslant s \leqslant n$. Тогда для всех $t_j \in \omega$ $(t_j > t_i)$ и любого $q \in Q^2(l, t_i)$ справедливо неравенство

$$\rho(l, W_c(t_i)) + \min_{u(\cdot) \in U^2} l' \int_{t_i}^{t_j} (B^2(\tau) u(\tau) + C^2(\tau) q)\, d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \rho(l, W_c(t_j)) - \tilde{\sigma}_1 (t_j - t_i)^2 - \sigma_2 \sqrt{\mu^*}(t_j - t_i), \qquad (5.7)$$

где

$$\tilde{\sigma}_1 = \chi\nu + \frac{1}{r}\left(R + 4\beta\xi\nu n\sqrt{n}(\vartheta - t_0)\right)(\chi\nu + \sigma),$$
$$\sigma_2 = 2\sqrt{2}\xi\nu\left(1 + \beta n\sqrt{n}\right).$$

Доказательства утверждения 5.1 и леммы 5.1 имеются в работе [5] и здесь не приводятся.

Далее, поскольку параметр c зафиксирован, условимся опускать нижний индекс c в обозначениях d_c, W_c, Λ_c.

Приступим к доказательству оценки (5.1). Зафиксируем начальную позицию (t_*, x_*) и программное управление $u(\cdot) \in U^1$. Рассмотрим движение $y^1(\cdot)$ системы (1.1) из позиции (t_*, x_*), когда второй игрок применяет алгоритм а), а первый — управление $u(\cdot)$. Пусть $v^*(\cdot)$ — реализация управления второго игрока вдоль $y^1(\cdot)$. Выберем произвольный момент $t_i \in \omega$. Пусть $\tau_{\bar{k}}$ — ближайший слева к t_i момент из набора $\{\tau_k\}$. Покажем, что для любого k, $0 \leqslant k \leqslant \bar{k} - 1$, выполнено соотношение

$$d(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1})) \leqslant \max\{0, d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))\} +$$
$$+ \frac{R}{r}\sigma\Delta^2 + \varepsilon(\tau_k, \tau_{k+1}) + \chi\nu\Delta^2. \qquad (5.8)$$

Кроме того,

$$d(t_i, l(\tau_{\bar{k}+1}), y^1(t_i)) \leqslant \max\{0, d(\tau_{\bar{k}}, l(\tau_{\bar{k}}), y^1(\tau_{\bar{k}}))\} +$$
$$+ \frac{R}{r}\sigma(t_i - \tau_{\bar{k}})^2 + \varepsilon(\tau_{\bar{k}}, t_i) + \chi\nu(t_i - \tau_{\bar{k}})^2. \qquad (5.9)$$

Вначале докажем неравенство

$$d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k)) \leqslant \max\{0, d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant \bar{k}. \qquad (5.10)$$

Если $l(\tau_k) \notin \Lambda(\tau_k)$, то $l(\tau_{k+1}) = l(\tau_k)$ и соотношение (5.10) реализуется в виде равенства $d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k)) = d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$.

Пусть $l(\tau_k) \in K = \operatorname{cone}\{l_1, l_2, \ldots, l_n\} \subset \Lambda(\tau_k)$. Обозначим через w вершину многогранника $W(\tau_k)$, соответствующую конусу K, т. е. $l'w = \rho(l, W(\tau_k))$ при $l \in K$. Обращаясь к утверждению 5.1, полагаем

$$\mu^* = 0, \ \bar{l} = l(\tau_k), \ x = y^1(\tau_k) - w,$$

$$h = \max\{0, \ -\bar{l}'x\} = \max\{0, \ l'(\tau_k)(w - y^1(\tau_k))\}.$$

Получаем

$$\max_{1 \leqslant s \leqslant n} l_s'(y^1(\tau_k) - w) \geqslant -\max\{0, \ l'(\tau_k)(w - y^1(\tau_k))\}. \qquad (5.11)$$

Учитывая, что $l'(w - y^1(\tau_k)) = d(\tau_k, \ l, \ y^1(\tau_k))$ при $l \in K$, переписываем (5.11) в виде

$$\min_{1 \leqslant s \leqslant n} d(\tau_k, \ l_s, \ y^1(\tau_k)) \leqslant \max\{0, \ d(\tau_k, \ l(\tau_k), \ y^1(\tau_k))\}.$$

Отсюда с учетом правила выбора вектора $l(\tau_{k+1})$ в алгоритме а) следует неравенство (5.10).

Пусть $0 \leqslant k \leqslant \bar{k} - 1$. Обозначим через $u_k(\cdot)$ программное управление первого игрока на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1})$, удовлетворяющее условию

$$l'(\tau_{k+1}) B^2(t) u_k(t) = \min_{p \in P^2} l'(\tau_{k+1}) B^2(t) p.$$

Пусть q_k — вектор из $Q^2(l(\tau_{k+1}), \tau_k)$. В силу теоремы 3.2 и неравенства (5.10) имеем

$$d(\tau_{k+1}, \ l(\tau_{k+1}), \ y^2(\tau_{k+1}; \ \tau_k, \ y^1(\tau_k), \ u_k(\cdot), \ q_k)) \leqslant$$
$$\leqslant \max\{0, \ d(\tau_k, \ l(\tau_k), \ y^1(\tau_k))\} + \frac{R}{r} \sigma(\tau_{k+1} - \tau_k)^2. \qquad (5.12)$$

Здесь $y^2(\tau_{k+1}; \ \tau_k, \ y^1(\tau_k), \ u_k(\cdot), \ q_k)$ — состояние системы (2.1) в момент τ_{k+1}, получаемое при движении из позиции $(\tau_k, y^1(\tau_k))$ в силу управлений $u_k(\cdot)$, $v(t) \equiv q_k$. Соотношение (5.12) эквивалентно неравенству

$$d(\tau_{k+1}, \ l(\tau_{k+1}), \ y^1(\tau_{k+1})) \leqslant \max\{0, \ d(\tau_k, \ l(\tau_k), \ y^1(\tau_k))\} +$$
$$+ \frac{R}{r} \sigma(\tau_{k+1} - \tau_k)^2 + l'(\tau_{k+1})[y^2(\tau_{k+1}; \ \tau_k,$$
$$y^1(\tau_k), \ u_k(\cdot), \ q_k) - y^1(\tau_{k+1})]. \qquad (5.13)$$

Расписывая в нем последнее слагаемое и учитывая, что на $[\tau_k, \tau_{k+1})$ управление $v^*(t)$ есть постоянный вектор из $Q^1(l(\tau_{k+1}), \tau_k)$, получаем

$$l'(\tau_{k+1})[y^2(\tau_{k+1}; \ \tau_k, \ y^1(\tau_k), \ u_k(\cdot), \ q_k) - y^1(\tau_{k+1})] =$$
$$= l'(\tau_{k+1}) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} [B^2(\tau) u_k(\tau) - B^1(\tau) u(\tau) + C^2(\tau) \times$$
$$\times q_k - C^1(\tau) v^*(\tau)] \, d\tau \leqslant \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} [\min_{p \in P^2} l'(\tau_{k+1}) B^2(\tau) p - \min_{p \in P^1} l' \times$$

$$\times(\tau_{k+1})\, B^1(\tau)\, p + \max_{q\in Q^2} l'(\tau_{k+1})\, C^2(\tau)\, q - \max_{q\in Q^1} l'(\tau_{k+1})\times$$
$$\times C^1(\tau)\, q + \max_{q\in Q^1} l'(\tau_{k+1})\, C^1(\tau)\, q - l'(\tau_{k+1})\, C^1(\tau)\, v^*(\tau)]\times$$
$$\times d\tau \leqslant \varepsilon(\tau_k,\ \tau_{k+1}) + \chi\nu(\tau_{k+1}-\tau_k)^2. \qquad (5.14)$$

Поскольку $\tau_{k+1}-\tau_k=\Delta$, то из (5.13), (5.14) следует (5.8). Для получения оценки (5.9) нужно рассмотреть промежуток $[\tau_{\overline{k}},\ t_i]$ и в формулах (5.12) — (5.14) заменить τ_k на $\tau_{\overline{k}}$, τ_{k+1} на t_i, $l(\tau_{k+1})$ на $l(\tau_{\overline{k}+1})$.

Осуществляя в (5.8) последовательную подстановку при $k=\overline{k}-1,\ \overline{k}-2,\ \ldots,\ 1,\ 0$, находим

$$d(\tau_{\overline{k}},\ l(\tau_{\overline{k}}),\ y^1(\tau_{\overline{k}})) \leqslant \max\{0,\ d(t_*,\ l_*,\ y^1(t_*)\} +$$
$$+\frac{R}{r}\sigma\Delta^2\overline{k} + \varepsilon(t_*,\ \tau_{\overline{k}}) + \chi\nu\Delta^2\overline{k} = \max\{0,\ d(t_*,\ l_*,\ y^1(t_*))\} +$$
$$+\frac{R}{r}\sigma\Delta(\tau_{\overline{k}}-t_*) + \varepsilon(t_*,\ \tau_{\overline{k}}) + \chi\nu\Delta(\tau_{\overline{k}}-t_*). \qquad (5.15)$$

Оценка (5.1) вытекает из неравенств (5.9), (5.15) с учетом того, что $l(t_i)=l(\tau_{\overline{k}+1})$ и $(t_i-\tau_{\overline{k}})<\Delta$.

Докажем оценку (5.2). Зафиксируем $(t_*,\ x_*)$, t_i, $u(\cdot)\in U^1$. Символ $y^1(\cdot)$ будет означать движение системы (1.1) из $(t_*,\ x_*)$, когда второй игрок применяет алгоритм в), а первый — управление $u(\cdot)$. Как и выше, пусть $\tau_{\overline{k}}$ — ближайший слева к t_i момент из набора $\{\tau_k\}$.

Покажем, что при любом k, $0\leqslant k\leqslant\overline{k}$, справедливо неравенство

$$d(\tau_k,\ l(\tau_{k+1}),\ y^1(\tau_k)) \leqslant \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu_*}+2\alpha,\ d(\tau_k,\ l(\tau_k),\ y^1(\tau_k))\right\}, \qquad (5.16)$$

соответствующее неравенству (5.10), когда говорилось об алгоритме а). Если $l(\tau_k)\notin\Lambda(\tau_k)$ или $l(\tau_k)\in\operatorname{cone}\{l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n\}\subset\Lambda(\tau_k)$, но при этом $l'(\tau_k)\, l_s>1-\mu_*$ для некоторого s, $1\leqslant s\leqslant n$, то $l(\tau_{k+1})=l(\tau_k)$ и соотношение (5.16) реализуется в виде равенства $d(\tau_k,\ l(\tau_{k+1}),\ y^1(\tau_k))=d(\tau_k,\ l(\tau_k),\ y^1(\tau_k))$. Пусть $l(\tau_k)\in K=\operatorname{cone}\{l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n\}\subset\Lambda(\tau_k)$, причем $l'(\tau_k)\, l_s\leqslant 1-\mu_*$, $s=\overline{1,\ n}$. Обозначим через w вершину многогранника $W(\tau_k)$, соответствующую конусу K. Рассмотрим два подслучая.

1). Предположим, что $d(\tau_k,\ l(\tau_k),\ y^1(\tau_k))<2\alpha/\mu_*$. Перепишем это неравенство в виде $l'(\tau_k)(y^1(\tau_k)-w)\geqslant-2\alpha/\mu_*$. Положив в утверждении 5.1

$$\mu^*=0,\ \overline{l}=l(\tau_k),\ x=y^1(\tau_k)-w,\ h=2\alpha/\mu_*,$$

получим

$$\max_{1\leqslant s\leqslant n} l_s'(y^1(\tau_k)-w)\geqslant-2\alpha/\mu_*$$

или, что то же самое,

$$\min_{1\leqslant s\leqslant n} d(\tau_k,\ l_s,\ y^1(\tau_k)) \leqslant 2\alpha/\mu_*.$$

Поэтому

$$d(\tau_k,\ l(\tau_{k+1}),\ z^1(\tau_k)) = \min_{1\leqslant s\leqslant n} d(\tau_k,\ l_s,\ z^1(\tau_k)) \leqslant \frac{2\alpha}{\mu_*} + \alpha$$

и, значит, $d(\tau_k,\ l(\tau_{k+1}),\ y^1(\tau_k)) \leqslant 2\alpha/\mu_* + 2\alpha$.

2). Пусть $d(\tau_k,\ l(\tau_k),\ y^1(\tau)) > 2\alpha/\mu_*$. Перепишем это неравенство в виде $l'(\tau_k)(y^1(\tau_k) - w) < -2\alpha/\mu_*$. Положив в утверждении 5.1

$$\mu^* = \mu_*,\ \bar{l} = l(\tau_k),\ x = y^1(\tau_k) - w,\ h = -l'(\tau_k)\,x,$$

получим

$$\max_{1\leqslant s\leqslant n} l_s'(y^1(\tau_k) - w) \geqslant l'(\tau_k)(y^1(\tau_k) - w) - l'(\tau_k) \times$$
$$\times (y^1(\tau_k) - w)\mu_* \geqslant l'(\tau_k)(y^1(\tau_k) - w) + 2\alpha$$

или, что то же самое,

$$\min_{1\leqslant s\leqslant n} d(\tau_k,\ l_s,\ y^1(\tau_k)) \leqslant d(\tau_k,\ l(\tau_k),\ y^1(\tau_k)) - 2\alpha.$$

Поэтому

$$d(\tau_k,\ l(\tau_{k+1}),\ z^1(\tau_k)) = \min_{1\leqslant s\leqslant n} d(\tau_k,\ l_s,\ z^1(\tau_k)) \leqslant$$
$$\leqslant d(\tau_k,\ l(\tau_k),\ y^1(\tau_k)) - \alpha,$$

и, значит, $d(\tau_k,\ l(\tau_{k+1}),\ y^1(\tau_k)) \leqslant d(\tau_k,\ l(\tau_k),\ y^1(\tau_k))$. Неравенство (5.16) доказано.

Пусть $0 \leqslant k \leqslant \bar{k} - 1$. Рассуждая, как при доказательстве оценки (5.8), но используя вместо (5.10) неравенство (5.16), получаем при $l(\tau_k) \notin \Lambda(\tau_k)$, а также в случае $l(\tau_k) \in \Lambda(\tau_k)$, $l(\tau_{k+1}) \in N(W(\tau_k))$ соотношение

$$d(\tau_{k+1},\ l(\tau_{k+1}),\ y^1(\tau_{k+1})) \leqslant \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu_*} + 2\alpha,\ d(\tau_k,\right.$$
$$\left. l(\tau_k),\ y^1(\tau_k))\right\} + \frac{R}{r}\sigma\Delta^2 + \varepsilon(\tau_k,\ \tau_{k+1}) + \chi\nu\Delta^2. \qquad (5.17)$$

При этом применяем теорему 3.2. Если же $l(\tau_k) \in \Lambda(\tau_k)$ и $l(\tau_{k+1}) \notin N(W(\tau_k))$ (в алгоритме в) это может быть лишь тогда, когда $l(\tau_k) \in \operatorname{cone}\{l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n\} \subset \Lambda(\tau_k)$ и $l'(\tau_k)\,l_s > 1 - \mu_*$ для некоторого s, $1 \leqslant s \leqslant n$), то нужно использовать лемму 5.1. Находим

$$d(\tau_{k+1},\ l(\tau_{k+1}),\ y^1(\tau_{k+1})) \leqslant \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu_*} + 2\alpha,\ d(\tau_k,\right.$$
$$\left. l(\tau_k),\ y^1(\tau_k))\right\} + \tilde{\sigma}_1\Delta^2 + \sigma_2\sqrt{\mu_*}\,\Delta + \varepsilon(\tau_k,\ \tau_{k+1}) + \chi\nu\Delta^2. \quad (5.18)$$

Правая часть (5.18) не меньше правой части неравенства (5.17). Поэтому во всех случаях можем для оценки изменения величины на промежутке $[\tau_k,\ \tau_{k+1})$ опираться на формулу (5.18).

Оценивая изменение величины d на промежутке $[\tau_{\bar{k}}, t_i)$, имеем

$$d(t_i, l(\tau_{\bar{k}+1}), y^1(t_i)) \leqslant \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu_*} + 2\alpha, d(\tau_{\bar{k}}, l(\tau_{\bar{k}}), y^1(\tau_{\bar{k}}))\right\} + \\ + \overset{\infty}{\sigma}_1 (t_i - \tau_{\bar{k}})^2 + \sigma_2 \sqrt{\mu_*}(t_i - \tau_{\bar{k}}) + \varepsilon(\tau_{\bar{k}}, t_i) + \chi\nu(t_i - \tau_{\bar{k}})^2. \tag{5.19}$$

Осуществляя в (5.18) последовательную подстановку при $k = \bar{k} - 1, \bar{k} - 2, \ldots, 1, 0$, получаем

$$d(\tau_{\bar{k}}, l(\tau_{\bar{k}}), y^1(\tau_{\bar{k}})) \leqslant \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu_*} + 2\alpha, d(t_*, l_*, y^1(t_*))\right\} + \\ + \overset{\infty}{\sigma}_1 \Delta(\tau_{\bar{k}} - t_*) + \sigma_2 \sqrt{\mu_*}(\tau_{\bar{k}} - t_*) + \varepsilon(t_*, \tau_{\bar{k}}) + \chi\nu\Delta(\tau_{\bar{k}} - t_*). \tag{5.20}$$

Оценка (5.2) вытекает из неравенств (5.19), (5.20) с учетом того, что $l(t_i) = l(\tau_{\bar{k}+1}), (t_i - \tau_{\bar{k}}) < \Delta, \sigma_1 = \overset{\infty}{\sigma}_1 + \chi\nu$.

§ 6. Универсальная оптимальная стратегия второго игрока

В этом параграфе определяется многозначная универсальная оптимальная стратегия V° второго игрока в игре (1.1). Оптимальность ее следует из свойства отталкивания для системы (1.1) (теорема 4.1). Рассматриваются частные случаи, когда универсальная оптимальная стратегия задается в виде, удобном для реализации на ЭВМ.

Положим для любой позиции $(t, x) \in T \times R^n$

$$V^\circ(t, x) = \bigcup_l Q^1(l, t), \quad l \in \mathscr{L}(t, x).$$

Совокупность векторов $\mathscr{L}(t, x)$ определена в § 4. Зафиксируем произвольное, достаточно близкое к c_*, число c_0, $c_* < c_0 < c^*$. Пусть

$$\mathscr{D}_0 = \{(t, x) \in T \times R^n: c_0 \leqslant \Gamma^1(t, x) \leqslant c^*\}.$$

Стратегия V° универсальна и оптимальна в множестве $\mathscr{D}_0$. Это означает [4, 9, 10], что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство

$$\gamma^1(y_\Delta(\vartheta; t_*, x_*)) \geqslant \Gamma^1(t_*, x_*) - \varepsilon$$

выполнено равномерно по всем $(t_*, x_*) \in \mathscr{D}_0$ для любой траектории $y_\Delta(\cdot; t_*, x_*)$ пучка, выходящего из начальной позиции (t_*, x_*) и порожденного стратегией V° в дискретной схеме управления с шагом $\Delta \leqslant \delta(\varepsilon)$. Доказательство оптимальности заключается в оценке изменения цены игры на каждом шаге дискретной схемы управления вдоль траектории $y_\Delta(\cdot; t_*, x_*)$. Поясним схему доказательства.

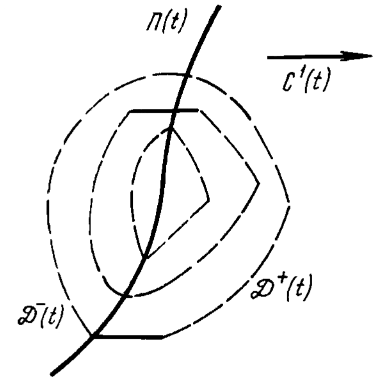

Рис. 6.

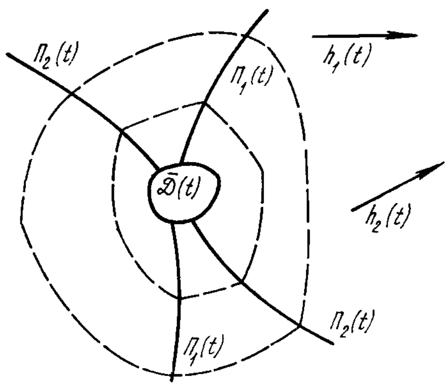

Рис. 7.

Пусть λ^1 — константа Липшица функции γ^1. Константа Липшица функции $\Gamma^1(t, \cdot)$ тогда также равна λ^1 при любом $t \in T$. Если положение $y_\Delta(\tau_k; t_*, x_*)$ системы (1.1) в момент $\tau_k = t_* + k\Delta$ принадлежит множеству $\mathscr{D}$ (введенному в § 4), то из теоремы 4.1, определения V° и липшицевости функции $\Gamma^1(t, \cdot)$ следует при любом $\tau_{k+1} = \tau_k + \Delta$ неравенство

$$\Gamma^1(\tau_{k+1}, y_\Delta(\tau_{k+1}; t_*, x_*)) \geqslant \Gamma^1(\tau_k, y_\Delta(\tau_k; t_*, x_*)) - \lambda^1\bar{\sigma}\Delta^2. \tag{6.1}$$

Используя неравенство (6.1) при $k = 0, 1, 2, \ldots$, можно показать, что если Δ мало, то выход движения $y_\Delta(\cdot; t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in \mathscr{D}_0$ из множества $\mathscr{D}$ возможен лишь в область $\Gamma^1(t, x) > c^*$.

Оценка (6.1) означает, что при движении в множестве $\mathscr{D}$ второй игрок теряет в цене на каждом шаге не более чем $\lambda^1\bar{\sigma}\Delta^2$. На промежутке $[t_*, \vartheta]$ общая потеря составит величину, не превосходящую числа $\lambda^1\bar{\sigma}(\vartheta - t_*)\Delta$, которое меньше ε, если $\Delta < \varepsilon / \lambda^1\bar{\sigma}(\vartheta - t_*)$.

Из приведенных рассуждений следует, что число $\delta(\varepsilon)$, фигурирующее в определении оптимальности, можно взять зависящим лишь от ε, свойств динамики игры (1.1) и разности $c_0 - c_*$, но не зависящим от начальной позиции $(t_*, x_*) \in \mathscr{D}_0$.

Рассмотрим частный случай, когда $Q^1 = \{q \in R: |q| \leqslant \nu\}$ (скалярное управление второго игрока). При этом оптимальную позиционную универсальную стратегию второго игрока можно определить при помощи поверхности переключения. Пусть

$$\Pi(t) = \{x \in R^n: \Gamma^1(t, x) = \min_{\beta \in R} \Gamma^1(t, x + \beta C^1(t))\}. \tag{6.2}$$

Геометрический смысл определения (6.2) поясняет рис. 6 ($n = 2$; штриховым линиям соответствуют линии уровня $\Gamma^1(t, x) = c$ функции $\Gamma^1(t, \cdot)$). Примем

$$\mathscr{D}^+(t) = \{x \in R^n: x + \beta C^1(t) \notin \Pi(t),\ \beta \geqslant 0\},$$

$$\mathcal{D}^-(t) = \{x \in R^n \colon x + \beta C^1(t) \notin \Pi(t),\ \beta \leqslant 0\}.$$

Введем стратегию второго игрока

$$V^*(t,\ x) = \begin{cases} \nu,\ x \in \mathcal{D}^+(t), \\ -\nu,\ x \in \mathcal{D}^-(t), \\ \{-\nu,\ \nu\},\ x \in \Pi(t). \end{cases}$$

Оптимальность стратегии V^* вытекает из вложения

$$V^*(t,\ x) \subset V^\circ(t,\ x), \tag{6.3}$$

которое справедливо для любой позиции $(t,\ x) \in T \times R^n$. Отметим, что в множестве $\{(t,\ x) \in \mathcal{D} \colon x \in \mathcal{D}^+(t) \cup \mathcal{D}^-(t)\}$ вложение (6.3) обращается в равенство. В точках $(t,\ x) \in \mathcal{D},\ x \in \Pi(t)$ вложение (6.3) является строгим лишь тогда, когда существует вектор $l \in \mathcal{L}(t,\ x)$, такой, что $l'C^1(t) = 0$. В этом случае $V^\circ(t,\ x) = Q^1$.

Сделаем одно замечание. Как видно из определения стратегии V^*, на «поверхности» переключения $\Pi = \{(t,\ x) \in T \times R^n \colon x \in \Pi(t)\}$ второй игрок может держать лишь крайние (но не промежуточные) управления из отрезка Q^1. Этим фактом объясняется неустойчивость стратегии V^* по отношению к информационным помехам и неточностям построения поверхности переключения. Именно, при неточном измерении текущего состояния системы (1.1) возможно возникновение скользящего режима вдоль поверхности переключения в течение некоторого промежутка времени $[t^*,\ \bar{t}]$. При этом управление второго игрока на каждом шаге (или почти на каждом шаге) может меняться с одного крайнего значения на другое, а суммарное воздействие на $[t^*,\ \bar{t}]$ эквивалентно некоторому постоянному промежуточному управлению $v(t) \equiv q$ из отрезка Q^1, не являющемуся оптимальным. Однако во многих практических задачах возникновение скользящего режима вблизи поверхности переключения второго игрока маловероятно. Поэтому, несмотря на неустойчивость (в строгом смысле) стратегии V^*, ее можно использовать в качестве оптимальной для таких задач.

Рассмотрим частный случай, когда множество Q^1 — прямоугольник в R^2 вида $Q^1 = \{(q_1,\ q_2)' \colon |q_1| \leqslant \nu_1,\ |q_2| \leqslant \nu_2\}$. Положим

$$h_1(t) = C^1(t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad h_2(t) = C^1(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\Pi_i(t) = \{x \in R^n \colon \Gamma^1(t,\ x) = \min_{\beta \in R} \Gamma^1(t,\ x + \beta h_i(t))\},$$

$$\mathcal{D}_i^+(t) = \{x \in R^n \colon x + \beta h_i(t) \notin \Pi_i(t),\ \beta \geqslant 0\},$$

$$\mathcal{D}_i^-(t) = \{x \in R^n \colon x + \beta h_i(t) \notin \Pi_i(t),\ \beta \leqslant 0\},\ i = 1,\ 2.$$

Определим стратегию $V^{**}(t,\ x) = \{(q_1,\ q_2)' \colon q_1 \in V_1^{**}(t,\ x),\ q_2 \in V_2^{**}(t,\ x)\}$ при помощи формул

$$V_1^{**}(t, x) = \begin{cases} \nu_1, & x \in \mathscr{D}_1^+(t), \\ -\nu_1, & x \in \mathscr{D}_1^-(t), \\ \{-\nu_1, \nu_1\}, & x \in \Pi_1(t), \end{cases}$$

$$V_2^{**}(t, x) = \begin{cases} \nu_2, & x \in \mathscr{D}_2^+(t), \\ -\nu_2, & x \in \mathscr{D}_2^-(t), \\ \{-\nu_2, \nu_2\}, & x \in \Pi_2(t). \end{cases}$$

Пусть $\overline{\mathscr{D}}(t)$ — совокупность всех $x \in R^n$, на которых функция $\Gamma^1(t, \cdot)$ достигает минимума. Для любого $t \in T$ справедливо вложение $\overline{\mathscr{D}}(t) \subset \Pi_1(t) \cap \Pi_2(t)$. Если при всех $t \in T$ это вложение обращается в равенство, то $V^{**}(t, x) \subset V^\circ(t, x)$ и, значит, стратегия V^{**} оптимальна в множестве $\mathscr{D}_0$. Для практической реализации стратегии V^{**} факт «склеивания» множеств $\Pi_1(t)$, $\Pi_2(t)$ вне $\overline{\mathscr{D}}(t)$ не имеет большого значения: в любом случае стратегия V^{**} дает в дискретной схеме управления результат, близкий к оптимальному, если не возникает скользящего режима в окрестности поверхностей переключения. Для случая $n = 2$ линии $\Pi_1(t)$, $\Pi_2(t)$ показаны на рис. 7.

§ 7. Пример

Используем описанные методы построения стратегий второго игрока для формирования наихудших ветровых возмущений по принципу обратной связи в задаче управления продольным движением самолета на посадке. Постановка задачи предложена В. М. Кейном и А. И. Красовым.

Линеаризованные при допущении о постоянстве путевой скорости и силы тяги дифференциальные уравнения движения центра масс самолета в вертикальной плоскости в окрестности номинальной траектории имеют вид

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -0{,}695x_2 + 0{,}91x_3 + 0{,}26x_6 + 0{,}695x_7, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = 0{,}616x_2 - 0{,}806x_3 - 0{,}676x_4 - 0{,}419x_5 - 0{,}616x_7, \\ \dot{x}_5 = -4x_5 + 4u, \\ \dot{x}_6 = -0{,}5x_6 + 0{,}5v_1, \\ \dot{x}_7 = -0{,}5x_7 + 0{,}5v_2, \\ |u| \leqslant 20, \ |v_1| \leqslant 10, \ |v_2| \leqslant 5, \ t \in T = [0, 15]. \end{gathered} \tag{7.1}$$

Координаты x_1, x_3 — отклонения по высоте и углу тангажа, x_2 и x_4 — скорости отклонений, x_5 — угол отклонения руля высоты. Отклонение по высоте измеряется в метрах, углы — в градусах, время — в секундах. Изменение координаты x_5 определяется пятым уравнением, параметр u — перемещение штурвала (см). Два последних уравнения — «генератор» ветра, координаты x_6, x_7 — отклонения от постоянного значения горизонтальной и вертикальной составляющих скорости ветра. Параметром u распоряжается первый игрок, параметром $v=(v_1, v_2)$ — второй. Пусть M — шестиугольник на плоскости x_1, x_2 с вершинами $(-3, 1)$, $(0, 1)$, $(3, 0)$, $(3, -1)$, $(0, -1)$, $(-3, 0)$. Положим $\gamma(x_1, x_2) = \min\{c \geqslant 0: (x_1, x_2)' \in cM\}$. Первый игрок минимизирует значения платы $\gamma(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))$ в момент окончания $\vartheta = 15$ с, второй максимизирует. Содержательно ϑ трактуем как момент пролета торца взлетно-посадочной полосы.

Игровые задачи, связанные с управлением продольным движением самолета на посадке, рассматривались в работах [3, 12]. В статье [3], в частности, изучается вопрос об оптимизации дискретного набора моментов наблюдения в игровой задаче с платой, зависящей от одной координаты фазового вектора.

Игра (7.1) после преобразования к виду (1.1) без фазовой переменной в правой части становится игрой второго порядка с платой $\gamma^1 = \gamma$. При этом множество $P^1 = \{p \in R: |p| \leqslant 20\}$ — отрезок, множество $Q^1 = \{(q_1, q_2) \in R^2: |q_1| \leqslant 10, |q_2| \leqslant 5\}$ — прямоугольник. Примем $P^2 = P^1$, $Q^2 = Q^1$, $\gamma^2 = \gamma^1$. Пусть $\varkappa = 0{,}05$.

При просчете сечений $W_c(t_e)$ полагалось $L_c(t_e) = N(W_c(t_{e+1}) - \varkappa B^2(t_e) P^2)$. Таким образом, $W_c(t_e) = W_c^2(t_e)$. Множества $W_c^2(t_e)$ — выпуклые многоугольники на плоскости. На рис. 8 показаны сечения $W_c^2(t_e)$, полученные на ЭВМ при $c=1$ для моментов $t_e = 12$, 13, 14, 15. Поскольку $\gamma^2 = \gamma^1$, то $M_c^2 = M_c^1$. Следовательно, $W_1^2(15) = M_1^2 = M$.

Зафиксируем начальную позицию $t_* = 0$, $x_* = (5, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Цена игры в этой позиции равна 0,81. Отметим, что точка x_* принадлежит внутренности множества $W_{0,81}^2(0)$, а число 0,81 есть минимальное значение параметра c, при котором $W_c^2(t_e) \neq \varnothing$ для всех моментов t_e.

Стратегию второго игрока, соответствующую алгоритму, описанному в § 5, обозначим V_k. Для задания стратегии использовали информацию, снятую с многоугольников $W_c^2(t_e)$ при трех значениях параметра c: 0,81; 0,9; 1. Моменты коррекции алгоритма (т. е. моменты, в которые проверяется целесообразность перехода на большее значение параметра c) брали совпадающими с моментами попадания вектора отталкивания $l(\tau_k)$ в множество плохих конусов $\Lambda_c(\tau_k)$, отвечающее текущему значению c. Параметр μ_* взят равным 0,01, начальное значение c равно 0,81, начальный вектор l_* для момента $t_* = 0$ определяли при помощи

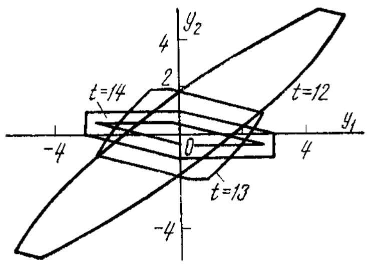

Рис. 8.

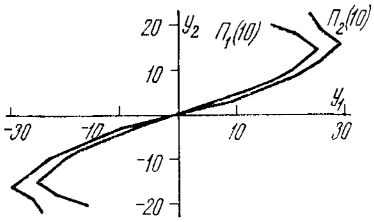

Рис. 9.

множества $W^2_{0,81}(0)$. (Подробнее о моментах коррекции и выборе начального вектора см. [5]).

Поскольку ограничение Q^1 — прямоугольник, то универсальную оптимальную стратегию второго игрока, описанную в § 6, можно задать в форме стратегии V^{**} при помощи линий $\Pi_1(t_e)$, $\Pi_2(t_e)$. Для каждого момента t_e линия $\Pi_1(t_e)$ дает разбиение пространства фазовых переменных y_1, y_2 эквивалентной игры относительно v_1, линия $\Pi_2(t_e)$ — относительно v_2. Линии находили путем обработки многоугольников $W^2_c(t_e)$, предварительно построенных для $c=0{,}81$; 0,9; 1; 2; 4; 6. На рис. 9 линии $\Pi_1(t_e)$, $\Pi_2(t_e)$ показаны для момента $t_e=10$. Оптимальное значение $v_1(v_2)$ равно 10 (5) справа от линии $\Pi_1(10)$ ($\Pi_2(10)$) и $-10\,(-5)$ слева.

Шаг Δ дискретной схемы управления и для стратегии V_k, и для стратегии V^{**} полагали равным 0,5. В процессе реализации стратегий каждую координату вектора $x(\tau_k)$ состояния системы (7.1) огрубляли при подсчете управляющего воздействия до первого знака после запятой. Тем самым имитировали возможные ошибки в схеме формирования ветровых возмущений.

Оптимальную стратегию U° первого игрока численно зададим при помощи поверхности переключения [2]. Введем три варианта реализации стратегии U°. Способ A — реализация с шагом $\Delta_u = 0{,}05$, для формирования управления используется точная информация о положении $x(t_* + k\Delta_u)$, $k=0, 1, 2, \ldots$. При способе B шаг Δ_u равен 0,5, в каждый момент $t_* + k\Delta_u$ управление формируется на основе информации о пяти первых координатах вектора $x(t_* + k\Delta_u)$, шестая и седьмая координаты предполагаются неизмеряемыми, вместо них в схему выбора управления подаются нули. Способ C отличается от способа B введением задержки выработки управления на 0,2. Самым точным является способ A, наиболее грубым — способ C.

На рис. 10 показаны графики изменения координаты $x_1(t)$ при использовании вторым игроком стратегии V_k и первым — стратегии U°. Буква около кривой соответствует способу управления первого игрока. Значения платы γ в момент окончания

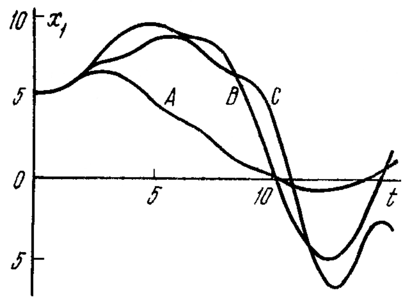

Рис. 10.

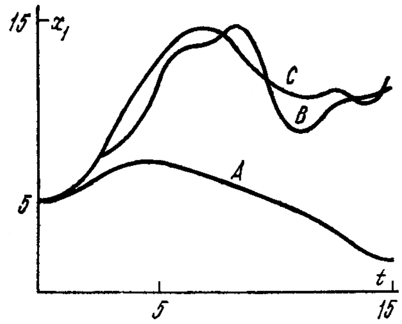

Рис. 11.

для способов A, B, C равны 0,68; 2,84; 5,55. Аналогичные графики, полученные при использовании вторым игроком стратегии V^{**}, показаны на рис. 11. Значения платы γ, соответствующие способам A, B, C управления первого игрока, равны 0,85; 6,40; 6,43.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. 295 с.

2. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1983, № 4, с. 75—78.

3. Корнеев В. А., Меликян А. А., Титовский И. Н. Стабилизация глиссады самолета при ветровых возмущениях в минимаксной постановке.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1985, № 3, с. 132—139.

4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

5. Позиционное управление второго игрока в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания/М. А. Зарх, В. С. Пацко. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1985. 84 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, 1.08.85, № 5756-85 Деп.

6. Пономарев А. П., Розов Н. Х. Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина.— Вестн. МГУ. Вычисл. мат. кибернетика, 1978, № 1, с. 82—90.

7. Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И. О дифференциальных играх с фиксированным временем.— Кибернетика, 1970, № 2, с. 54—63.

8. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.

9. Субботина Н. Н. Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх.— Диф. уравнения, 1983, т. 19, № 11, с. 1890—1896.

10. Субботина Н. Н. Некоторые достаточные условия существования универсальных стратегий.— В кн.: Исследования задач минимаксного управления. Свердловск, 1985, с. 72—81.

11. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н., Хрипунов А. П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач.— ПММ, 1987, т. 51, №2

12. Титовский И. Н. Игровой подход к задаче синтеза управления

самолетом при заходе на посадку.— Учен. зап. ЦАГИ, 1981, т. XII, № 1, с. 85—92.

13. Универсальная оптимальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре/М. А. Зарх. Свердловск: УрГУ, 1985. 35 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 25.10.85, № 7438-В-85 Деп.

14. Ушаков В. Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения — уклонения.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 4, с. 29—36.

15. Численное решение трехмерных линейных дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания/М. А. Зарх, В. С. Пацко. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1985. 42 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 28.10.85, № 7509-В-85 Деп.