

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРИКЛАДНАЯ
МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

Том 51

2

МОСКВА · 1987

УДК 62-50

СТРАТЕГИЯ ВТОРОГО ИГРОКА В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Зарх М. А., Пацко В. С.

Рассматривается линейная антагонистическая дифференциальная игра двух лиц с фиксированным моментом окончания и выпуклой функцией платы. Описывается численный метод построения стратегии второго (максимизирующего) игрока, гарантирующей результат, близкий к оптимальному. Приводится пример, просчитанный на ЭВМ. Статья примыкает к работам [1—8].

Среди антагонистических дифференциальных игр двух лиц с геометрическими ограничениями на управляющие параметры [1] наиболее простыми с точки зрения численного решения являются игры с линейной динамикой, фиксированным моментом окончания и выпуклой терминальной функцией платы [3—8]. Во многих задачах функция платы зависит не от всех координат фазового вектора, а лишь от некоторых n его координат. Такая особенность позволяет понизить размерность задачи путем перехода к эквивалентной игре n -го порядка [1].

Для $n = 2, 3$ в настоящее время разработаны и реализованы на ЭВМ алгоритмы построения множеств уровня $W^\circ(\cdot, c) = \{(t, y): \Gamma^\circ(t, y) \leq c\}$ функции цены Γ° эквивалентной игры [9]. Множество $W^\circ(\cdot, c)$ иначе определяется как максимальный стабильный мост первого (минимизирующего) игрока в эквивалентной игре, обрывающийся в момент окончания θ на множестве уровня $\gamma \leq c$ функции платы γ [1]. Его сечение $W^\circ(t, c)$ в момент t совпадает с альтернированным интегралом [2], построенным на промежутке $[t, \theta]$ от множества $\gamma \leq c$. Введя сетку $\{c_j\}$ и построив набор $\{W^\circ(\cdot, c_j)\}$, можно при помощи ЭВМ задать оптимальные (или близкие к ним) стратегии в исходной задаче.

Поскольку при любых c и t сечения $W^\circ(t, c)$ выпуклы, то в качестве основы для построения устойчивой оптимальной стратегии первого игрока можно взять стратегию экстремального прицеливания [1]. Вычисления упрощаются, если управляющий параметр первого игрока — скаляр: оптимальная стратегия в этом случае задается при помощи поверхности переключения [8]. Невыпуклость дополнения $R^n \setminus W^\circ(t, c)$ не позволяет аналогичными способами определить устойчивую оптимальную стратегию второго игрока. Попытка использовать еще один известный метод общего характера — управление с поводьрем [1] — также наталкивается на трудности: возникает проблема формирования устойчивого движения поводьря.

Цель работы — описание численного метода построения устойчивой квазиоптимальной стратегии второго игрока для линейных дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания. Метод базируется на предварительном нахождении сечений $W^\circ(t, c)$ и ориентирован прежде всего на задачи, где $n = 2, 3$ и множество Q , ограничивающее управляющий параметр второго игрока, — многогранник с небольшим числом вершин. Для таких задач метод реализован в виде стандартной вычислительной программы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную антагонистическую дифференциальную игру

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= A(t)z + B(t)u + C(t)v \\ z &\in R^m, u \in P, v \in Q, t \in T = [t^0, \theta] \end{aligned}$$

двух лиц с фиксированным моментом окончания θ . Здесь матрица $A(t)$ непрерывна, матрицы $B(t)$, $C(t)$ удовлетворяют условию Липшица по t . Множества P, Q — соответственно выпуклый компакт и выпуклый многогранник в конечномерных пространствах. Многогранник Q при этом может быть вырожденным. Предположим, что выпуклая функция платы γ зави-

сит лишь от некоторых n ($1 < n \leq m$) координат фазового вектора. Пусть такими координатами являются n первых координат. Дополнительно предположим, что при любом c множество уровня $M(c) = \{(z_1, \dots, z_n)' : \gamma(z_1, \dots, z_n) \leq c\}$ функции γ ограничено. Первый игрок распоряжается параметром u и минимизирует $\gamma(z_1(\vartheta), \dots, z_n(\vartheta))$. Интересы второго игрока, распоряжающегося параметром v , противоположны.

Пусть E — некоторый компакт в $T \times R^n$. Требуется построить устойчивую стратегию второго игрока, гарантирующую ему для всех начальных позиций (t_*, z_*) из E результат, близкий к цене игры.

2. Многогранники $W(t_i, c)$. Пусть $Z_n(\vartheta, t)$ — матрица из n первых строк фундаментальной матрицы Коши для системы $z' = A(t)z$. Используя замену $y(t) = Z_n(\vartheta, t)z(t)$, перейдем от (1.1) к эквивалентной игре

$$(2.1) \quad \begin{aligned} y' &= B^1(t)u + C^1(t)v \\ B^1(t) &= Z_n(\vartheta, t)B(t), \quad C^1(t) = Z_n(\vartheta, t)C(t) \\ y &\in R^n, u \in P, v \in Q, t \in T \end{aligned}$$

n -го порядка с прежней функцией платы γ . Разобьем промежуток T с шагом h точками $t_0 = t^0, t_1, t_2, \dots$. Положим $B^2(t) = B^1(t_i), C^2(t) = C^1(t_i), t \in [t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, 2, \dots$

Пусть P^2 — выпуклый многогранник, приближающий компакт P , а γ^2 — выпуклая функция с многогранными множествами уровня $M^2(c)$, близкая к функции γ . Заменяем систему (2.1) игрой

$$(2.2) \quad y' = B^2(t)u + C^2(t)v, y \in R^n, u \in P^2, v \in Q, t \in T$$

с кусочно-постоянной динамикой. При всех t_i сечения $W(t_i, c)$ множества уровня функции цены в игре (2.2) — выпуклые многогранники. Возможны случаи вырождения многогранников. Это приводит к неустойчивости численной процедуры их построения. Ниже будем подразумевать, что многогранники $W(t_i, c)$ невырожденные. Многогранники $W(t_i, c)$ аппроксимируют сечения $W^0(t_i, c)$ множества уровня функции цены в игре (2.1) [4, 7].

Опишем понятную конструкцию построения многогранников $W(t_i, c)$. Пусть ρ — символ опорной функции, $N(X)$ — совокупность всех единичных внешних нормалей к граням размерности $n - 1$ многогранника $X \subset \subset R^n$. Положим $W(\vartheta, c) = M^2(c)$. Пусть найдены многогранники $W(\vartheta, c), \dots, W(t_{i+2}, c), W(t_{i+1}, c)$. Примем $L(t_i, c) = N(W(t_{i+1}, c) - \kappa B^2(t_i)P^2)$ и

$$(2.3) \quad \eta(l, t_i, c) = \rho(l, W(t_{i+1}, c)) + \kappa\rho(l, -B^2(t_i)P^2) - \kappa\rho(l, C^2(t_i)Q), l \in L(t_i, c)$$

Тогда [10]

$$(2.4) \quad W(t_i, c) = \{y \in R^n : l'y \leq \eta(l, t_i, c), l \in L(t_i, c)\}$$

Имеем $L(t_i, c) \supset N(W(t_i, c))$. Во многих задачах совокупность $L(t_i, c)$ быстро растет с уменьшением i . Поэтому при вычислениях на ЭВМ приходится ограничивать количество векторов, включаемых в $L(t_i, c)$, «склеивая» близкие векторы. Соответственно вместо $W(t_i, c)$ получаем оценку сверху $\bar{W}(t_i, c)$. Чтобы охватить такой случай, введем для $t_i \neq \vartheta$ множество $L(t_i, c)$ — произвольный конечный набор единичных векторов, удовлетворяющий условию $L(t_i, c) \supset N(W(t_{i+1}, c))$. Положим $\bar{W}(\vartheta, c) = M^2(c)$. Для $t_i \neq \vartheta$ значение $\eta(l, t_i, c)$ и многогранник $\bar{W}(t_i, c)$ определим по формулам, аналогичным (2.3), (2.4), заменив $L(t_i, c)$ на $L(t_i, c)$ и $W(t_{i+1}, c)$ на $W(t_{i+1}, c)$. Поскольку $N(W(t_i, c)) \subset L(t_i, c)$, то набор

$L(t_i, c)$, в частности, можно брать постоянным, не зависящим от t_i . Требуется лишь, чтобы он содержал все нормали многогранника $M^2(c)$.

Зафиксируем промежуток $[c^\circ, c^*]$. Условимся, что c° оценивает снизу значения функции цены на множестве начальных позиций в игре (1.1), а c^* не меньше аналогичной верхней оценки. В промежутке $[c^\circ, c^*]$ зададим сетку $\{c_j\}$ значений $c_1 < c_2 < \dots$ параметра c . Пусть для каждого $c \in \{c_j\}$ при помощи ЭВМ построена последовательность многогранников $W(t_i, c)$. Обозначим через r° и r^* такие положительные числа, что в любой из многогранников $W(t_i, c)$ можно вписать шар радиуса r° и каждый из многогранников охватывается шаром радиуса r^* . Центры указанных шаров могут зависеть от c и t_i .

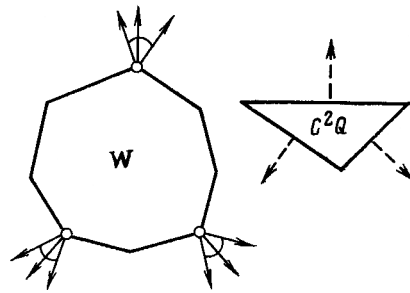
Опорная функция многогранника $W(t_i, c)$ кусочно линейна. Именно, любой вершине w соответствует выпуклый конус, порожденный единичными внешними нормальными к граням размерности $n - 1$, содержащим w . В этом конусе функция $\rho(\cdot, W(t_i, c))$ линейна, а единичные нормали к граням — образующие конуса. В случае $n = 2$ количество образующих равно двум, при $n \geq 3$ оно не меньше n . Условимся, что при $n \geq 3$ всякий конус линейности функции $\rho(\cdot, W(t_i, c))$ разбит, без добавления новых образующих, на n -гранные конусы. Употребляя выражение «конус линейности функции $\rho(\cdot, W(t_i, c))$ », будем подразумевать, что число его образующих равно n . Предположим существование такой постоянной $\beta > 0$, общей для всех $c \in \{c_j\}$ и t_i , что для любого конуса линейности $K = \text{cone}\{l_1, \dots, l_n\}$ функции $\rho(\cdot, W(t_i, c))$ выполнено неравенство

$$(2.5) \quad |l_s - l_k| |D_{se}| |D| \leq \beta^*, s, k, e = 1, 2, \dots, n$$

Здесь D — определитель матрицы, составленной из координат векторов l_1, \dots, l_n — образующих конуса, D_{se} — алгебраическое дополнение элемента с номерами s, e . В случае $n = 2$ условие (2.5) выполняется автоматически: константу β можно взять равной $2r^*/r^\circ$. При $n = 3$ условие (2.5) ограничивает «вытянутость» конусов линейности функции $\rho(\cdot, W(t_i, c))$ ¹.

3. Обработка многогранников $W(t_i, c)$. Пусть $Q(l, t_i)$ — совокупность всех вершин многогранника Q , на которых достигается максимум скалярного произведения $l^T C^2(t_i) q$, $q \in Q$.

Символом $\Lambda(t_i, c)$ обозначим объединение всех конусов линейности $K = \text{cone}\{l_1, \dots, l_n\}$ функции $\rho(\cdot, W(t_i, c))$, для каждого из которых $\bigcap_s Q(l_s, t_i) = \emptyset$, $s = \overline{1, n}$. Конусы линейности, входящие в $\Lambda(t_i, c)$, назовем «плохими». На фиг. 1 для $n = 2$ изображены многоугольники $W(t_i, c)$, $C^2(t_i) Q$ (обозначены $W, C^2 Q$). Плохими являются те конусы линейности функции $\rho(\cdot, W(t_i, c))$, во внутренность которых попадают нормали многоугольника $C^2(t_i) Q$.



Фиг. 1

Из информации о многогранниках $W(t_i, c)$ оставим при всех $c \in \{c_j\}$ и t_i для формирования стратегии второго игрока только сведения о плохих конусах и значениях опорной функции $\rho(\cdot, W(t_i, c))$ на их образующих.

¹ Зарх М. А., Пацко В. С. Позиционное управление второго игрока в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. М., 1985. — 84 с. Деп. ВИНТИ, 1.08.85, № 5756—85.

Алгоритм управления, использующий указанную информацию, назовем алгоритмом с коррекцией.

Условимся, что начальный момент t_* для игры (1.1) совпадает с одним из моментов t_i . Шаг Δ дискретной схемы управления [1] второго игрока положим постоянным и кратным κ . Пусть $\tau_0 = t_*$, $\tau_k = \tau_{k-1} + \Delta$, $k = 1, 2, \dots$. При описании алгоритма с коррекцией будем считать, что в схему управления второго игрока вместо точного фазового вектора $z(\tau_k)$ подается замер $\xi(\tau_k)$. Перед началом работы алгоритма следует задать параметр μ , $0 < \mu < 1$, смысл его будет ясен из дальнейшего.

Для любого единичного вектора $l \in R^n$, любых $c \in \{c_j\}$, $y \in R^n$ и t_i обозначим $d(t_i, l, y, c) = \rho(l, W(t_i, c)) - l'y$. Величина d — расстояние от точки y до отвечающей вектору l опорной гиперплоскости к многограннику $W(t_i, c)$. Величина d имеет знак плюс, если y принадлежит тому же полупространству, что и $W(t_i, c)$, и знак минус, когда y и $W(t_i, c)$ разделяются отмеченной гиперплоскостью.

4. Основной алгоритм. Алгоритм с коррекцией базируется на алгоритме, использующем информацию, снятую с многогранников $W(t_i, c)$ при фиксированном c . Такой алгоритм назовем основным. Опишем его.

Зафиксируем $c \in \{c_j\}$. Считаем выбранным число μ , $0 < \mu < 1$. В каждый момент τ_k управление второго игрока будет находиться из условия экстремума на некотором векторе. В момент $t_* = \tau_0$ нужно задать единичный начальный вектор $l_* = l(\tau_0)$.

Итак, в момент t_* имеем замер $\xi(t_*)$ и вектор l_* . Моменту τ_k , $k \geq 0$ соответствует замер $\xi(\tau_k)$ и единичный вектор $l(\tau_k)$, передаваемый с предыдущего шага дискретной схемы. Если $l(\tau_k) \notin \Lambda(\tau_k, c)$, положим $l(\tau_{k+1}) = l(\tau_k)$. Пусть $l(\tau_k) \in \Lambda(\tau_k, c)$, т. е. обнаружен плохой конус $K = \text{cone}\{l_1, \dots, l_n\}$, содержащий вектор $l(\tau_k)$. При одновременном выполнении неравенств $l'(\tau_k)l_s \leq 1 - \mu$, $s = 1, 2, \dots, n$ в качестве $l(\tau_{k+1})$ выберем ту из образующих l_1, \dots, l_n конуса K , на которой реализуется минимум расстояний $d(\tau_k, l_s, Z_n(\vartheta, \tau_k), \xi(\tau_k), c)$, $s = 1, 2, \dots, n$. Если $l'(\tau_k)l_s > 1 - \mu$ хотя бы для одного $s = 1, 2, \dots, n$, примем $l(\tau_{k+1}) = l(\tau_k)$. В качестве управляющего воздействия второго игрока на промежуток $[\tau_k, \tau_{k+1})$ возьмем любой вектор из $Q(l(\tau_{k+1}), \tau_k)$.

Кратко суть описанного алгоритма состоит в следующем. Выбранное на промежуток $[\tau_k, \tau_{k+1})$ управление второго игрока пытается оттолкнуть систему (2.1) в момент τ_k от многогранника $W(\tau_k, c)$ по вектору $l(\tau_{k+1})$. При попадании вектора $l(\tau_{k+1})$ в момент τ_{k+1} в плохой конус, причем достаточно далеко от его образующих (степень близости определяется числом μ), направление дальнейшего отталкивания меняется. В противном оно остается прежним. Информация о замере состояния системы (1.1) используется только в моменты смены направления отталкивания.

Пусть φ — оценка точности замеров $\xi(\tau_k)$: $|z(\tau_k) - \xi(\tau_k)| \leq \varphi$ при любом k . Положим $\|Z_n(\vartheta, \cdot)\| = \max |Z_n(\vartheta, t)x|$. Здесь максимум берется по всем единичным векторам x и всем $t \in T$. Примем $\alpha = \|Z_n(\vartheta, \cdot)\| \varphi$. Обозначим g оценку сверху модуля правой части системы (2.2) на T .

Предположим, что $\kappa g \leq r^0/2$. Пусть на промежутке $[t_*, \vartheta)$ управление второго игрока вырабатывается по основному алгоритму. Тогда при любой реализации управления первого игрока справедлива оценка

$$(4.1) \quad \begin{aligned} d(\vartheta, l(\vartheta), Z_n(\vartheta, \vartheta)z(\vartheta), c) &\leq \\ &\leq \max \{2\alpha/\mu, d(t_*, l_*, Z_n(\vartheta, t_*)\xi(t_*), c)\} + 2\alpha + \\ &+ \sigma_1(\vartheta - t_*)\Delta + \sigma_2(\vartheta - t_*)\sqrt{\mu} + \varepsilon(t_*, \vartheta) \end{aligned}$$

Здесь σ_1, σ_2 — положительные постоянные, зависящие лишь от вида системы (2.1) и от постоянных r^o, r^*, β . Величина $\varepsilon(t_*, \vartheta)$ определяется соотношением

$$\varepsilon(t_*, \vartheta) = \int_{t_*}^{\vartheta} \max_{|l| \leq 1} [\rho(l, -B^1(\tau)P) - \rho(l, -B^2(\tau)P^2) + \rho(l, (C^2(\tau) - C^1(\tau))Q)] d\tau$$

и характеризует различие динамик систем (2.1), (2.2).

Обозначим F правую часть оценки (4.1). Пусть $J \subset R^n$ — компакт, оценивающий сверху возможные положения вектора $(z_1(\vartheta), \dots, z_n(\vartheta))'$ (когда начальные позиции берутся в E), $\|\gamma - \gamma^2\|_J$ — норма разности функций γ и γ^2 на J , ζ — постоянная Липшица функции γ^2 на $M^2(c^*)$. Поскольку евклидово расстояние от точки $Z_n(\vartheta, \vartheta) z(\vartheta) = (z_1(\vartheta), \dots, z_n(\vartheta))'$ до множества $\{y \in R^n : \gamma^2(y) \geq c\}$ не превышает $d(\vartheta, l(\vartheta), Z_n(\vartheta, \vartheta) z(\vartheta), c)$, то из оценки (4.1) получим

$$(4.2) \quad \gamma(z_1(\vartheta), \dots, z_n(\vartheta)) \geq c - \zeta F - \|\gamma - \gamma^2\|_J$$

Неравенство (4.2) описывает гарантию второго игрока при управлении по основному алгоритму. Правая часть неравенства близка к $c - \zeta \sigma_2(\vartheta - t_*) \sqrt{\mu}$, если обеспечена достаточная близость игр (2.1), (2.2), малы шаг Δ , начальное расстояние $d(t_*, l_*, Z_n(\vartheta, t_*) \xi(t_*), c)$ и величина φ . Если, кроме того, мало μ , а число c мало отличается от цены игры в позиции $(t_*, \xi(t_*))$, то гарантия второго игрока близка к оптимальной.

Стратегия, определяемая основным алгоритмом, устойчива по отношению к неточностям замера состояний $z(\tau_k)$. Имеет место также и устойчивость относительно малых погрешностей построения многогранников $W(t_i, c)$. Последнее можно обосновать опираясь на утверждения, используемые в⁴ при доказательстве оценки (4.1).

Замечания. 1°. Пусть τ_e — произвольный момент, когда вектор $l(\tau_e)$ заменяется на новый, отличный от него вектор $l(\tau_{e+1})$. Зная вектор $l(\tau_{e+1})$, можно в момент τ_e просчитать первый момент $\tau_h, h > e$, когда вектор $l(\tau_h) = l(\tau_{e+1})$ попадет в плохой конус и будет заменен на новый. Следовательно, в момент τ_e можно сформировать кусочно-постоянное программное управление второго игрока в системе (1.1) на весь промежуток $[\tau_e, \tau_h)$. Это программное управление в моменты $\tau_k, e \leq k < h$ удовлетворяет условию максимума Л. С. Понтрягина на функции $\psi(t) = Z_n'(\vartheta, t) l(\tau_{e+1})$. В момент τ_h , используя замер $\xi(\tau_h)$, выбираем новый вектор $l(\tau_{h+1})$, определяем промежуток $[\tau_h, \tau_s), s > h$, на котором вектор меняться не будет, формируем программное управление на $[\tau_h, \tau_s)$. В моменты $\tau_k, h \leq k < s$ оно удовлетворяет условию максимума на функции $\psi(t) = Z_n'(\vartheta, t) l(\tau_{h+1})$ и т. д. Таким образом, управление второго игрока, определяемое основным алгоритмом, может быть реализовано как кусочно-программное.

2°. Может оказаться, что для всех моментов τ_k множество $\Lambda(\tau_k, c)$, составленное из плохих конусов, пусто. Так будет, например, когда при построении многогранников $W(t_i, c)$ полагается $L(t_i, c) = N(W(t_{i+1}, c) - \kappa B^2(t_i) P^2)$ (следовательно, $W(t_i, c) = W(t_i, c)$) и выполнено свойство однотипности [1]: $B^2 = C^2, P^2 = -\lambda Q, \lambda > 1$. В таком случае $l(\tau_k) = l_*$ при любом k и, стало быть, управление второго игрока, определяемое основным алгоритмом, можно задать в начальный момент t_* на весь промежуток $[t_*, \vartheta)$ одной программой, удовлетворяющей в моменты τ_k условию максимума на функции $\psi(t) = Z_n'(\vartheta, t) l_*$.

5. Алгоритм с коррекцией. Общая схема алгоритма такова. Фиксируем параметр μ . В момент t_* , используя замер $\xi(t_*)$, каким-либо способом выбираем начальное значение $c_* \in \{c_j\}$ и начальный вектор l_* . Формируем управление второго игрока по основному алгоритму при $c = c_{j(0)} = c_*$ с шагом Δ на промежутке $[\tau_{k(0)}, \tau_{k(1)})$, где $\tau_{k(0)} = \tau_0 = t_*$, а $\tau_{k(1)} =$

$= t_* + k(1) \Delta$ — момент первой коррекции. Коррекция в момент $\tau_{k(1)}$ заключается в перенастройке основного алгоритма на новое значение $c_{j(1)} \geq c_{j(0)}$, $c_{j(1)} \in \{c_j\}$ параметра c . Управление по основному алгоритму осуществляем теперь при $c = c_{j(1)}$ на $[\tau_{k(1)}, \tau_{k(2)})$, где $\tau_{k(2)} = \tau_{k(1)} + (k(2) - k(1)) \Delta$ — момент второй коррекции и т. д. Выбор c_* , l_* , моментов коррекции $\{\tau_{k(p)}\}$ и сама коррекция в момент $\tau_{k(p)}$, связанная с переходом на значение $c_{j(p)} \geq c_{j(p-1)}$, $c_{j(p)} \in \{c_j\}$, могут быть определены различными способами. Опишем один из вариантов.

Пусть $\Omega(t_i, c)$ — набор всех образующих плохих конусов из $\Lambda(t_i, c)$. Положим $H(t_i, c) = \{y \in R^n : l'x \leq \rho(l, W(t_i, c)), l \in \Omega(t_i, c)\}$. Имеем $H(t_i, c) \supset W(t_i, c)$, $N(H(t_i, c)) = \Omega(t_i, c)$. Данные о неравенствах, определяющих многогранники $H(t_i, c)$, содержатся в информации, подготовленной для алгоритма с коррекцией. В качестве c_* возьмем максимальное из значений $c \in \{c_j\}$, для которых $Z_n(\emptyset, t_*) \xi(t_*) \notin \text{int } H(t_*, c)$. Если не существует значений c таким свойством, положим $c_* = c_1$. Вектор l_* определим как вектор из совокупности $N(H(t_*, c_*))$, доставляющий минимум величине $d(t_*, l, Z_n(\emptyset, t_*) \xi(t_*), c_*)$. Момент коррекции $\tau_{k(p)}$, $p \geq 1$ зададим как первый момент $\tau_k > \tau_{k(p-1)}$, когда передаваемый с предыдущего шага дискретной схемы вектор $l(\tau_k)$ попадает в один из плохих конусов $K = \text{cone}\{l_1, \dots, l_n\} \subset \Lambda(\tau_k, c_{j(p-1)})$, причем $l'(\tau_k) l_s \leq 1 - \mu$ для всех $s = 1, 2, \dots, n$. В момент $\tau_{k(p)}$ имеем замер $\xi(\tau_{k(p)})$, вектор $l(\tau_{k(p)})$, значение $c_{j(p-1)}$. В качестве $c_{j(p)}$ возьмем максимальное из значений $c \in \{c_j\}$, $c \geq c_{j(p-1)}$, для которых $Z_n(\emptyset, \tau_{k(p)}) \xi(\tau_{k(p)}) \notin \text{int } H(\tau_{k(p)}, c)$. Если не существует значений c таким свойством, положим $c_{j(p)} = c_{j(p-1)}$. При реализации первого варианта выбора значения $c_{j(p)}$ вектор $l(\tau_{k(p+1)})$ на очередной шаг дискретной схемы определим как вектор из совокупности $N(H(\tau_{k(p)}, c_{j(p)}))$, доставляющий минимум величине $d(\tau_{k(p)}, l, Z_n(\emptyset, \tau_{k(p)}) \xi(\tau_{k(p)}), c_{j(p)})$. Во втором случае вектор $l(\tau_{k(p+1)})$ зададим как обычный очередной вектор основного алгоритма при $c = c_{j(p-1)} = c_{j(p)}$. Выбрав вектор $l(\tau_{k(p+1)})$, выполняем все действия, предусмотренные основным алгоритмом при $c = c_{j(p)}$ до следующего момента коррекции.

Переход на новые значения c в процессе игры введен в алгоритме с коррекцией для учета «неоптимальности» поведения первого игрока. При оптимальном поведении результат во многом зависит от выбора c_* и l_* . Гарантия второго игрока является наилучшей, если c_* близко к цене игры в позиции $(t_*, \xi(t_*))$, а вектор l_* близок к вектору, минимизирующему расстояние

$$d(t_*, l, Z_n(\emptyset, t_*) \xi(t_*), c_*) = l'Z_n(\emptyset, t_*) \xi(t_*) - \rho(l, W(t_*, c_*))$$

на множестве единичных векторов $l \in R^n$. При описанном способе выбора c_* и l_* на основе информации о многогранниках $H(t_*, c)$, $c \in \{c_j\}$, это не обязательно так. Поэтому целесообразно для моментов t_* (особенно, когда начальный момент в задаче всегда один и тот же) сохранить полную информацию о многогранниках $W(t_*, c)$, $c \in \{c_j\}$ и использовать ее для задания c_* , l_* , заменив $H(t_*, c)$ на $W(t_*, c)$. При достаточно густой сетке $\{c_j\}$ гарантия второго игрока в этом случае будет близка к оптимальной и соответствующую стратегию можно назвать квазиоптимальной. Стратегия является устойчивой.

Результаты счета конкретных примеров показывают, что для многих задач нет смысла брать большое число значений c в сетке $\{c_j\}$. Удовлетво-

рительные результаты получаются даже при выборе одного — трех значений параметра c .

6. Пример. Используем описанный метод построения управления второго игрока для формирования наихудших ветровых возмущений по принципу обратной связи в задаче управления самолетом в вертикальной плоскости на посадке. Постановка задачи предложена В. М. Кейном и А. И. Красовым.

Линеаризованные при допущении о постоянстве путевой скорости и силы тяги дифференциальные уравнения движения центра масс самолета в вертикальной плоскости в окрестности номинальной траектории имеют вид

$$(6.1) \quad \begin{aligned} z_1' &= z_2, & z_2' &= -0,695z_2 + 0,91z_3 + 0,26z_6 + 0,695z_7 \\ z_3' &= z_4, & z_4' &= 0,616z_2 - 0,806z_3 - 0,676z_4 - 0,419z_5 - 0,616z_7 \\ z_5' &= -4z_5 + 4u, & z_6' &= -0,5z_6 + 0,5v_1, & z_7' &= -0,5z_7 + 0,5v_2 \\ & & & |u| \leq 20, & |v_1| \leq 10, & |v_2| \leq 5, & t \in T = [0, 15] \end{aligned}$$

Координаты z_1, z_3 — отклонения по высоте и углу тангажа, z_2 и z_4 — скорости отклонения, z_5 — угол отклонения руля высоты. Отклонение по высоте измеряется в метрах, углы — в градусах, время — в секундах. Изменение координаты z_5 определяется пятым уравнением, параметр u — перемещение штурвала (см). Два последних уравнения — «генератор» ветра, координаты z_6, z_7 — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости ветра (м/с). Параметром u распоряжается первый игрок, параметром $v = (v_1, v_2)$ — второй. Пусть M — шестиугольник на плоскости z_1, z_2 с вершинами $(-3,0), (-3,1), (0,1), (3,0), (3, -1), (0, -1)$. Положим $\gamma(z_1, z_2) = \min \{c \geq 0: (z_1, z_2)' \in cM\}$. Первый игрок минимизирует значения платы $\gamma(z_1(\vartheta), z_2(\vartheta))$ в момент окончания $\vartheta = 15$ с, второй максимизирует. Содержательно ϑ трактуем как момент пролета торца взлетно-посадочной полосы.

Игровые задачи, связанные с управлением самолетом в вертикальной плоскости на посадке, рассматривались в работах [11, 12]. В отличие от этих работ, здесь функция платы зависит не от одной, а от двух координат фазового вектора.

В игре (6.1) множество P — отрезок, Q — прямоугольник. Примем $P^2 = P, \gamma^2 = \gamma$. Пусть $\kappa = 0,05$.

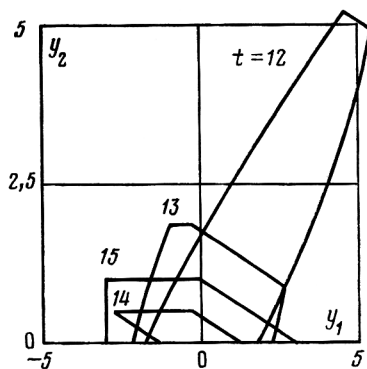
При просчете сечений $W(t_i, c)$ полагали $L(t_i, c) = L(t_i, c)$. Таким образом, $W(t_i, c) = W(t_i, c)$. Сечения $W(t_i, c)$ симметричны относительно нуля. На фиг. 2 показаны верхние части сечений, полученные на ЭВМ при $c = 1$ для моментов $t_i = 12, 13, 14, 15$. Поскольку $\gamma^2 = \gamma$, то $M^2(c) = M$. Следовательно, $W(15, 1) = M^2(1) = M$. На фиг. 3 штриховой линией показан многоугольник $H(t_i, c)$ при $c = 1, t_i = 13$. Для сравнения сплошной линией изображено сечение $W(t_i, c)$. Показаны также конусы, входящие в $\Lambda(t_i, c)$.

Приведем результаты численного моделирования движений системы (6.1) для начальной позиции $t_* = 0, z_* = (5, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Цена игры в этой позиции равна 0,8.

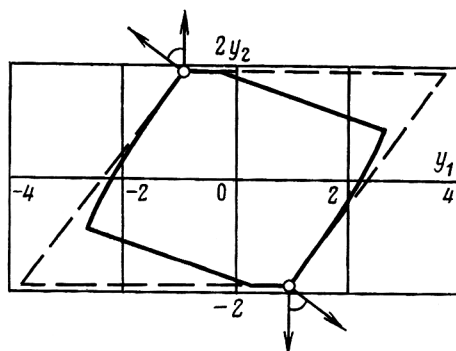
Стратегию второго игрока, соответствующую алгоритму с коррекцией, обозначим V° . Для задания стратегии использовалась информация, снятая с многогранников $W(t_i, c)$ при $c = 0,81; 0,9; 1$. Параметр μ был взят равным 0,01, шаг Δ дискретной схемы полагался равным 0,5. Начальное значение c_* равно 0,81, начальный вектор l_* определялся при помощи множества $W(0, c_*)$. При реализации стратегии V° каждая координата вектора $z(t_k)$ состояния системы (6.1) округлялась перед выбором управляющего воздействия до первого знака после запятой. Тем самым имитировались возможные ошибки в схеме формирования ветровых возмущений.

Оптимальную стратегию U° первого игрока численно зададим при помощи поверхности переключения [8], построенной путем обработки многогранников $W(t_i, c)$ при $c = 0,81; 0,9; 1; 2; 4; 6$. Введем три варианта реализации стратегии U° . Способ A — реализация с шагом $\Delta_u = 0,05$; для формирования управления используется точная информация о положении $z(t_* + k\Delta_u), k = 0, 1, 2, \dots$. При способе B шаг Δ_u равен 0,5; в каждый момент $t_* + k\Delta_u$ управление формируется на основе информации о пяти первых координатах вектора $z(t_* + k\Delta_u)$, шестая и седьмая координаты предполагаются неизмеряемыми, вместо них в схему выбора управления подаются нули. Способ C отличается от способа B введением задержки выработки управления на 0,2. Самым точным является способ A , наиболее грубым — способ C .

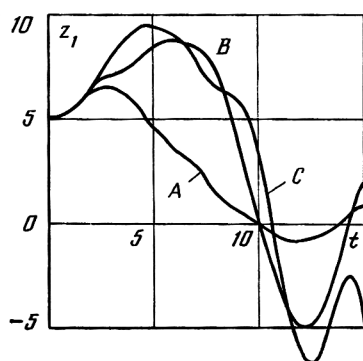
На фиг. 4 показаны графики изменения координаты $z_1(t)$ при использовании вторым игроком стратегии V° и первым стратегии U° . Буква около кривой соответствует



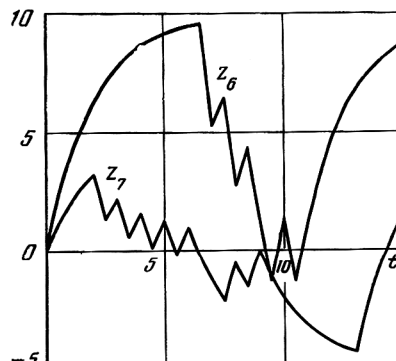
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

способу управления первого игрока. Значения платы γ в момент окончания для способов А, В, С равны 0,68; 2,84; 5,55. Соответствующие способу А реализации координат $z_6(t)$, $z_7(t)$ — горизонтальной и вертикальной составляющих скорости ветра, представлены на фиг. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1967, т. 175, № 4, с. 764—766.
3. Ушаков В. Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения — уклонения.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 4, с. 29—36.
4. Пономарев А. П. Оценка погрешности численного метода построения альтернированного интеграла Понтрягина.— Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика, 1978, № 4, с. 37—43.
5. Остапенко В. В. Методы решения одного класса задач сближения — уклонения. Автоматика и телемеханика, 1984, № 6, с. 42—46.
6. Никольский М. С. Построение кусочно-постоянного управления преследования в прямых методах Понтрягина.— Ж. вычисл. математики и мат. физики, 1982, т. 22, № 4, с. 840—849.
7. Боткин Н. Д. Погрешность аппроксимации в линейной дифференциальной игре.— Автоматика и телемеханика, 1984, № 12, с. 5—12.
8. Боткин Н. Д., Пацко В. С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1983, № 4, с. 78—85.
9. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1984. 295 с.
10. Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И. О дифференциальных играх с фиксированным временем.— Кибернетика, 1970, № 2, с. 54—63.
11. Титовский И. Н. Игровой подход к задаче синтеза управления самолетом при заходе на посадку.— Уч. зап. ЦАГИ, 1981, т. 12, № 1, с. 85—92.
12. Корнеев В. А., Меликян А. А., Титовский И. Н. Стабилизация глиссады самолета при ветровых возмущениях в минимаксной постановке.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1985, № 3, с. 132—139.

Свердловск

Поступила в редакцию
15.X.1985