РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Том 6

№ 1, 2

Екатеринбург
2000

Труды Института математики и механики. Том 6, №1, 2. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. ISBN 5–7691–1270–0.

Сборник трудов посвящен памяти академика Андрея Измайловича Субботина (1945–1997). Тематика статей сборника принадлежит к области научных интересов А.И. Субботина, в которой он много и плодотворно работал: теории оптимального управления, теории позиционных дифференциальных игр, теории обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка, приложения разработанных методов к различным практическим задачам. Авторами статей являются хорошо известные российские и зарубежные ученые, коллеги А.И. Субботина. Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в теории оптимального управления, в теории уравнений в частных производных и приложениях.

ISBN 5–7691–1270–0.

Т $\dfrac{36(02)}{8\mathbf{П}6(03) - 1998}$ **ПВ=2000**

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 6 №2 2000

УДК 62.50

ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧЕ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЁТА[1]

С. И. Кумков, В. С. Пацко, С. Г. Пятко, А. А. Федотов

Рассматривается способ построения оценки сверху для информационных множеств, характеризующих положение, направление и скорость движения самолёта в горизонтальной плоскости. Информационные множества строятся в четырёхмерном фазовом пространстве на основе замеров геометрического положения с учётом известных ограничений на ошибку замеров. Предложенные алгоритмы позволяют вести вычисления в реальном масштабе времени. Приведены результаты моделирования.

Введение

В современной теории наблюдения и управления наряду с вероятностным подходом [1, 2] к описанию состояния динамической системы в условиях неточных замеров используется детерминированный подход, основанный на построении информационных множеств [3–7].

Под информационным множеством понимается совокупность всех состояний системы, совместимых с полученными замерами. Информационное множество можно трактовать как "обобщённое" состояние системы.

Понятие информационного множества является очень простым по своему смыслу, однако в конкретных задачах информационные множества могут быть устроены достаточно сложно [8–10].

Данная работа посвящена построению информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолёта. Динамика движения описывается системой четвёртого порядка, соответственно информационные множества строятся в четырёхмерном пространстве. Ошибки замеров стеснены геометрическими ограничениями. Сведения об этих ограничениях наряду с описанием динамики используются для построения информационных множеств.

В исследуемой задаче при построении информационных множеств применяем элементы овыпуклення. Получаем множества, разумно оценивающие истинные информационные множества сверху. Основная идея заключается в использовании сетки по двум из четырёх координат и плоских сечений в виде выпуклых многоугольников по двум другим координатам.

При построении информационных множеств в процессе поступления замеров базовыми являются операция пересечения выпуклых многоугольников и операция построения выпуклой оболочки объединения выпуклых

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке компании "Новые информационные технологии в авиации" и Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 00–01–00348)

многоугольников. Реализация таких операций на плоскости не требует больших затрат.

Наряду с четырёхмерным вариантом рассмотрен трёхмерный случай, где величина скорости предполагается известной и постоянной. Здесь, в частности, приведено сравнение с теоретическими результатами. Данный вариант задачи представляет и самостоятельный интерес.

Построение информационных множеств по предлагаемой в работе схеме может быть осуществлено в режиме реального времени. Возможно использование полученных результатов в алгоритмах систем управления воздушным движением.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оценивания положения, направления и скорости движения самолёта в горизонтальной плоскости. Информация о движении поступает в виде замеров координат его положения. Известны ограничения на ошибку замера. Направление ψ и скорость V движения напрямую не замеряются, полагаются неизвестными и могут быть непостоянны.

Считаем, что динамика движения описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V\sin\psi, \\ \dot{y} &= V\cos\psi, \\ \dot{\psi} &= \frac{ku}{V}, \\ \dot{V} &= w. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $k = \text{const} > 0$; u, w – неизвестные управляющие воздействия, удовлетворяющие ограничениям: $|u| \le 1$, $\mu_1 \le w \le \mu_2$, $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$. Полагаем, что $V \ge \text{const} > 0$. Угол ψ отсчитывается от оси ординат y по часовой стрелке.

Соотношение, определяющее динамику изменения скорости, вообще говоря, может быть более сложным, чем четвёртое уравнение системы (1.1). Это соотношение может зависеть от большого числа параметров и не всегда точно известно. Отказываясь от сложного описания, приходим к уравнению $\dot{V} = w$ и трактуем μ_1, μ_2 как ограничения на возможные значения ускорения $\dot{V}$.

Система (1.1) часто применяется (см., например, [11–14]) для описания движения самолёта, автомобиля и других объектов с подобной динамикой.

В дискретные моменты времени поступают замеры положения на плоскости x, y. Каждому замеру сопоставляется *множество неопределённости* (МН) – совокупность состояний (x, y, ψ, V), совместимых с данным замером при известных ограничениях на ошибку замера. Например, если в некоторый момент поступает замер $(\hat{x}, \hat{y})$ и максимальная радиальная ошибка замера есть σ, то неизвестное нам геометрическое состояние в этот момент лежит в круге радиуса σ с центром в точке $(\hat{x}, \hat{y})$. МН такого замера представляет собой цилиндр в четырёхмерном пространстве с проекцией на плоскость x, y в виде указанного круга.

Поскольку по предположению направление ψ и скорость V напрямую не замеряются, то множество неопределённости H каждого текущего замера является цилиндрическим по координатам ψ, V и полностью представляется своей проекцией $H^{\#}$ на плоскость x, y:

$$H = H^{\#} \times \{(\psi, V)\}. \tag{1.2}$$

Множества $H^{\#}$ в дальнейшем будут предполагаться выпуклыми.

Под *информационным множеством* (ИМ) понимается совокупность всех фазовых состояний (x, y, ψ, V) системы (1.1), совместимых с имеющимися к данному моменту времени множествами неопределённости.

Требуется разработать алгоритм построения ИМ.

2. Схема построения информационных множеств

2.1. Формальное описание информационных множеств

Считаем известным начальное информационное множество $I(t_0)$. Оно формируется на основе предварительных сведений и по множеству неопределённости начального замера.

Пусть в некоторый момент времени t_* информационное множество $I(t_*)$ построено, и следующий замер приходит в момент $t^* > t_*$. Определим *множество прогноза* $G(t^*)$ как множество достижимости системы (1.1) в момент времени t^* из состояний, принадлежащих множеству $I(t_*)$ в момент t_*:

$$G(t^*) = \bigcup_{\substack{u(\cdot), w(\cdot),\\ s \in I(t_*)}} \xi(t^*; t_*, s, u(\cdot), w(\cdot)).$$

Здесь $\xi(t^*; t_*, s, u(\cdot), w(\cdot))$ – решение системы дифференциальных уравнений (1.1), доведённое до момента t^*, при начальном состоянии s в момент t_* и кусочно-непрерывных управлениях $u(\cdot)$ и $w(\cdot)$.

Множество неопределённости несёт новую информацию о системе, поэтому $I(t^*)$ определяется как пересечение множества прогноза $G(t^*)$ и множества неопределённости $H(t^*)$ пришедшего замера:

$$I(t^*) = G(t^*) \bigcap H(t^*). \tag{2.1}$$

Если в момент t^* замер отсутствует, то операция пересечения не выполняется и полагается, что текущее информационное множество $I(t^*)$ совпадает с текущим множеством прогноза $G(t^*)$. Формально можно считать, что МН отсутствующего замера совпадает со всем пространством $\{(x, y, \psi, V)\}$.

Таким образом, в каждый текущий момент ИМ определяется начальным множеством $I(t_0)$ и МН замеров, поступивших к этому моменту.

Система (1.1) нелинейна, множество прогноза невыпукло и имеет сложную структуру. Как следствие, достаточно сложно устроено пересечение (2.1). Для эффективного описания ИМ необходимо идти на некоторые упрощения, и мы сделаем их, используя разумным образом специфику системы.

2.2. Эквивалентное представление информационных множеств

Перепишем выражение (2.1), определяющее информационное множество, в удобном для нас эквивалентном виде.

Рассмотрим проекцию $I^{\diamondsuit}(t_*)$ множества $I(t_*)$ на плоскость ψ, V. Каждой точке $(\psi, V) \in I^{\diamondsuit}(t_*)$ поставим в соответствие сечение $I_{\psi,V}(t_*)$ информационного множества $I(t_*)$ плоскостью $\{\psi = \text{const}, V = \text{const}\}$. Такие сечения будем рассматривать в проекции на плоскость x, y:

$$I_{\psi,V}(t_*) = \{(x, y) : (x, y, \psi, V) \in I(t_*)\}.$$

Информационное множество $I(t_*)$ представим проекцией $I^{\diamondsuit}(t_*)$ на плоскость ψ, V и множествами $I_{\psi,V}(t_*)$ на плоскости x, y:

$$I(t_*) = \bigcup_{(\psi,V)\in I^{\diamondsuit}(t_*)} [I_{\psi,V}(t_*) \times (\psi, V)]. \tag{2.2}$$

Аналогично запишем множество прогноза

$$G(t^*) = \bigcup_{(\bar\psi,\bar V)\in G^{\diamondsuit}(t^*)} \left[G_{\bar\psi,\bar V}(t^*) \times (\bar\psi, \bar V)\right]. \tag{2.3}$$

С учётом (1.2), (2.3) формулу (2.1) можно переписать следующим образом:

$$I(t^*) = \bigcup_{(\bar\psi,\bar V)\in G^{\diamondsuit}(t^*)} \left[(G_{\bar\psi,\bar V}(t^*) \bigcap H^{\#}(t^*)) \times (\bar\psi, \bar V)\right]. \tag{2.4}$$

Выражение (2.4) записано в таком же виде, что и (2.2). Это следует из того, что

$$I_{\bar\psi,\bar V}(t^*) = G_{\bar\psi,\bar V}(t^*) \bigcap H^{\#}(t^*),$$

$$I^{\diamondsuit}(t^*) = \left\{(\bar\psi, \bar V) \in G^{\diamondsuit}(t^*)\colon\ G_{\bar\psi,\bar V}(t^*) \bigcap H^{\#}(t^*) \neq \emptyset\right\}.$$

Представление множеств $I(t_*)$, $G(t^*)$, $I(t^*)$ в виде (2.2), (2.3), (2.4) позволяет в дальнейшем перейти к сетке на плоскости ψ, V и рассматривать только те сечения, которые соответствуют узлам сетки.

2.3. Особенности динамики движения

Покажем, что в нашей задаче множества $G^{\diamondsuit}(t^*)$ и $G_{\bar\psi,\bar V}(t^*)$ можно вычислять непосредственно на основе множеств $I^{\diamondsuit}(t_*)$ и $I_{\psi,V}(t_*)$.

Зафиксируем пару управлений $u(\cdot)$, $w(\cdot)$ на интервале $[t_*, t^*)$. Рассмотрим множество прогноза $G(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$ при начальном множестве $I(t_*)$ и управлениях $u(\cdot)$, $w(\cdot)$. Данное множество, как и множество $G(t^*)$, будем представлять проекцией $G^{\diamondsuit}(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$ на плоскость ψ, V и сечениями $G_{\bar\psi,\bar V}(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$.

Специфика динамики (1.1) состоит в том, что третье и четвёртое уравнения можно интегрировать независимо от первых двух:

$$V(t) = V(t_*) + \int_{t_*}^{t} w(\tau)\, d\tau, \qquad \psi(t) = \psi(t_*) + \int_{t_*}^{t} \frac{ku(\tau)}{V(\tau)}\, d\tau. \tag{2.5}$$

Следовательно,

$$G^{\diamondsuit}(t^*, u(\cdot), w(\cdot)) =$$

$$= \left\{ \left(\psi + \int\limits_{t_*}^{t^*} \frac{ku(t)}{V(t)}\, dt,\ V + \int\limits_{t_*}^{t^*} w(t)\, dt \right) :\ (\psi, V) \in I^{\diamondsuit}(t_*) \right\}. \tag{2.6}$$

Зафиксируем точку $(\psi, V) \in I^{\diamondsuit}(t_*)$. Фазовые координаты x, y отсутствуют в правой части системы (1.1), поэтому интегрирование первых двух уравнений для начальных состояний из $I_{\psi,V}(t_*)$ означает перенос на один и тот же вектор. Полагая

$$\bar{\psi} = \psi(t^*), \quad \bar{V} = V(t^*), \tag{2.7}$$

имеем

$$G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot)) =$$

$$= I_{\psi,V}(t_*) + \left(\int\limits_{t_*}^{t^*} V(t) \sin \psi(t)\, dt,\ \int\limits_{t_*}^{t^*} V(t) \cos \psi(t)\, dt \right). \tag{2.8}$$

Перебирая $(\psi, V) \in I^{\diamondsuit}(t_*)$, получим все сечения $G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$ множества прогноза $G(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$.

Будем формально считать, что сечения $G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$ заданы для произвольных $(\bar{\psi}, \bar{V})$. Если $(\bar{\psi}, \bar{V}) \in G^{\diamondsuit}(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$, т.е. $(\bar{\psi}, \bar{V})$ соответствует некоторой паре $(\psi, V) \in I^{\diamondsuit}(t_*)$ в силу (2.5), (2.7), то сечение определяется формулой (2.8); иначе $G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot)) = \emptyset$.

В целом, множество $G^{\diamondsuit}(t^*)$ есть множество достижимости в силу третьего и четвёртого уравнений системы (1.1) при начальном множестве $I^{\diamondsuit}(t_*)$:

$$G^{\diamondsuit}(t^*) = \bigcup_{u(\cdot), w(\cdot)} G^{\diamondsuit}(t^*, u(\cdot), w(\cdot)). \tag{2.9}$$

Множества $G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*)$ вычисляются по формуле

$$G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*) = \bigcup_{u(\cdot), w(\cdot)} G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot)). \tag{2.10}$$

2.4. Овыпукление сечений

При нахождении множеств $G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*)$ имеем дело с объединением (2.10) множеств на плоскости x, y. Множества $G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*)$ пересекаются затем с множеством $H^{\#}(t^*)$. Трудность состоит в том, что множества $G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*)$ невыпуклы.

Условимся подменять множества $G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*)$ их выпуклыми оболочками. Таким образом, одновременно с операцией (2.10) объединения множеств $G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$, вычисляем выпуклую оболочку. Получаем множество $\mathbf{G}_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*) = \operatorname{conv} G_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*)$. Положим

$$\mathbf{G}(t^*) = \bigcup_{(\bar{\psi},\bar{V})\in G^{\diamond}(t^*)} \left[\mathbf{G}_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*) \times (\bar{\psi}, \bar{V})\right], \tag{2.11}$$

$$\mathbf{I}(t^*) = \bigcup_{(\bar{\psi},\bar{V})\in G^{\diamond}(t^*)} \left[(\mathbf{G}_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*) \bigcap H^{\#}(t^*)) \times (\bar{\psi}, \bar{V})\right]. \tag{2.12}$$

Формулы (2.11), (2.12) написаны для момента t^* в предположении о применении операции овыпукления только на промежутке $[t_*, t^*]$. Имеем $G(t^*) \subset \mathbf{G}(t^*)$ и $I(t^*) \subset \mathbf{I}(t^*)$.

Если овыпукление проводить с начального момента t_0, то на момент t_* будем иметь $\mathbf{I}(t_*)$ с выпуклыми сечениями $\mathbf{I}_{\psi,V}(t_*)$. Поэтому при нахождении множества $\mathbf{G}_{\bar{\psi},\bar{V}}(t^*)$ будем строить выпуклую оболочку объединения выпуклых множеств.

Далее речь пойдет о построении множеств $\mathbf{G}$ и $\mathbf{I}$. Будем по-прежнему называть их множеством прогноза и информационным множеством.

3. Основные идеи построения информационных множеств

3.1. Введение дискретной схемы

При численном нахождении информационных множеств мы вынуждены использовать некоторую дискретизацию построений. Опишем основные элементы дискретизации.

Для нахождения множества $\mathbf{I}(t^*)$ сначала получим множество прогноза $\mathbf{G}(t^*)$. Чтобы построить $\mathbf{G}(t^*)$, разбиваем промежуток времени $[t_*, t^*]$ с постоянным шагом Δ. Управления $u(\cdot)$ и $w(\cdot)$ считаем кусочно-постоянными на данном разбиении. При этом на каждом интервале $[t_i, t_{i+1})$ разбиения управляющие воздействия u, w принимают лишь нулевые и крайние значения: $u \in \{-1, 0, 1\}$, $w \in \{\mu_1, 0, \mu_2\}$. Выбор таких значений определяется тем, что при построении оптимальных движений, формирующих границу множества достижимости (множества прогноза), в соответствии с принципом максимума Л. С. Понтрягина, используются крайние управляющие воздействия: $u = -1, 1$; $w = \mu_1, \mu_2$. Значение $u = 0$ реализуется на вырожденном оптимальном движении. Значение $w = 0$ включено ради технического удобства.

Примем $t_1 = t_*$ и $\mathbf{G}(t_1) = \mathbf{I}(t_*)$. Множество прогноза $\mathbf{G}(t_{i+1})$ строим, опираясь на множество $\mathbf{G}(t_i)$. Интегрируя систему (1.1), используем метод Эйлера с шагом Δ.

Нахождение множеств $\mathbf{G}^{\diamondsuit}(t)$ и $\mathbf{G}_{\bar{\psi},\bar{V}}(t)$ в схеме построения ИМ, изложенной в предыдущем разделе, упрощается следующим образом.

Формула для проекции на плоскость ψ, V множества прогноза при фиксированных управляющих воздействиях u, w (аналог (2.6)) запишется на момент t_{i+1} в виде

$$\mathbf{G}^{\diamondsuit}(t_{i+1}, u, w) = \{(\psi + \frac{\Delta ku}{V},\, V + \Delta w) : \, (\psi, V) \in \mathbf{G}^{\diamondsuit}(t_i)\}. \tag{3.1}$$

Проекция на плоскость x, y сечения множества прогноза при фиксированных u, w (аналог (2.8)) теперь на момент t_{i+1} будет иметь вид

$$\mathbf{G}_{\bar{\psi},\bar{V}}(t_{i+1}, u, w) = \mathbf{G}_{\psi,V}(t_i) + (\Delta V \sin\psi, \Delta V \cos\psi), \tag{3.2}$$

где $\bar{\psi} = \psi + \Delta ku/V$, $\bar{V} = V + \Delta w$. Перебирая $(\psi, V) \in \mathbf{G}^{\diamondsuit}(t_i)$, получим все сечения $\mathbf{G}_{\bar{\psi},\bar{V}}(t_{i+1}, u, w)$.

Подчеркнём, что при интегрировании по методу Эйлера перенос по формуле (3.2) каждого сечения $\mathbf{G}_{\psi,V}(t_i)$ определяется только соответствующей парой (ψ, V) и не зависит от u, w.

При построении $\mathbf{G}^{\diamondsuit}(t_{i+1})$ и $\mathbf{G}_{\bar{\psi},\bar{V}}(t_{i+1})$ рассматриваем лишь девять вариантов возможных пар управлений:

$$\mathbf{G}^{\diamondsuit}(t_{i+1}) = \bigcup_{\substack{u\in\{-1,0,1\},\\ w\in\{\mu_1,0,\mu_2\}}} \mathbf{G}^{\diamondsuit}(t_{i+1}, u, w), \tag{3.3}$$

$$\mathbf{G}_{\bar{\psi},\bar{V}}(t_{i+1}) = \operatorname{conv} \bigcup_{\substack{u\in\{-1,0,1\},\\ w\in\{\mu_1,0,\mu_2\}}} \mathbf{G}_{\bar{\psi},\bar{V}}(t_{i+1}, u, w). \tag{3.4}$$

Заметим, что $\mathbf{G}^{\diamondsuit}(t_i) \subset \mathbf{G}^{\diamondsuit}(t_{i+1})$.

Множество $\mathbf{G}^{\diamondsuit}$ на плоскости ψ, V не является выпуклым и даже может быть несвязно. Поэтому трудно описать его границу. То же самое можно сказать и о множестве $\mathbf{I}^{\diamondsuit}$. Будем использовать сетку на плоскости ψ, V с шагом $\delta\psi$ по ψ и с шагом δV по V. Множества $\mathbf{G}^{\diamondsuit}$ и $\mathbf{I}^{\diamondsuit}$ будем подменять наборами узлов такой сетки.

В результате пошагового построения множеств прогноза $\mathbf{G}(t_i)$ получаем множество $\mathbf{G}(t^*)$. Согласуя прогноз с замером в момент времени t^* (т.е. с множеством неопределённости $H(t^*)$), находим искомое ИМ: $\mathbf{I}(t^*) = \mathbf{G}(t^*) \bigcap H(t^*)$.

3.2. Аппроксимация многоугольниками

На плоскости x, y работаем с выпуклыми множествами $\mathbf{G}_{\psi,V}$, $\mathbf{I}_{\psi,V}$ и $H^{\#}$. Для их представления будем использовать, применяя аппроксимацию сверху, выпуклые многоугольники. Будем брать на плоскости x, y фиксированный набор векторов (сетка нормалей), на которых будут заданы значения опорной функции многоугольников.

Опишем работу с выпуклыми многоугольниками, заданными на фиксированной сетке векторов. Зафиксируем набор из m единичных векторов

$(n_1, \ldots, n_m)$ на плоскости x, y, расположенных равномерно по углу (с отсчетом от оси y по часовой стрелке):

$$n_i = (n_{i_x}, n_{i_y}) = \left(\sin\left(2\pi\frac{i-1}{m}\right), \cos\left(2\pi\frac{i-1}{m}\right)\right). \tag{3.5}$$

Для любого ограниченного замкнутого множества D на плоскости в качестве аппроксимирующего его сверху будем брать многоугольник D_m, определяемый наборами значений опорной функции множества D на векторах (3.5): $D_m = \{(x, y)\colon\ (xn_{i_x} + yn_{i_y}) \le \rho_i,\ i = 1, \ldots, m\}$.

При $m = 4$ имеем 4 вектора, и аппроксимирующий многоугольник есть прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.

3.3. Построение выпуклой оболочки объединения

Пусть многоугольники A и B заданы наборами $(\rho_1^A, \ldots, \rho_m^A)$ и $(\rho_1^B, \ldots, \rho_m^B)$ значений опорных функций на фиксированной сетке из m векторов (3.5). Выпуклая оболочка $\mathrm{conv}\,(A \bigcup B)$ объединения таких многоугольников есть многоугольник, векторы нормалей которого могут не принадлежать сетке $(n_1, \ldots, n_m)$. Будем аппроксимировать выпуклую оболочку $\mathrm{conv}\,(A \bigcup B)$ многоугольником C, который определяется набором $(\rho_1^C, \ldots, \rho_m^C)$:

$$\rho_i^C = \max(\rho_i^A, \rho_i^B), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Многоугольник C является минимальным по включению среди многоугольников, содержащих объединение $A \bigcup B$ и заданных значениями опорной функции на векторах $(n_1, \ldots, n_m)$.

Следующая формула определяет оценку сверху возникающей при этом относительной погрешности:

$$\frac{h(C, \mathrm{conv}\,(A \bigcup B))}{\mathrm{diam}(\mathrm{conv}\,(A \bigcup B))} \le \frac{1}{2}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

На рис. 1 буквой d обозначен диаметр множества $\mathrm{conv}\,(A \bigcup B)$, буквой h – хаусдорфово расстояние между C и $\mathrm{conv}\,(A \bigcup B)$.

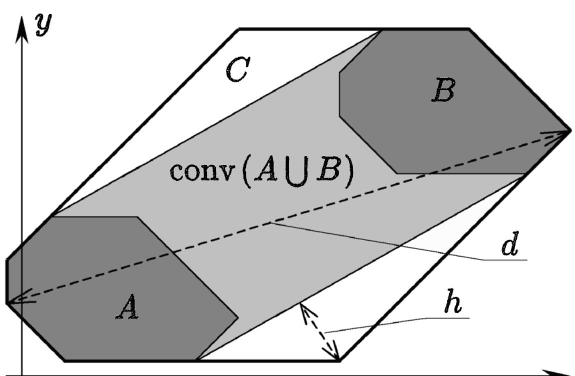

Рис. 1. Погрешность овыпукления при $m = 8$.

3.4. Операция пересечения

Пересечение многоугольников A и B, заданных наборами $(\rho_1^A, \dots, \rho_m^A)$ и $(\rho_1^B, \dots, \rho_m^B)$ значений опорных функций, осуществляется путём вычисления набора $(\rho_1, \dots, \rho_m)$:

$$\rho_i = \min(\rho_i^A, \rho_i^B), \quad i = 1, \dots, m,$$

который определяет многоугольник $C = A \bigcap B$ как пересечение полуплоскостей $(xn_{i_x} + yn_{i_y}) \leq \rho_i$, $i = 1, \dots, m$.

Полученный набор $(\rho_1, \dots, \rho_m)$ не обязательно совпадает с набором $(\rho_1^C, \dots, \rho_m^C)$ значений опорной функции многоугольника C, вычисленных на заданной фиксированной сетке векторов (3.5). Кроме того, пересечение может быть пусто. Поэтому производится дополнительная обработка набора $(\rho_1, \dots, \rho_m)$, состоящая из двух шагов. В результате получаем искомый набор $(\rho_1^C, \dots, \rho_m^C)$ значений опорной функции многоугольника C на заданной фиксированной сетке векторов, либо выясняем, что результат пересечения есть пустое множество.

Шаг 1. Рассматриваем набор $(\rho_1, \dots, \rho_m)$ как замкнутый список, в котором ρ_1 и ρ_m считаются соседними. Вычёркиваем из этого списка все элементы ρ_i, не совпадающие с соответствующими значениями ρ_i^C опорной функции множества $C = A \bigcap B$. При этом используем следующий критерий.

Пусть ρ_i, ρ_j и ρ_k – три последовательных элемента из рассматриваемого списка. Тогда, если

$$\frac{n_{k_y}(\rho_i n_{j_x} - \rho_j n_{i_x}) + n_{k_x}(\rho_j n_{i_y} - \rho_i n_{j_y})}{n_{i_y} n_{j_x} - n_{i_x} n_{j_y}} > \rho_k, \tag{3.6}$$

то вычёркиваем средний элемент ρ_j.

Так продолжаем до получения набора, в котором условие (3.6) не выполняется для любой тройки соседних векторов.

Если после очередного вычёркивания некоторого элемента ρ_j угол между соседними векторами n_i и n_k стал больше или равен π, т.е. если выполнено условие

$$(n_{i_y} n_{k_x} - n_{i_x} n_{k_y}) \leq 0, \tag{3.7}$$

то результат пересечения есть пустое множество, и выполнение операции пересечения завершается. При практической реализации данного алгоритма условие (3.7) необходимо проверять с некоторым запасом.

После первого шага получаем список $\{\rho_i^C\}$, каждому элементу которого соответствует сторона многоугольника C.

Шаг 2. Список $\{\rho_i^C\}$ дополняем недостающими значениями опорной функции на фиксированной сетке $(n_1, \dots, n_m)$ векторов и получаем искомое представление множества $C = A \bigcap B$ в виде набора $(\rho_1^C, \dots, \rho_m^C)$. При этом используем следующий способ дополнения.

Пусть между соседними ρ_i и ρ_k имеются недостающие значения опорной функции. Вычисляем точку (x, y) пересечения соответствующих соседних сторон. Недостающие промежуточные значения опорной функции далее считаем по формуле

$$\rho_j = xn_{j_x} + yn_{j_y}.$$

В случае $m = 4$ дополнительная обработка (*Шаг* 1, *Шаг* 2) набора $(\rho_1, \dots, \rho_4)$ сводится лишь к проверке невырожденности пересечения множеств A и B по одновременному выполнению двух неравенств $(\rho_1+\rho_3) > 0$ и $(\rho_2 + \rho_4) > 0$.

4. Практическое построение информационных множеств

В соответствии со схемой из раздела 2 построение ИМ на промежутке времени $[t_*, t^*]$ осуществляется путём расчета множества прогноза на момент времени t^* и последующим учётом множества неопределённости, поступившего в этот момент. Опишем реализацию этих операций в соответствии с допущениями, принятыми в разделе 3.

4.1. Построение множества прогноза

Для построения множества $\mathbf{G}(t_{i+1})$ на основе множества $\mathbf{G}(t_i)$ используем формулы (3.1)–(3.4).

Сложность построений, связанных с использованием сетки на плоскости ψ, V, заключается в том, что вновь возникающие узлы $(\bar\psi, \bar V)$ множеств $\mathbf{G}^{\diamondsuit}(t_{i+1}, u, w)$ не совпадают с узлами зафиксированной (исходной) сетки на плоскости ψ, V. Поэтому множества $\mathbf{G}(t_{i+1}, u, w)$ строятся приближенно, с привязкой к исходной сетке.

Сначала строим множество пассивного прогноза $\mathbf{G}(t_{i+1}, 0, 0)$. Набор узлов $(\bar\psi, \bar V)$ этого множества совпадает с набором узлов множества $\mathbf{G}(t_i)$. Отвечающие узлам $(\bar\psi, \bar V)$ многоугольники $\mathbf{G}_{\bar\psi,\bar V}(t_{i+1}, 0, 0)$ на плоскости x, y вычисляются по формуле (3.2): путём переноса многоугольников $\mathbf{G}_{\psi,V}(t_i)$ на векторы $(\Delta V \sin\psi, \Delta V \cos\psi)$. Для многоугольника, заданного набором $(\rho_1, \dots, \rho_m)$ значений опорной функции, такой перенос означает изменение каждой компоненты ρ_i на величину $n_{i_x}\Delta V \sin\psi + n_{i_y}\Delta V \cos\psi$.

Для построения узлов множества $\mathbf{G}(t_{i+1}, u, w)$ при $(u, w) \neq (0, 0)$ берём за основу узлы множества $\mathbf{G}(t_{i+1}, 0, 0)$ (они совпадают с узлами исходной сетки) и в соответствии с (3.1) смещаем каждый узел (ψ, V) на вектор $(\Delta k u/V, \Delta w)$. Для новых узлов $(\bar\psi, \bar V) \in \mathbf{G}^{\diamondsuit}(t_{i+1}, u, w)$ в силу (3.2) имеем $\mathbf{G}_{\bar\psi,\bar V}(t_{i+1}, u, w) = \mathbf{G}_{\psi,V}(t_{i+1}, 0, 0)$, т.е. берём уже полученные сечения множества $\mathbf{G}(t_{i+1}, 0, 0)$.

По координате ψ используем фиксированное разбиение интервала $[0, 2\pi]$ с шагом $\delta\psi$. Смещение узла сетки на величину $\Delta k/V$ по ψ (влево при $u = -1$ и вправо при $u = 1$) может быть не кратно $\delta\psi$. Чтобы добиться кратности, берём смещение на величину $(\llbracket(\Delta k/V)/\delta\psi\rrbracket+1)\delta\psi$, которая оценивает сверху величину $\Delta k/V$ и кратна $\delta\psi$ (квадратные скобки означают целую часть). Т. е. имеем перенос на

$$\left\llbracket\frac{(\Delta k/V)}{\delta\psi}\right\rrbracket + 1 \tag{4.1}$$

узлов влево при $u = -1$ и вправо при $u = 1$.

По координате V также используем фиксированное разбиение с шагом δV. Величина смещения $\Delta|w|$ также может быть не кратна δV. Чтобы добиться кратности, берём перенос на

$$[\![\frac{\Delta|w|}{\delta V}]\!] + 1 \tag{4.2}$$

узлов в отрицательном направлении при $w = \mu_1$ и в положительном направлении при $w = \mu_2$.

Таким образом, для построения множества $\mathbf{G}(t_{i+1})$ применяем исходную сетку на плоскости ψ, V. Множество $\mathbf{G}^{\diamondsuit}(t_{i+1})$ находим по формуле (3.3). При использовании 9 пар управлений в каждый узел может попасть до 9 многоугольников. Для каждого узла $(\bar\psi, \bar V)$ сетки строим выпуклую оболочку объединения многоугольников $\mathbf{G}_{\bar\psi,\bar V}(t_{i+1}, u, w)$, попавших в этот узел. В результате каждому узлу будет соответствовать свой многоугольник, который и принимаем за $\mathbf{G}_{\bar\psi,\bar V}(t_{i+1})$ (см. (3.4)). Множества $\mathbf{G}^{\diamondsuit}(t_{i+1})$, $\mathbf{G}_{\bar\psi,\bar V}(t_{i+1})$ определяют множество прогноза $\mathbf{G}(t_{i+1})$.

Следует отметить, что неопределённость по фазовой координате V может быть достаточно большой, особенно в начальный момент времени. В таком случае шаг δV сетки ИМ по скорости трудно заранее ограничить сверху. Следовательно, величина $\Delta|w|/\delta V$ может быть достаточно малой ($\Delta|w|/\delta V \ll 1$). Несмотря на это, согласно формуле (4.2), будет осуществлен перенос на один шаг сетки. Таким образом, сдвиги узлов по V могут быть не согласованны с динамикой системы (1.1). Поэтому при построении $\mathbf{G}(t_{i+1})$ учёт динамики по V за счёт сдвигов (4.2) будем осуществлять не на каждом шаге по времени, а лишь через заданное количество шагов. Символом q_1 (q_2) обозначим количество шагов, через которые будем производить сдвиг в отрицательном (положительном) направлении. В качестве чисел q_1, q_2 возьмём максимальные натуральные числа, удовлетворяющие соотношению

$$[\![\frac{\Delta|\mu_i|}{\delta V}]\!] = [\![\frac{q_i\Delta|\mu_i|}{\delta V}]\!], \qquad i = 1, 2. \tag{4.3}$$

Это позволяет насколько возможно согласовать сдвиги (4.2) узлов по V с динамикой системы (1.1).

4.2. Учет множества неопределённости замера

Для каждого пришедшего в момент t^* замера формируется его МН. Это формирование производится в соответствии с типом источника информации и его характеристиками точности. Если в момент t^* замеры положения самолёта поступили сразу от нескольких источников, то формируется единое множество неопределённости $H(t^*)$ как пересечение МН этих замеров.

Для построения ИМ в момент времени t^* пересекаем сечения $\mathbf{G}_{\psi,V}(t^*)$ множества прогноза $\mathbf{G}(t^*)$ с множеством $H^{\#}(t^*)$.

Узлы (ψ, V) множества $\mathbf{G}(t^*)$ с непустыми пересечениями и будут составлять множество $\mathbf{I}^{\diamondsuit}(t^*)$ – набор узлов информационного множества $\mathbf{I}(t^*)$.

4.3. Регулирование числа узлов сетки на плоскости ψ, V

При практическом построении множества прогноза и ИМ работаем с ограниченным количеством узлов (ψ, V). Для фазовой координаты ψ это легко решаемая проблема, поскольку множество $[0, 2\pi]$ ограничено. Для V число узлов приходится регулировать дополнительно. Кроме того, неопределённость по фазовой координате V заранее может быть оценена лишь грубо, т.е. начальное ИМ задаётся с большим интервалом по V и большим шагом разбиения δV.

Рассмотрим подробнее работу с сеткой узлов по V. С течением времени количество узлов по V может меняться. Так, при отсутствии замеров от источников информации интервал неопределённости по V растёт по времени, а при поступлении замеров часть узлов высекается и интервал неопределённости уменьшается. В первом случае предусмотрено прореживание числа узлов с увеличением шага разбиения δV. Во втором случае сетка по V учащается с уменьшением шага δV. В обоих случаях сетка остаётся равномерной, как принято в разделе 3.

Пусть N_V – ограничение на число узлов по V. Настройка сетки под текущий интервал неопределённости по скорости осуществляется следующим образом. Число узлов по V поддерживается в интервале от $[\![(N_V + 1)/2]\!]$ до N_V. Каждый раз после построения очередного ИМ проверяется выполнение данного условия. Если число узлов стало слишком большим, т.е. больше, чем N_V, то удаляем каждый второй узел. Тем самым сокращаем число узлов до допустимого количества и увеличиваем шаг δV сетки по скорости вдвое. Если же число узлов стало слишком малым, т.е. меньше, чем $[\![(N_V+1)/2]\!]$, то добавляем промежуточные узлы, аналогично достигая допустимого количества узлов, и уменьшаем шаг δV вдвое.

Рассмотренная процедура позволяет более точно отслеживать фазовую координату V при уменьшении интервала неопределённости по скорости.

Основной проблемой при реализации указанных процедур подстройки сетки по V является построение на вновь вводимых узлах сетки по V соответствующих сеток по ψ и соответствующих сечений ИМ.

Опишем один вариант построения сечений на новых узлах сетки по скорости. Пусть текущее число узлов в данной сетке стало меньше порога $[\![(N_V + 1)/2]\!]$. Тогда добавляются два новых крайних узла $V_{\min} - \delta V$ и $V_{\max} + \delta V$ с текущей величиной дискрета δV. На эти два новых крайних узла дублируются узлы по ψ и наборы сечений ИМ, имеющиеся на прежних крайних узлах $V_{\min}$ и $V_{\max}$ соответственно. Если увеличенное таким образом число узлов начинает превышать порог $[\![(N_V+1)/2]\!]$, то процедура останавливается. Заметим, что при этом интервал по скорости подстроен, а дискрет δV сохраняется.

Если после указанного увеличения числа узлов на 2 общее число узлов все ещё меньше порога, то вводятся промежуточные узлы по V между имеющимися, а дискрет δV уменьшается вдвое. При этом на каждом вновь введенном промежуточном узле V соответствующая сетка узлов по ψ строится объединением сеток, отвечающим узлам, соседним с V. Соответствующий набор сечений ИМ на этих узлах по ψ конструируется с помощью быстрой процедуры объединения сечений. Процесс дробления сетки заканчивается, когда число узлов сетки по V первый раз превысит порог $[\![(N_V + 1)/2]\!]$.

5. Результаты моделирования

5.1. Исходные данные для моделирования

Построение ИМ моделировалось на участке времени 120 с. Начальное информационное множество $\mathbb{I}(0)$ представлялось в виде сетки по ψ и V, на узлах которой задавались многоугольники, совпадающие с начальным множеством неопределённости $H^{\#}(0)$. Начальная неопределённость по ψ была взята от 0 до 2π рад, а по V – от 180 до 360 м/с. Моделировалось движение истинной точки. Относительно неё с интервалом 20 с случайным образом формировались замеры. Замеры принимались в качестве центров множеств неопределённости в форме квадратов со стороной 400 м, ориентированных по осям x, y. Соблюдалось условие принадлежности истинной точки множеству неопределённости.

Кроме указанных, использовались следующие исходные данные:

$V(0) = 200\,\text{м/с}$	–	начальная скорость движения истинной точки;
$k = 6\,\text{м/с}^2$	–	параметр системы дифференциальных уравнений (1.1), максимальное боковое ускорение;
$\mu_1 = -1\,\text{м/с}^2$	–	минимальное значение продольного ускорения ВС;
$\mu_2 = 3\,\text{м/с}^2$	–	максимальное значение продольного ускорения ВС;
$\Delta = 1\,\text{с}$	–	шаг временной сетки построения ИМ;
$N_\psi = 600$	–	ограничение на число узлов сетки ИМ по ψ;
$\delta\psi = 2\pi/600\,\text{рад}$	–	дискрет фиксированной сетки по ψ;
$N_V = 20$	–	ограничение на число узлов сетки ИМ по V;
$\delta V = 180/11\,\text{м/с}$	–	начальный шаг сетки скорости при начальном числе узлов данной сетки 12 (здесь 180 – размах принятого начального интервала [180, 360] неопределённости по скорости, м/с).

Траектория истинного движения (рис. 2, тонкая сплошная линия) имела прямолинейный участок на интервале 0–10 с, разворот против часовой стрелки на интервале 10–40 с и разворот по часовой стрелке на интервале 40–120 с (в обоих случаях боковое ускорение максимально). Скорость изменяется с максимальным ускорением $w = 3$ м/с^2 на интервале 0–30 с, с нулевым ускорением на интервале 30–40 с и с торможением $w = -1$ м/с^2 на интервале 40–120 с. Динамика изменения ИМ вдоль траектории движения иллюстрируется проекциями ИМ на плоскость x, y в моменты 10, 33, 53, 73, 93 и 113 с. Положения истинной точки в эти моменты, а также в моменты прихода замеров, отмечены квадратиками. Множества неопределённости изображены пунктирной линией.

В начальный момент времени проекция информационного множества $\mathbb{I}(0)$ на плоскость x, y совпадает с множеством $H^{\#}(0)$ неопределённости замера. До появления второго замера область возможных значений ψ совпадает с интервалом $[0, 2\pi]$, поэтому проекция ИМ на плоскость x, y имеет кольцеобразный вид (рис. 2, начальная часть траектории).

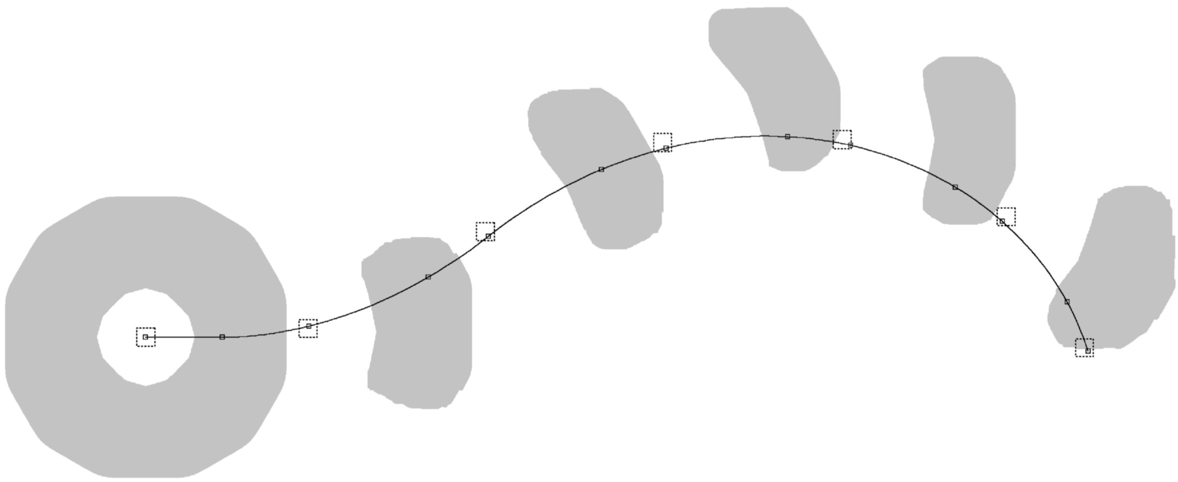

Рис. 2. Движение ИМ. Общий вид в проекции на плоскость x, y.

В данном варианте использовалось представление МН и сечений ИМ многоугольниками, заданными на фиксированной сетке из 12 векторов. Моделировались также варианты $m = 4$, 8, 16.

5.2. Структура информационного множества

Структура ИМ в проекции на плоскость x, y поясняется на рис. 3 в момент $t = 53$ с. Здесь на фоне общей проекции ИМ (слабая заливка) выделен слой, соответствующий $V = 278,2$ м/с (средняя заливка). Скорость данного слоя наиболее близка к истинному значению скорости 277,0 м/с в этот момент. Внутри него тёмной заливкой отмечено одно сечение ИМ для $\psi = 1,173$ рад, содержащее истинную точку (обозначена квадратиком). Истинное значение координаты ψ в данный момент равно 1,177 рад.

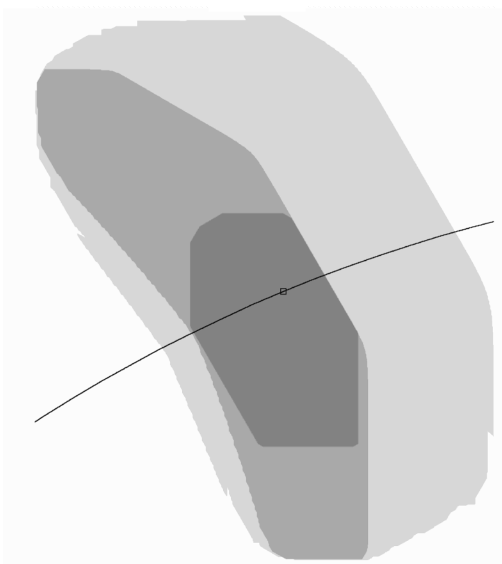

Рис. 3. Структура ИМ, $t = 53$ с.

5.3. Информационные множества при разном числе нормалей в представлении сечений

Влияние количества векторов (3.5) на точность построения ИМ иллюстрируется рис. 4. Здесь приведены проекции ИМ на плоскость x, y для $t = 79$ с при моделировании с $m = 4$ (слабая заливка), $m = 8$ (средняя заливка) и $m = 16$ (тёмная заливка). Видно, что повышение быстродействия алгоритмов (за счет уменьшения числа векторов) приводит к некоторому снижению точности оценивания: размер текущего ИМ увеличивается.

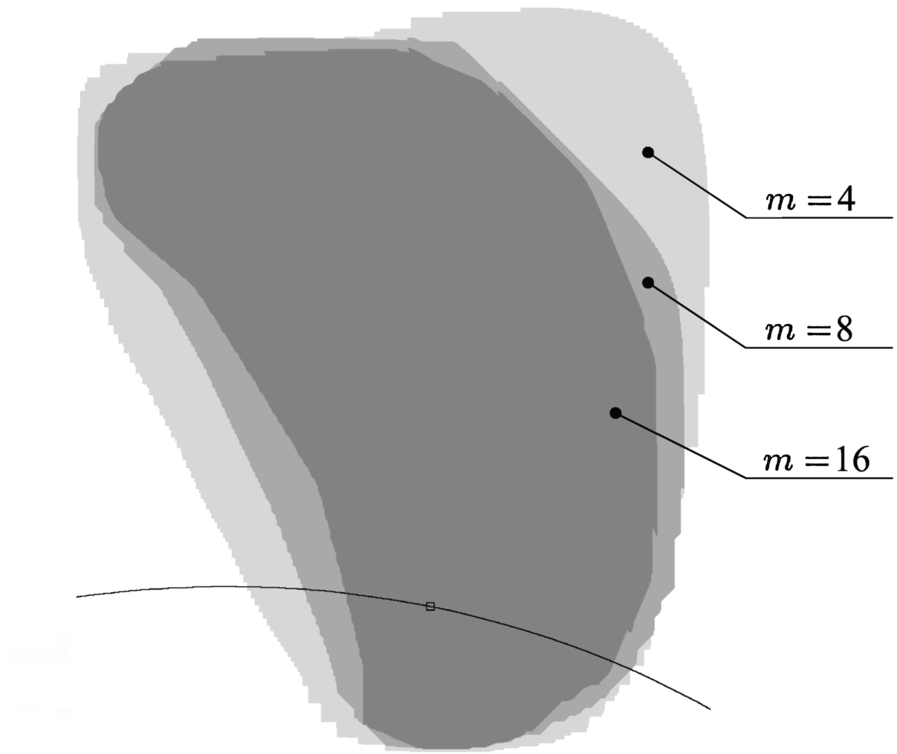

Рис. 4. Проекция ИМ на плоскость x,y для $t = 79$ с.

5.4. Оценка ненаблюдаемых координат

Предложенный подход на базе информационных множеств позволяет разработать вычислительную схему оценивания всех четырёх фазовых координат. Рассмотрим динамику оценивания ненаблюдаемых координат ψ и V.

На рис. 5 показана двумерная сетка узлов на плоскости ψ, V в моменты учета МН замеров на 20, 40, 60 и 80 с. Рассматривается вариант моделирования с числом векторов $m = 12$ и ограничением $N_V = 40$ на число узлов по V. На моменты прихода замеров возможные интервалы значений ψ отмечены тонкими вертикальными отрезками. Диапазоны узлов по ψ, оставшихся после высечки, отмечены жирными отрезками для каждого из оставшихся узлов сетки по V. Квадратиками отмечены истинные

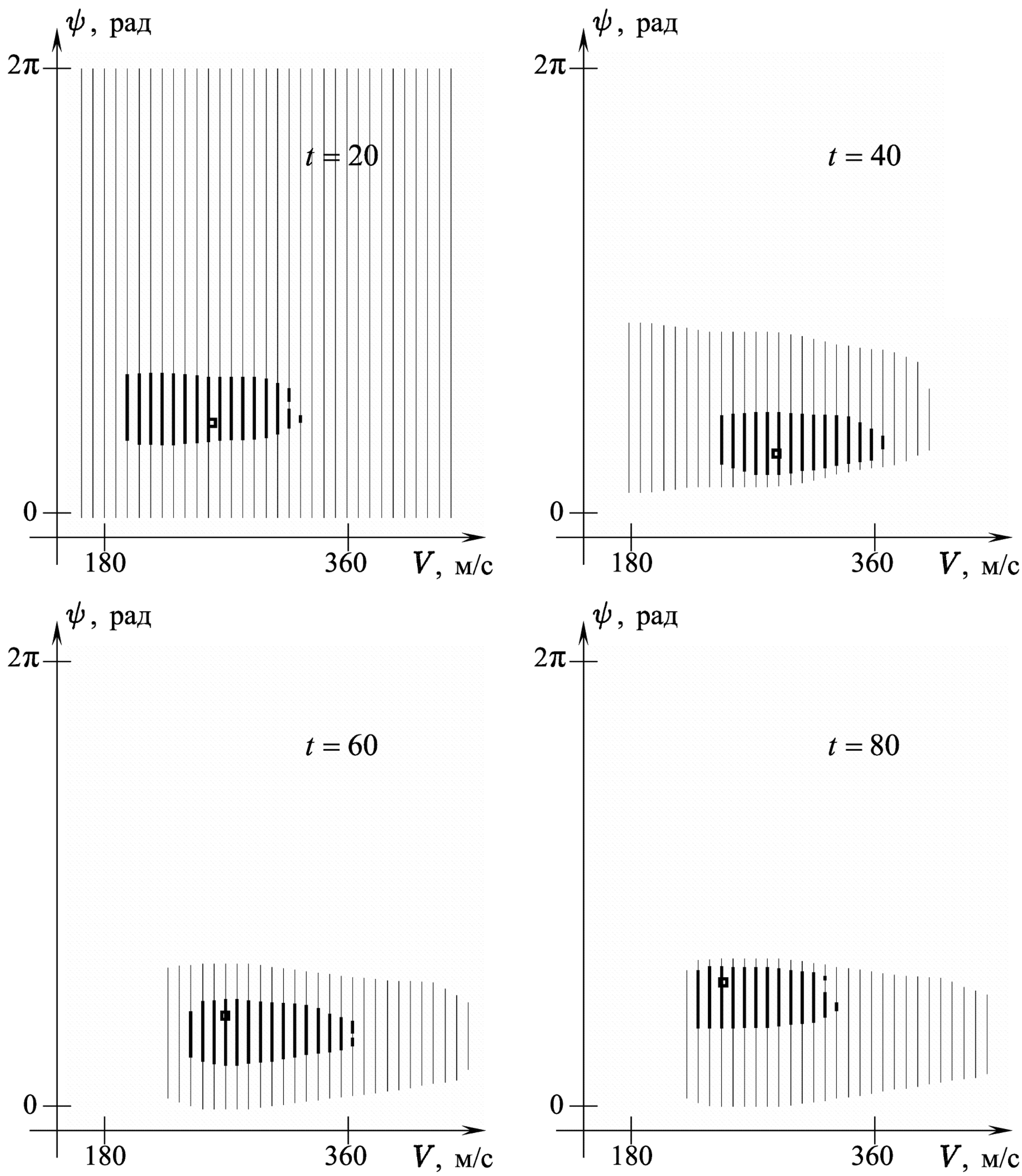

Рис. 5. Оценки ненаблюдаемых координат.

значения этих координат в соответствующие моменты времени.

Неопределённость по координате ψ на момент 20 с (рис. 5а) составляет 2π рад. Соответствующий интервал неопределённости по скорости равен [163, 437 м/с], число узлов сетки по V равно 33. Заметим, что к моменту прихода замера размах интервала неопределённости по ψ такой же, как и в начальный момент, а из-за возможного ускорения w число узлов по V увеличивается с 22 в начальный момент до 33. Размах интервала неопределённости по скорости возрастает. Видно, что пришедший в момент 20 с замер (по наблюдаемым координатам x, y) дает существенное уточнение информации по ненаблюдаемым координатам ψ, V.

Для других замеров (рис. 5б – рис. 5г) также происходит улучшение оценки ненаблюдаемых координат. Отметим, что истинная точка (квадратик) всегда находится внутри оценённых областей.

Возможность оценивания ненаблюдаемых координат через замеры наблюдаемых принципиально обусловлена тем, что построение ИМ ведётся в полном фазовом пространстве.

6. Случай постоянной и известной величины скорости движения

В этом разделе рассмотрим случай, когда величина V скорости движения ВС постоянна и заранее известна. Динамика движения будет описываться системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \sin\psi, \\ \dot{y} &= V \cos\psi, \\ \dot{\psi} &= \frac{ku}{V}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $k = \text{const} > 0$, $V = \text{const} > 0$, $|u| \le 1$.

Поскольку величина скорости зафиксирована, то ИМ есть множество в трёхмерном пространстве $\{(x, y, \psi)\}$. Соответственно, МН – трёхмерное множество, цилиндрическое по координате ψ.

Для представления множеств $\mathbf{I}(t)$ будем использовать сетку по ψ. Каждому узлу сетки будет соответствовать сечение $\mathbf{I}_\psi(t)$ в виде выпуклого многоугольника.

Построение можно проводить по способу, изложенному в разделах 2 и 3. Однако уменьшение размерности с 4-х до 3-х позволяет использовать явные формулы при интегрировании системы (6.1) и плавающую сетку по ψ.

6.1. Схема построения информационного множества

Пересчет множества $\mathbb{G}(t_i)$ в множество $\mathbb{G}(t_{i+1})$ осуществляется следующим образом. Имеем на момент t_i набор узлов по ψ. Каждому узлу соответствует выпуклый многоугольник $\mathbb{G}_\psi(t_i)$. Используя управления $u = -1, 0, 1$, получим на момент t_{i+1} три узла новой сетки: $\bar{\psi} = \psi + \Delta ku/V$. Сечения, соответствующие этим узлам, имеют вид

$$\mathbb{G}_{\bar{\psi}}(t_{i+1}, u) = \begin{cases} \mathbb{G}_\psi(t_i) + \dfrac{V^2}{ku}(\cos\psi - \cos\bar{\psi}, \sin\bar{\psi} - \sin\psi), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } u = -1, 1; \\ \mathbb{G}_\psi(t_i) + \Delta V(\sin\psi, \cos\psi), \qquad \text{если } u = 0. \end{cases}$$

При построении множества прогноза количество узлов возрастает в три раза. Однако, поскольку все узлы расположены в интервале $[0, 2\pi]$, какие-то из них оказываются близкими, что позволяет "объединять" их для ограничения общего количества сечений.

Здесь вместо каждой группы сечений с близкими значениями по ψ вводится одно сечение со средним значением ψ, представляющее собой выпуклую оболочку объединения исходных сечений, вычисляемую на векторах (3.5).

При поступлении в момент t^* замера формируется множество неопределённости $H(t^*)$. Оно цилиндрично по ψ и целиком определяется проекцией $H^{\#}(t^*)$ на плоскость x, y.

Информационное множество $\mathbf{I}(t^*)$ получается путём пересечения каждого сечения $\mathbf{G}_{\psi}(t^*)$ множества прогноза $\mathbf{G}(t^*)$ с множеством $H^{\#}(t^*)$. Результаты непустых пересечений и составляют искомое множество $\mathbf{I}(t^*)$.

6.2. Моделирование трехмерного варианта

Сначала приведем результаты, показывающие общую динамику изменения ИМ во времени. Были взяты параметры: $V = 400$ м/с, $k = 15$ м/с^2, $\Delta = 1$ с. Начальное информационное множество $\mathbf{I}(0)$ имело только одно ψ-сечение. Содержательно это означает, что в начальный момент времени известно направление движения. Задавалось движение истинной точки. Относительно этого движения формировались замеры. Около каждого замера строилось соответствующее множество неопределённости.

На рис. 6 показан фрагмент общей картины движения ИМ на промежутке времени 8–40 с в проекции на плоскость x, y. Замеры приходят в моменты 20 и 32 с. Соответствующие множества неопределённости $H^{\#}$ – параллелограмм (a) и прямоугольник (b). Крестиками отмечены положения истинной точки. Заштрихованы сечения, наиболее близкие по ψ к соответствующим истинным значениям. В информационных множествах отображены не все сечения, а лишь каждое второе. ИМ показаны только на каждом четвёртом шаге по времени: $\mathbf{I}(8)$, $\mathbf{I}(12)$, $\mathbf{I}(16)$, ..., $\mathbf{I}(40)$.

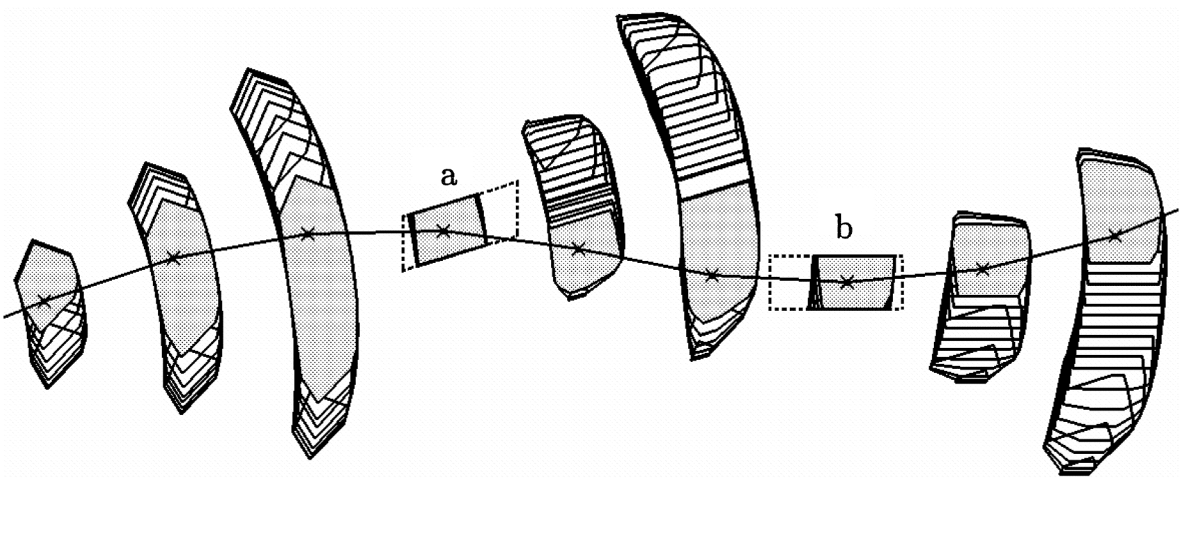

Рис. 6. Движение ИМ в проекции на плоскость x, y.

На рис. 7 более детально в трёхмерном пространстве изображены ИМ на моменты 20 и 32 с. Показаны множества до учёта замера (множество прогноза) и после учёта замера.

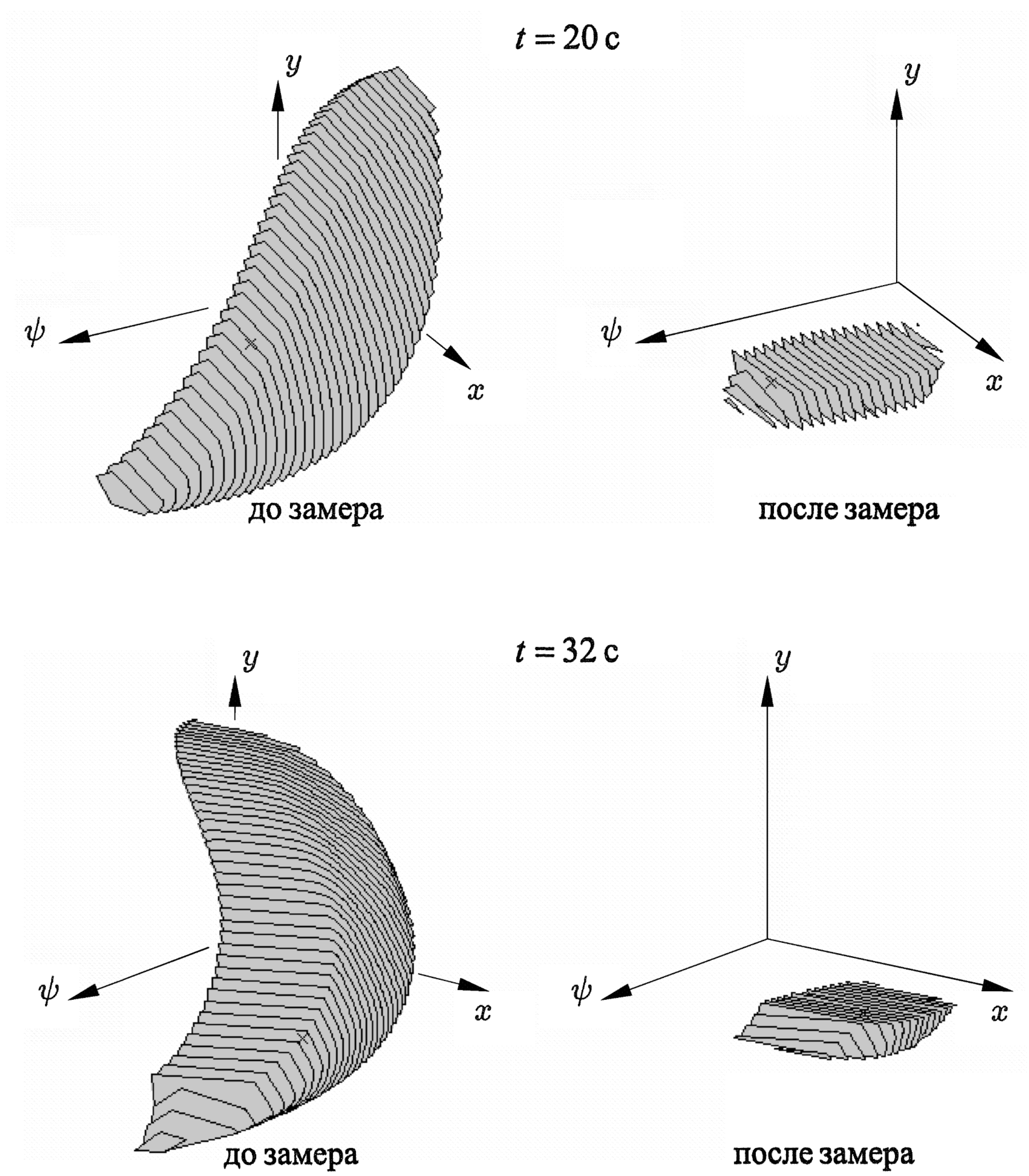

Рис. 7. Информационное множество до и после замера.

Результаты моделирования, где сечения ИМ задавались в виде прямоугольников со сторонами, ориентированными по осям x, y, приведены на рис. 8. Построение ИМ осуществлялось на участке времени 80 с. Использовались следующие параметры: $V = 200$ м/с, $k = 5$ м/с^2, $\Delta = 1$ с. Замеры поступали с интервалом 20 с, соответствующие МН имели форму квадрата со стороной 400 м. Начальное ИМ формировалось по МН начального замера и состояло из 360 одинаковых ψ-сечений в интервале $[0, 2\pi]$. Траектория истинного движения имела два разворота в разные стороны. МН поступающих замеров отмечены пунктиром. Показаны проекции ИМ на плоскость x, y для моментов 5, 12, 27, 34, 47, 54, 67, 74 с. Проекция начального ИМ совпадает с МН замера в начальный момент. До прихода второго замера неопределённость по ψ совпадает с интервалом $[0, 2\pi]$.

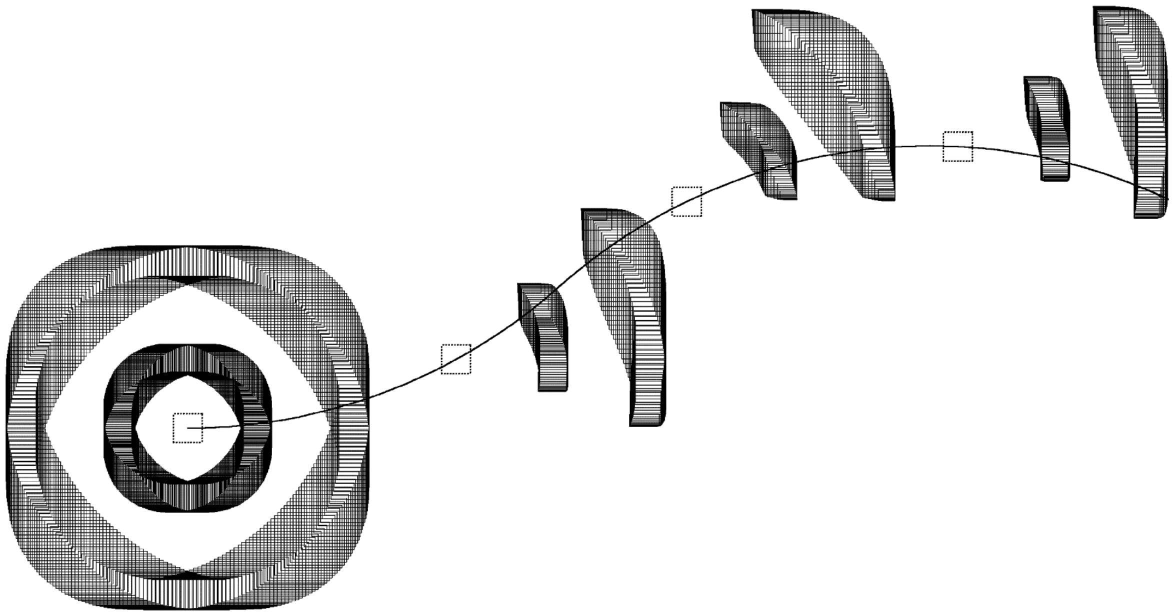

Рис. 8. Динамика изменения ИМ в проекции на плоскость x, y.

6.3. Сравнение с точными построениями

В работе [15] получены формулы, описывающие границу проекции на плоскость x, y множества достижимости системы (6.1) в фиксированный момент времени. При этом начальное множество в начальный момент времени t_* предполагается точечным, т.е. оговорено геометрическое положение (x_*, y_*) и направление ψ_*. Обозначим проекцию на плоскость x, y такого множества достижимости символом $G^\#$. Проекцию на плоскость x, y множества прогноза, строящегося по предлагаемым в работе алгоритмам, обозначим $\mathbf{G}^\#$. Проведем сравнение множеств $G^\#$ и $\mathbf{G}^\#$. Такое сравнение покажет характер огрубления, которое возникает за счет применения операции овыпуклениия при построении сечений ИМ.

Не теряя общности, считаем начальное геометрическое положение равным нулю, а начальный угол равным $\pi/2$. На рис. 9 изображены множества $G^\#$ и $\mathbf{G}^\#$, построенные для моментов $t_i = i(\pi/2)(V/k)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Данные моменты соответствуют времени поворота вектора скорости на угол $i(\pi/2)$ при движении с максимальным боковым ускорением. Для каждого момента времени использовался свой масштаб изображения. Траектории движения с экстремальными управлениями $u = -1$ и $u = 1$ представляют собой окружности радиусом V^2/k. Вектор начальной скорости показан стрелочкой. Множества $G^\#$ выделены контуром и тёмной заливкой, а множества $\mathbf{G}^\#$ – светлой заливкой. Множества $\mathbf{G}^\#$ построены с мелким шагом по времени и при числе нормалей в многоугольниках $m = 64$. Использовалась достаточно мелкая сетка по ψ в промежутке $[-2\pi, 2\pi]$. Видно, что “внешние” границы множеств $G^\#$ и $\mathbf{G}^\#$ практически совпадают, а “внутренние” отличаются. Имеет место вложение $G^\# \subset \mathbf{G}^\#$.

Рис. 10 показывает зависимость точности построения от количества нормалей. Построения сделаны для момента $(5\pi/4)(V/k)$ при числе нор-

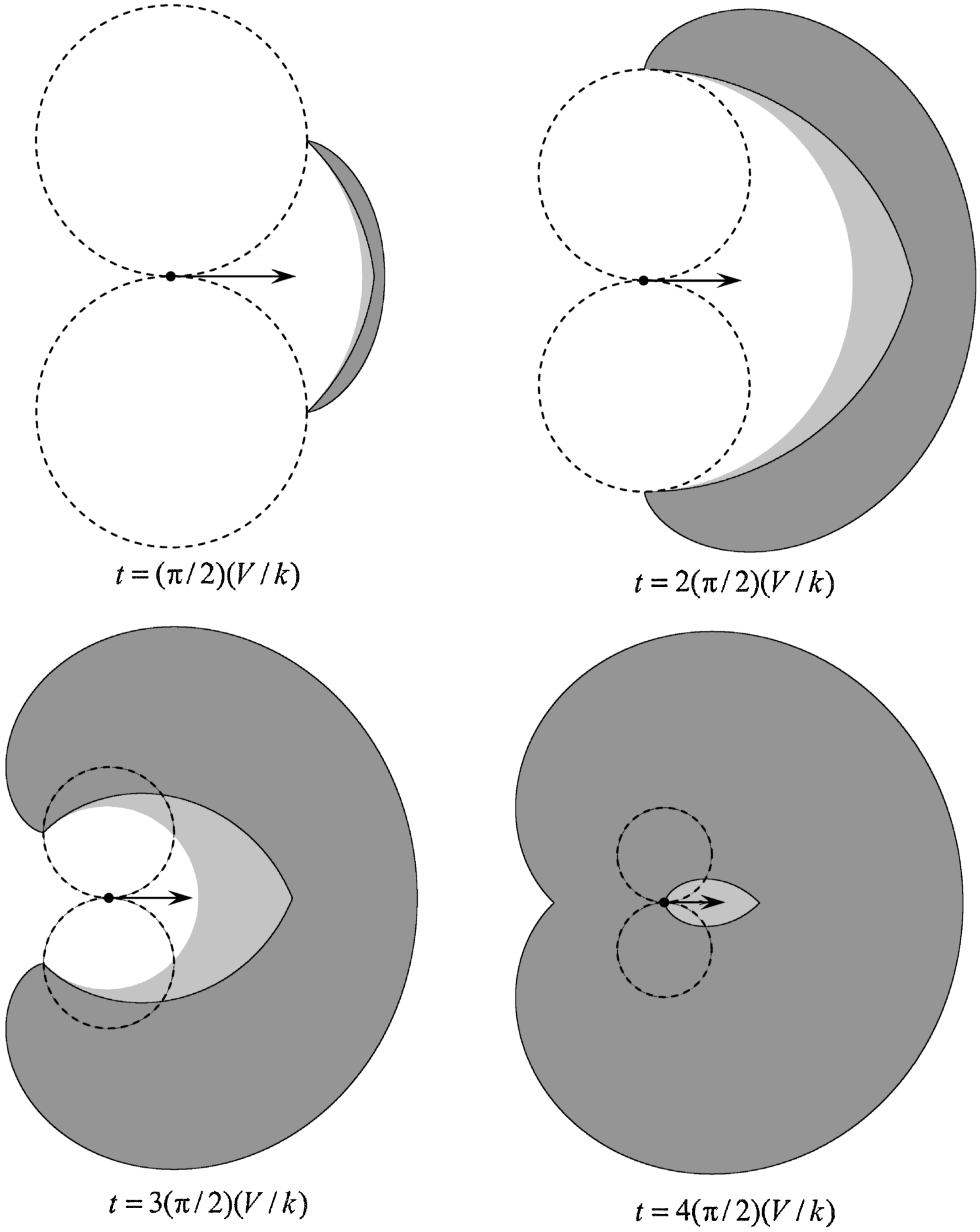

Рис. 9. Сравнение с точным множеством достижимости.

малей $m = 12$ и $m = 24$. При использовании m больше, чем 24, картина существенно не меняется.

Подчеркнем, что граница множества $G^{\#}$ описывается явными формулами лишь при точечном начальном множестве. В задачах с неполной информацией приходится строить множество прогноза от весьма произвольного начального множества. Более того, построения приходится вести в трёхмерном пространстве $\{(x, y, \psi)\}$ в случае известной величины скорости V и в четырёхмерном пространстве $\{(x, y, \psi, V)\}$, когда величина скорости неизвестна. Описанный в данной работе алгоритм построения множества прогноза хотя и не дает точного множества достижимости, но оценивает его сверху и является весьма простым для реализации.

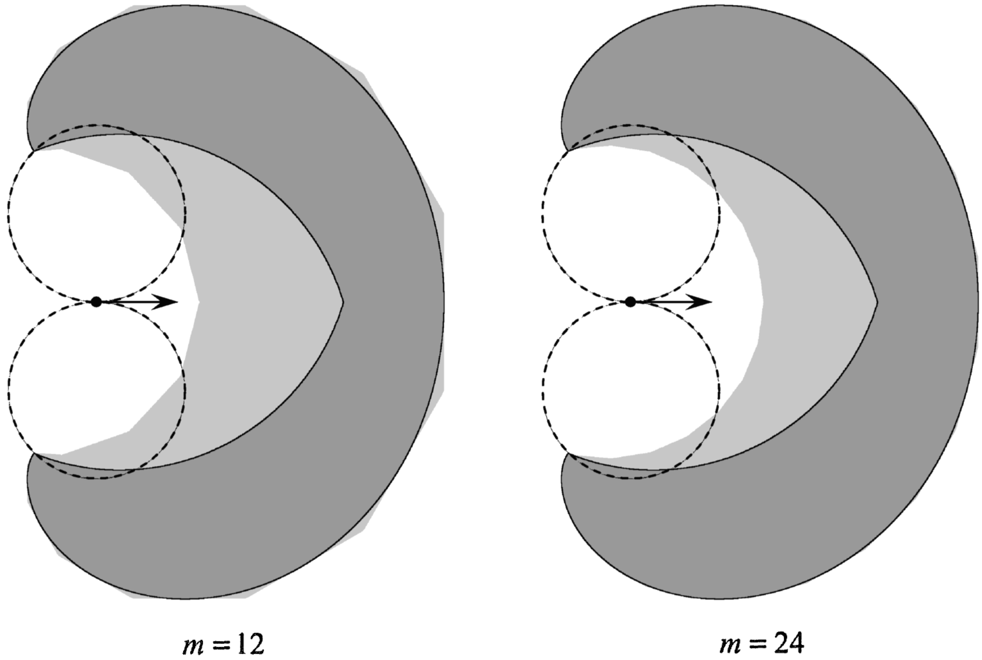

Рис. 10. Влияние числа нормалей на точность построений.

Поступила 22.10.99

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Врамер К., Зиффлинг Г.** Фильтр Калмана-Бьюси. М.: Наука, 1982.

[2] Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А.Красовского. М.: Наука, 1987.

[3] **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[4] **Куржанский А.В.** Управление и наблюдение в условиях неопределённости. М.: Наука, 1977.

[5] **Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.** Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.

[6] **Milanese M., Norton J.,** Piet-Lahanier H., **Walter E.** (editors). Bounding Approaches to System Identification. London: Plenum Press, 1996.

[7] **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.

[8] **Кумков С.И., Пацко В.С.** Модельная задача импульсного управления с неполной информацией / Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 1. С. 106–121.

[9] **Кумков С.И., Пацко В.С.** Информационные множества в задаче импульсного управления // Автоматика и телемеханика, 1997. №7. С. 195–207.

[10] **Емельянов Д.Д.** Оптимальное импульсное управление информационным множеством в задаче наведения по неполным данным // Автоматика и телемеханика, 1998. №1. С. 35–43.

[11] **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.

[12] **Хамса М.Х., Колас И., Рунгальдер В.** Оптимальные по быстродействию траектории полёта в задаче преследования // Упр. косм. аппаратами и кораблями. М.: Наука, 1971. С. 410–418.

[13] **Pecsvaradi T.** Optimal Horizontal Quidance Law for Aircraft in the Terminal Area // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. Vol. A-17, No. 6. P. 763–772.

[14] **Бердышев Ю.И.** Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвёртого порядка // Прикл. математика и механика, 1975. Т. 39, вып. 6. С. 985–994.

[15] **Бердышев Ю.И.** Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка / Вопросы анализа нелинейных систем автомат. упр. / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1973. С. 91–101.