

Министерство гражданской авиации
ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ
(ОЛАГА)

УДК 629.735.33-4
№ гос.регистрации 81104592
Инв.№ 02830078880

СОГЛАСОВАНО

Зам.директора Института математики и механики УНЦ АН СССР,

д.ф.-м.н.




27 июня 1983 г.

Н.И.Черных

УТВЕРЖДАЮ

Зам.начальника ОЛАГА по научной работе,
д.т.н., проф.




Б.А.Соловьёв

28 июня 1983 г.

О Т Ч Ё Т

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Исследование по совершенствованию бортовых и наземных автоматизированных систем управления воздушными судами

УПРАВЛЕНИЕ БОКОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЁТА
НА ПОСАДКЕ В УСЛОВИЯХ ВЕТРОВОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

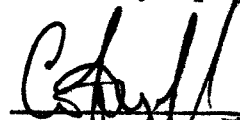
(промежуточный)

И.о.зав.отделом динамических систем Института математики и механики УНЦ АН СССР
научный руководитель работы,
д.ф.-м.н.


А.И.Субботин

9 июня 1983 г.

Начальник кафедры № 12
научный руководитель
работы
д.т.н., проф.


С.М.Фёдоров

16 июня 1983 г.

Ленинград - Свердловск
1983

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Ответственные исполнители

Проф., д.т.н.	3.6.83 В.М.Кейн	(разработка математической модели, общие вопросы, разд. I)
Доцент, к.т.н.	3.6.83 А.И.Красов	

Соисполнители

Ст. науч. сотр.,		(разработка численных алгоритмов и их программная реализация, численные расчёты на ЭВМ, реферат, введение, разд. 2-7, Институт математики и механики УНЦ АН СССР)
к.ф.-м.н.	<i>Мацко</i> 8.6.83 В.С.Пацко	
Мл. науч. сотр.	<i>Боткин</i> 8.6.83 Н.Д.Боткин	

РЕФЕРАТ

Отчет 78 стр., 55 рисунков, 1 таблица, 12 источников.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА, ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ, МНОЖЕСТВО ПОЗИЦИОННОГО ПОГЛОЩЕНИЯ, СТАБИЛИЗАЦИЯ БОКОВОГО ОТКЛОНЕНИЯ САМОЛЕТА, ЗАДАННЫЙ УГОЛ КРЕНА, ВЕТРОВОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ.

Исследуется модельная задача об управлении боковым движением среднего транспортного самолета на посадке в условиях ветрового возмущения. Управление осуществляется за счет изменения заданного угла крена. Относительно боковой составляющей скорости ветра, играющей роль помехи, предполагаются известными лишь пределы ее возможных значений.

Цель работы - построение алгоритма автоматического управления на посадке.

Задача формализуется как позиционная антагонистическая дифференциальная игра двух лиц с фиксированным моментом окончания. При исследовании задачи использовались стандартные программы решения дифференциальных игр, разработанные в Институте математики и механики УНЦ АН СССР.

В результате решения задачи выделена область начальных состояний, откуда гарантируется завершение посадки с хорошим показателем качества. Найден оптимальный гарантирующий способ формирования управления по принципу обратной связи. Описывается комбинированный способ, являющийся склейкой оптимального и некоторого линейного. Построен квазиоптимальный способ формирования помехи - ветрового возмущения.

Полученные результаты могут быть использованы при разработке новых методов и алгоритмов автоматической посадки, а также при совершенствовании комплексных самолетных тренажеров для моделирования экстремальных ветровых возмущений.

СОДЕРЖАНИЕ

Перечень условных обозначений и символов	5
Введение	7
I. Постановка задачи	9
I.1. Объект управления.	9
I.2. Ограничения на управление и возмущение	11
I.3. Целевая функция.	12
I.4. Формулировка задачи.	14
2. Эквивалентная дифференциальная игра второго порядка .	19
3. Численное построение множеств уровня функции цены иг- ры.	23
4. Универсальная оптимальная стратегия первого игрока. .	34
5. Комбинированная стратегия первого игрока.	41
6. Квазиоптимальная стратегия второго игрока	44
7. Результаты численного эксперимента.	58
Заключение	76
Список использованных источников	77

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СИМВОЛОВ

- ВПП - взлетно-посадочная полоса,
- u - управляющий параметр первого игрока,
- v - управляющий параметр второго игрока,
- φ - целевая функция (функция платы),
- Γ - цена игры,
- U° - оптимальная стратегия первого игрока,
- $U_{\text{лин}}$ - стратегия первого игрока, основанная на линейной функции,
- $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}$ - комбинированная стратегия первого игрока,
- V° - оптимальная стратегия второго игрока,
- $V^{\text{пов}}$ - квазиоптимальная стратегия второго игрока,
- Δ - шаг дискретной схемы управления,
- W_c - множество позиционного поглощения,
- $W_c(t)$ - сечение множества W_c в момент t ,
- $X(\vartheta, t)$ - фундаментальная матрица Коши,
- $X_{i,j}(\vartheta, t)$ - матрица, составленная из i -ой и j -ой строк матрицы $X(\vartheta, t)$,
- Γ - цена эквивалентной игры,
- U° - оптимальная стратегия первого игрока в эквивалентной игре,
- V° - оптимальная стратегия второго игрока в эквивалентной игре,
- W_c - множество позиционного поглощения в эквивалентной игре,
- $W_c(t)$ - сечение множества W_c в момент t ,
- S - поверхность переключения первого игрока,
- $S(t)$ - сечение поверхности S в момент t (линия пере-

ключения),

$W_c^*(t)$ - сечение множества позиционного поглощения в аппроксимирующей игре,

S^* - поверхность переключения первого игрока в аппроксимирующей игре,

$S^*(t)$ - сечение поверхности S^* в момент t .

В В Е Д Е Н И Е

В отчете при помощи методов теории позиционных антагонистических дифференциальных игр исследуется модельная задача об управлении боковым движением среднего транспортного самолета на посадке в условиях ветрового возмущения. Основная особенность, связанная с применением теории игр, состоит в том, что относительно помехи - ветрового возмущения, предполагаются известными лишь пределы возможных изменений. Какие-либо другие сведения, в том числе и вероятностного характера, считаются отсутствующими. Действительная реализация помехи может быть любой - лишь бы ее значения лежали в заданных пределах. В связи с этим и оценка эффективности того или иного способа выработки управления носит характер гарантированной оценки: расчет ведется на самый неблагоприятный вариант помехи. Оптимальный способ выработки управления - способ, обеспечивающий наилучшую гарантию.

При решении задачи в отчете используется линеаризованная система дифференциальных уравнений бокового движения, имеющая 7-ой порядок. Качество процесса управления подсчитывается при помощи некоторой функции платы, зависящей от величины бокового отклонения и его скорости в момент пролета торца взлетно-посадочной полосы. Учет только двух координат фазового вектора в момент пролета есть попытка упростить задачу и получить наглядные результаты. В итоге исследования найден оптимальный способ выработки управления и определена область начальных состояний, откуда гарантируется завершение посадки с хорошим показателем качества. Анализируется также некоторый комбинированный способ, совпадающий при больших отклонениях от номина-

льной траектории с оптимальным, а при малых — с линейным способом управления, аналогичным принятым в настоящее время для стабилизации бокового отклонения на этапе посадки. Описан также "наихудший" способ выработки помехи. Такой способ можно использовать в имитаторах ветрового возмущения на тренажерах обучения летного состава, а также при испытании новых методов автоматической посадки.

Данная работа выполнена в соответствии с договором о научно-техническом сотрудничестве между Институтом математики и механики УНЦ АН СССР и Ордена Ленина Академией гражданской авиации.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

I.1. Объект управления

Пространственное движение самолета как твердого тела (без учета изгибных колебаний) описывается системой нелинейных уравнений 12-го порядка /1/. Учет динамических свойств двигателей, а также подсистем улучшения управляемости и устойчивости, применяемых на современных транспортных самолетах, приводит к повышению порядка до 18-го - 20-го. Решение задачи оптимального управления в условиях действия помех для такого нелинейного объекта представляет существенную трудность. Поэтому далее рассматривается упрощенный вариант описания объекта, где приняты следующие допущения.

1). Рассматривается только заключительный этап захода на посадку от момента пролета ближнего приводного радиомаяка (БПРМ) ($H = 60$ м) до торца взлетно-посадочной полосы (ВПП) ($H = 15$ м). Заданная траектория представляет собой отрезок прямолинейной глиссады снижения (рис. I.1).

2). Продольное движение по глиссаде снижения считается независимым от бокового. Поскольку наибольшие трудности вызывает устранение накопившихся к моменту пролета БПРМ боковых отклонений /2/, далее рассматривается только боковое движение. Продольное движение считается происходящим по заданной программе.

3). Система управления боковым движением самолета разделяется на две подсистемы: систему траекторного управления (СТУ) и систему угловой стабилизации (СУС), процессы в которых существенно отличаются по масштабу времени. При анализе

процессов траекторного управления динамика углового движения по крену вместе с СУС приближенно описывается аperiodическим звеном второго порядка. Управляющим воздействием считается заданный угол крена, обрабатываемый СУС.

4) Из возмущающих воздействий, вызывающих боковые отклонения самолета от заданной траектории, учитывается лишь основное – боковая составляющая скорости ветра.

5) Отклонения от заданной траектории на заключительном этапе захода на посадку малы, поэтому допустима линеаризация уравнений бокового движения.

С учетом указанных допущений математическая модель управляемого объекта имеет вид /3, 4/:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -0.0762 x_2 - 5.34 x_3 + 9.81 x_5 + 0.0762 v \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= -0.0056 x_2 - 0.392 x_3 - 0.0889 x_4 - 0.0378 x_5 - \\
 &\quad - 0.17 x_6 + 0.0378 x_7 + 0.0056 v \\
 \dot{x}_5 &= -x_5 + x_7 \\
 \dot{x}_6 &= -0.0129 x_2 - 0.9016 x_3 - 0.2045 x_4 - 0.0869 x_5 - \\
 &\quad - 0.89 x_6 + 0.0869 x_7 + 0.0129 v \\
 \dot{x}_7 &= -k x_7 + k u
 \end{aligned}
 \tag{I.I}$$

Здесь u – заданный угол крена, v – боковая составляющая скорости ветра. Компоненты фазового вектора

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T =$$

$$= (z, \dot{z}, \psi, \dot{\psi}, \gamma, x_6, x_7)$$

имеют следующий смысл:

z - боковое отклонение центра масс самолета от оси ВПП,

\dot{z} - скорость бокового отклонения,

ψ - угол рыскания (отсчитываемый от оси ВПП),

$\dot{\psi}$ - скорость угла рыскания,

γ - угол крена,

x_6, x_7 - вспомогательные переменные.

Коэффициент $K > 0$ характеризует динамические свойства СУС и самолета в угловом движении по крену. При $K \rightarrow \infty$ система (I.1) переходит в систему, приведенную в работе /4/. Боковое отклонение в системе (I.1) измеряется в метрах, а угловые величины - в радианах.

Процесс движения будем рассматривать на промежутке $[0, \vartheta]$. Момент ϑ имеет смысл момента пролета торца ВПП. В дальнейшем $\vartheta = 15$ сек.

I.2. Ограничения на управление и возмущение

По соображениям безопасности заданный угол крена ограничен по модулю, причем уровень ограничения зависит от высоты полета /2/. Продольное движение по глиссаде предполагается равномерным, так что высота однозначно связана со временем. Примем

$$|\gamma| \leq \mu(t) = 0.2613 - 0.0116t, \quad \text{рад.} \quad (I.2)$$

Допустимые значения боковой составляющей скорости ветра на посадке естественно считать стесненными ограничением

$$|v_1| \leq v(t), \quad \text{м/сек,}$$

что позволяет учесть распределение скорости ветра по высоте /5, 6/. Однако на практике в большинстве случаев достаточно подробные сведения о распределении скорости ветра по высоте отсутствуют. Поэтому далее предполагается

$$|v_1| \leq v = 10, \quad \text{м/сек.} \quad (I.3)$$

I.3. Целевая функция

Будем говорить, что параметр u принадлежит первому игроку, а параметр v - второму. Введем целевую функцию (функцию платы), значения ее будет минимизировать первый игрок и максимизировать второй.

На плоскости фазовых переменных x_1 , x_2 зафиксируем множество M , описываемое формулой

$$M = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{x_1^2}{216} - \frac{2x_1}{9} - \frac{3}{2} \leq x_2 \leq -\frac{x_1^2}{216} - \frac{2x_1}{9} + \frac{3}{2} \right\} \quad (I.4)$$

и показанное на рис. I.2. Множество M выбрано из следующих соображений /7/: если в момент ϑ пролета торца полосы боковое отклонение $x_1(\vartheta)$ и скорость бокового отклонения $x_2(\vartheta)$ таковы, что $(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta)) \in M$, то после момента

ϑ гарантируется успешное завершение посадки. Если $(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta)) \notin M$, такой гарантии нет. Таким образом, множество M построено на основе анализа процесса

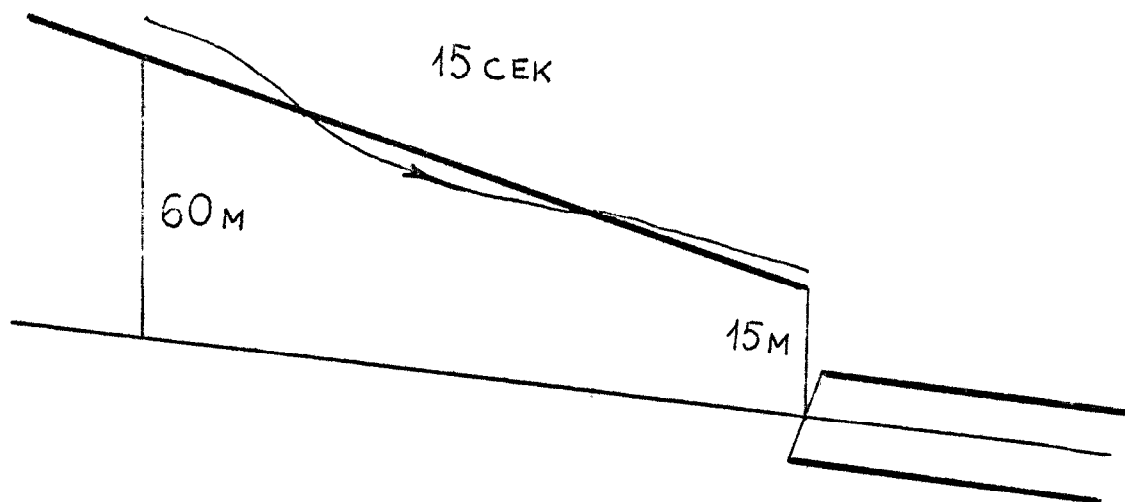


Рис. 1.1

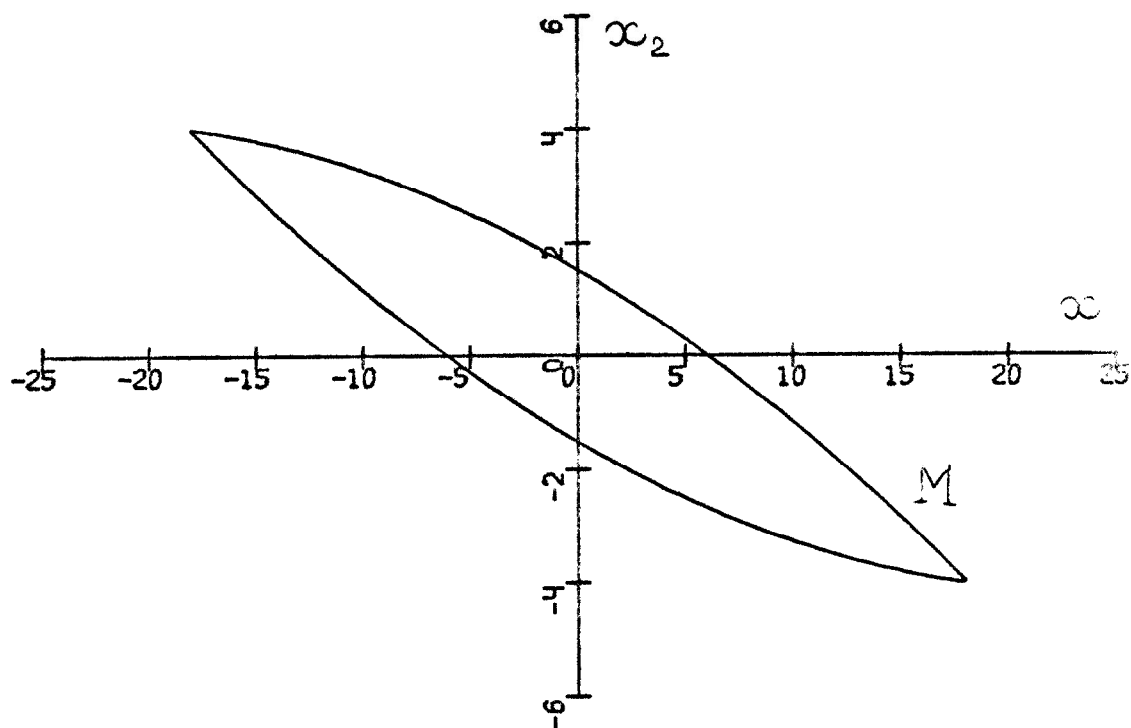


Рис. 1.2

движения самолета после пролета торца ВПП. Положим

$$\varphi(x_1, x_2) = \min \{c \geq 0 : (x_1, x_2) \in cM\}.$$

Функцию φ и будем использовать как целевую.

В некоторых вариантах счета на ЭВМ вместо описанного множества M использовались множества M_* и M_{**} , показанные на рис. I.3 и I.4.

I.4. Формулировка задачи

Запишем систему (I.I) в векторной форме

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv \quad (I.5)$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0762 & -5,34 & 0 & 9,81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0056 & -0,392 & -0,0889 & -0,0378 & -0,17 & 0,0378 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0,0129 & -0,9016 & -0,2045 & -0,0869 & -0,89 & 0,0869 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa \end{pmatrix}$$

$$B = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \kappa)', \quad C = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)',$$

$$|u| \leq \mu(t),$$

$$|v| \leq \nu.$$

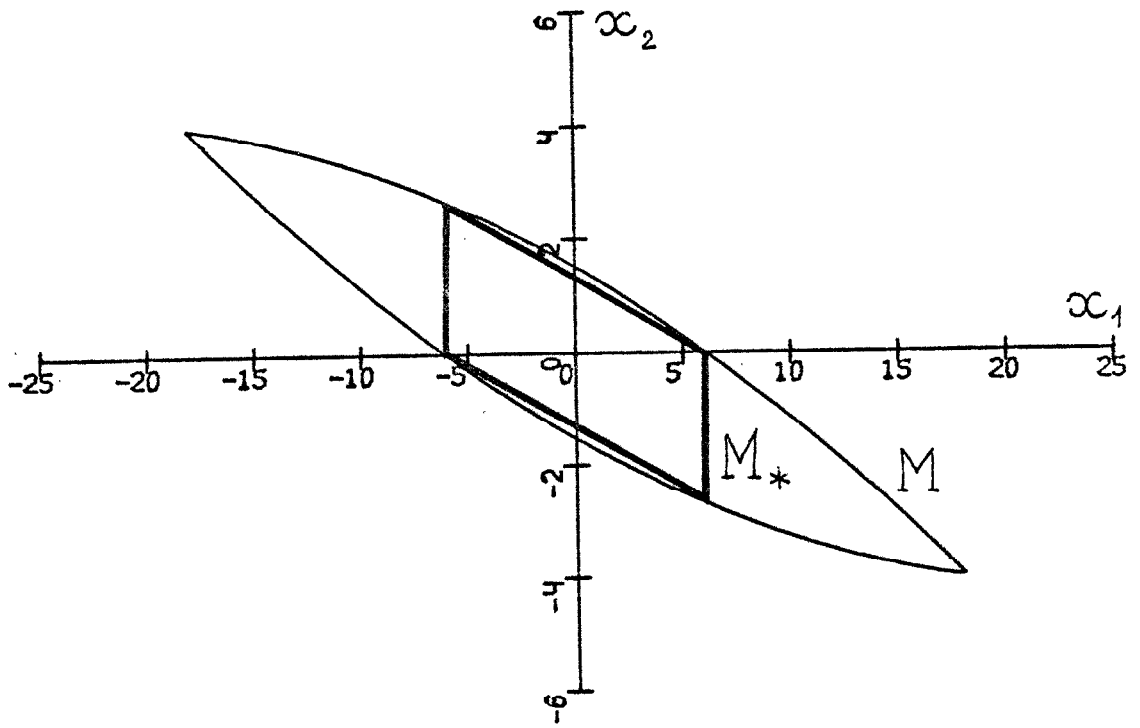


Рис. 1.3

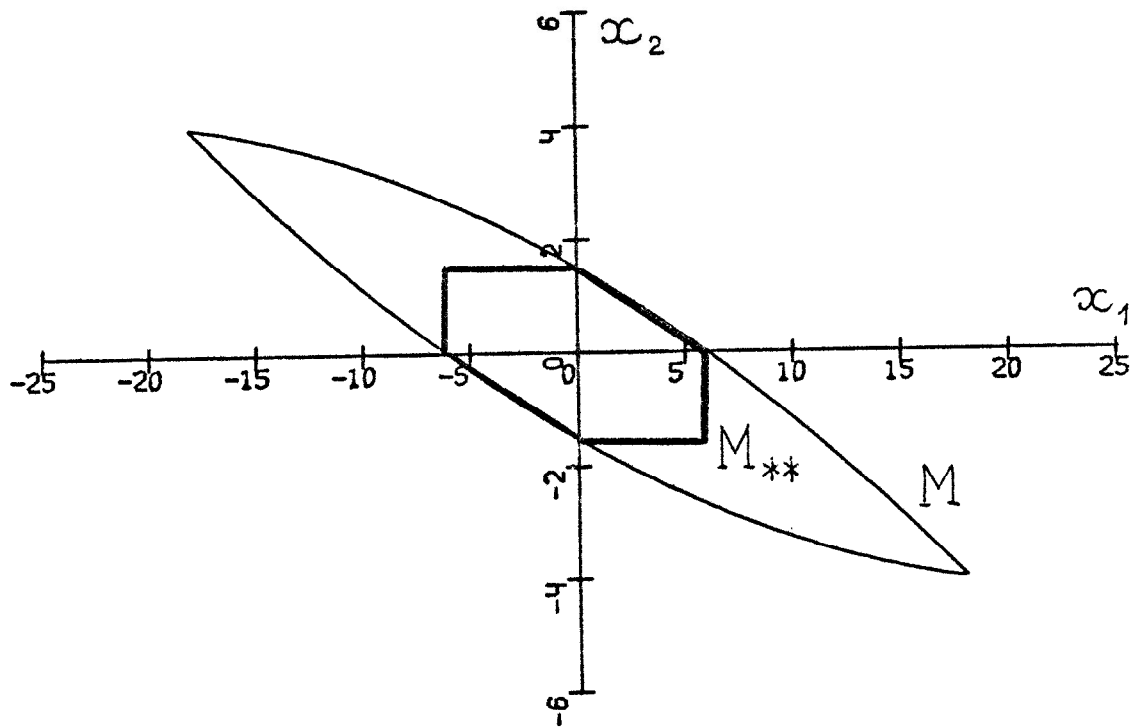


Рис. 1.4

Считаем, что первый игрок, распоряжающийся параметром u , минимизирует в момент ϑ значения целевой функции φ или, что то же самое – стремится привести вектор $(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))$ на множество $M_c = cM$ с возможно меньшим значением параметра c . Интересы второго игрока, распоряжающегося параметром v , противоположны.

Следуя /8/, определим понятия цены игры и оптимальных стратегий.

Под допустимыми стратегиями первого игрока будем понимать функции U , сопоставляющие каждой позиции (t, x) число $U(t, x)$, удовлетворяющее условию $|U(t, x)| \leq \mu(t)$. Символом $x(\cdot, t_0, x_0, U, \Delta, v(\cdot))$ обозначим движение системы (1.5), выходящее в момент t_0 из точки x_0 , когда первый игрок применяет некоторую допустимую стратегию U в дискретной схеме управления с шагом Δ , а второй реализует некоторую функцию времени $v(\cdot)$, удовлетворяющую условию $|v(t)| \leq \nu$. Пусть

$$\varphi^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta) = \sup_{v(\cdot)} \varphi(x_1(\vartheta, t_0, x_0, U, \Delta, v(\cdot)), x_2(\vartheta, t_0, x_0, U, \Delta, v(\cdot))).$$

Величина $\varphi^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta)$ имеет смысл гарантии первого игрока для начальной позиции (t_0, x_0) , когда он использует стратегию U в дискретной схеме управления с шагом Δ . Пусть далее

$$\Gamma^{(1)}(t_0, x_0) = \min_U \overline{\lim}_{\Delta \rightarrow 0} \varphi^{(1)}(t_0, x_0, U, \Delta). \quad (1.6)$$

Величина $\Gamma^{(1)}(t_0, x_0)$ есть оптимальная гарантия первого игрока для начальной позиции (t_0, x_0) . Стратегии

U^0 , на которой достигается минимум в (I.6), называется оптимальной стратегией первого игрока для позиции (t_0, x_0) .

Аналогично под допустимыми стратегиями второго игрока будем понимать функции V , сопоставляющие каждой позиции (t, x) число $V(t, x)$, причем $|V(t, x)| \leq D$. Символом $x(\cdot, t_0, x_0, V, \Delta, u(\cdot))$ обозначим движение системы (I.5), выходящее в момент t_0 из точки x_0 , когда второй игрок применяет некоторую допустимую стратегию V в дискретной схеме управления с шагом Δ , а первый реализует некоторую функцию времени $u(\cdot)$, удовлетворяющую условию $|u(t)| \leq \mu(t)$. Пусть

$$\varphi^{(2)}(t_0, x_0, V, \Delta) = \inf_{u(\cdot)} \varphi(x_1(\vartheta, t_0, x_0, V, \Delta, u(\cdot)), x_2(\vartheta, t_0, x_0, V, \Delta, u(\cdot))),$$

$$\Gamma^{(2)}(t_0, x_0) = \max_V \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varphi^{(2)}(t_0, x_0, V, \Delta). \quad (I.7)$$

Величина $\Gamma^{(2)}(t_0, x_0)$ есть оптимальная гарантия второго игрока для начальной позиции (t_0, x_0) . Стратегия V^0 , на которой достигается максимум в (I.7), называется оптимальной стратегией второго игрока для начальной позиции (t_0, x_0) .

Поскольку управляющие параметры u , v входят в правую часть системы (I.5) аддитивно, то $\Gamma^{(1)}(t_0, x_0) = \Gamma^{(2)}(t_0, x_0)$ для любой начальной позиции (t_0, x_0) /8/. Положим $\Gamma(t_0, x_0) = \Gamma^{(1)}(t_0, x_0) = \Gamma^{(2)}(t_0, x_0)$. Функция Γ называется функцией цены игры.

Требуется:

- а) Для заданного числа $C \geq 0$ описать в пространстве $\{t, x\}$ множество всех позиций, где цена игры не превышает C .
- в) Построить оптимальную стратегию первого игрока.

с) Найти оптимальную стратегию второго игрока.

Из приведенных выше определений следует, что оптимальные стратегии игроков зависят, вообще говоря, от начальной позиции (t_0, x_0) . Однако в интересующей нас задаче (I.5) удастся найти универсальную оптимальную стратегию первого игрока, т.е. стратегию, оптимальную для всех начальных позиций (t_0, x_0) . Сложнее обстоит дело с универсальной оптимальной стратегией второго игрока. Будет построена некоторая универсальная квазиоптимальная стратегия второго игрока.

2. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В описание целевой функции φ для игры (I.5) входят лишь две координаты фазового вектора x . Это позволяет /8, 9/ осуществить переход от игры (I.5) к эквивалентной игре второго порядка.

Пусть $X(\vartheta, t) = e^{A(\vartheta - t)}$ — фундаментальная матрица Коши, соответствующая матрице A в (I.5). Матрицу, составленную из первых двух строк матрицы $X(\vartheta, t)$, обозначим $X_{1,2}(\vartheta, t)$. Сделаем замену

$$y(t) = X_{1,2}(\vartheta, t)x(t).$$

Тогда

$$y(\vartheta) = \begin{pmatrix} x_1(\vartheta) \\ x_2(\vartheta) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} X_{1,2}(\vartheta, t)x(t) + X_{1,2}(\vartheta, t)\dot{x}(t) = \\ &= -X_{1,2}(\vartheta, t)Ax(t) + X_{1,2}(\vartheta, t)(Ax(t) + Bu + Cv) = \\ &= X_{1,2}(\vartheta, t)Bu + X_{1,2}(\vartheta, t)Cv. \end{aligned}$$

Выписанные соотношения лежат в основе обоснования /8, 9/ эквивалентности игры (I.5) и игры второго порядка

$$\dot{y} = D(t)u + E(t)v, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1, \quad (2.1)$$

$$D(t) = \mu(t) X_{1,2}(\vartheta, t) B, \quad E(t) = \nu X_{1,2}(\vartheta, t) C$$

с целевой функцией $\varphi(y_1(\vartheta), y_2(\vartheta))$.

Стратегии в игре (2.1) будем обозначать буквами U, V (в отличие от \bar{U}, \bar{V} для игры (1.5)). Функцию цены в игре (2.1) обозначим через Γ . Справедливы соотношения

$$\Gamma(t, x) = \Gamma(t, X_{1,2}(\vartheta, t)x),$$

$$U^\circ(t, x) = \mu(t) U^\circ(t, X_{1,2}(\vartheta, t)x), \quad V^\circ(t, x) = \nu V^\circ(t, X_{1,2}(\vartheta, t)x).$$

На рис. 2.1 приведена фазовая кривая функции $\tau \rightarrow D(\vartheta - \tau)$ для $\kappa = 1$. Здесь и далее $\tau = \vartheta - t$ — обратное время. Кривая представляет из себя совокупность точек $D(\vartheta - \tau)$, когда τ меняется от 0 до 15. На графике отмечены точки, соответствующие $\tau = 3, 6, 9, 12, 15$. Кривые на рис. 2.2 построены для $\kappa = 0.5, 1, 3$. Здесь же приведена кривая для $\kappa = \infty$, т.е. для системы 6-го порядка из /4/.

На рис. 2.3 показана фазовая кривая функции $\tau \rightarrow E(\vartheta - \tau)$.

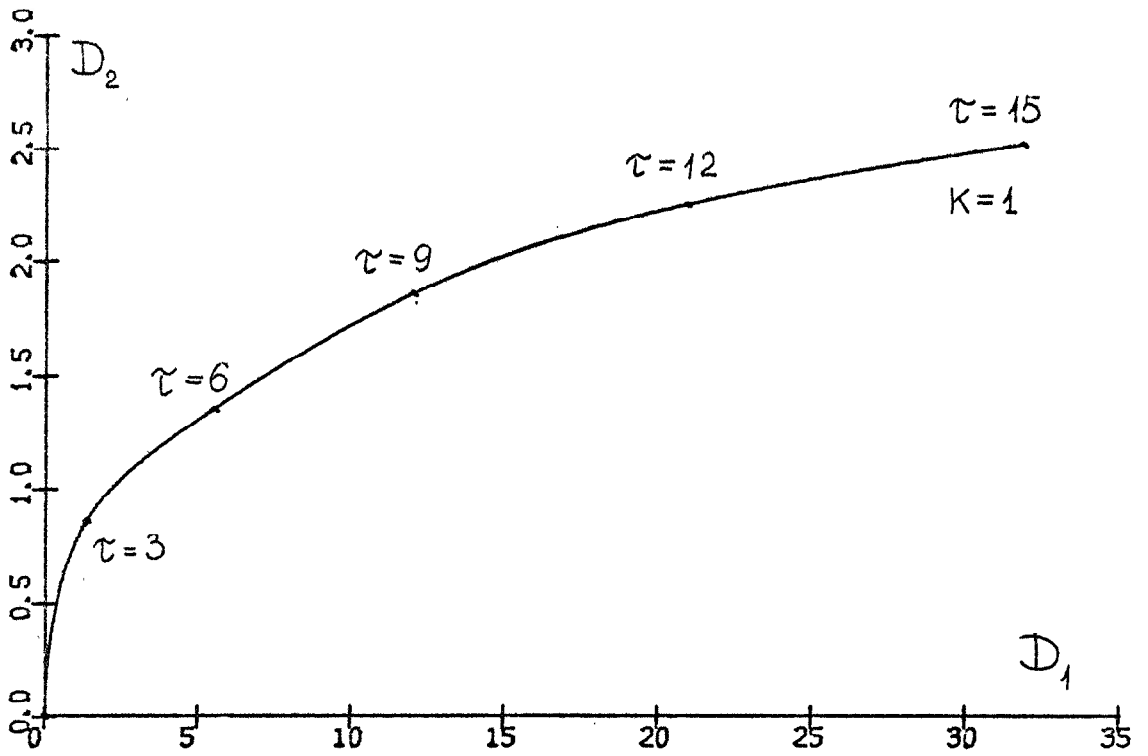


Рис. 2.1

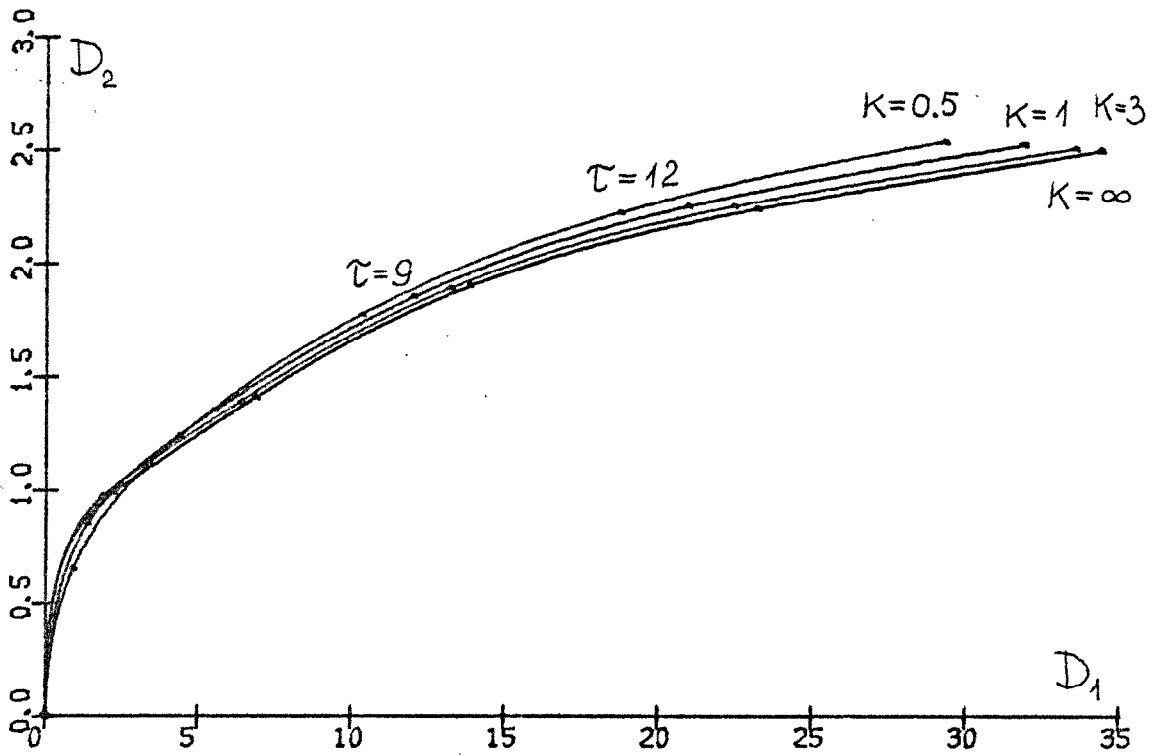


Рис. 2.2

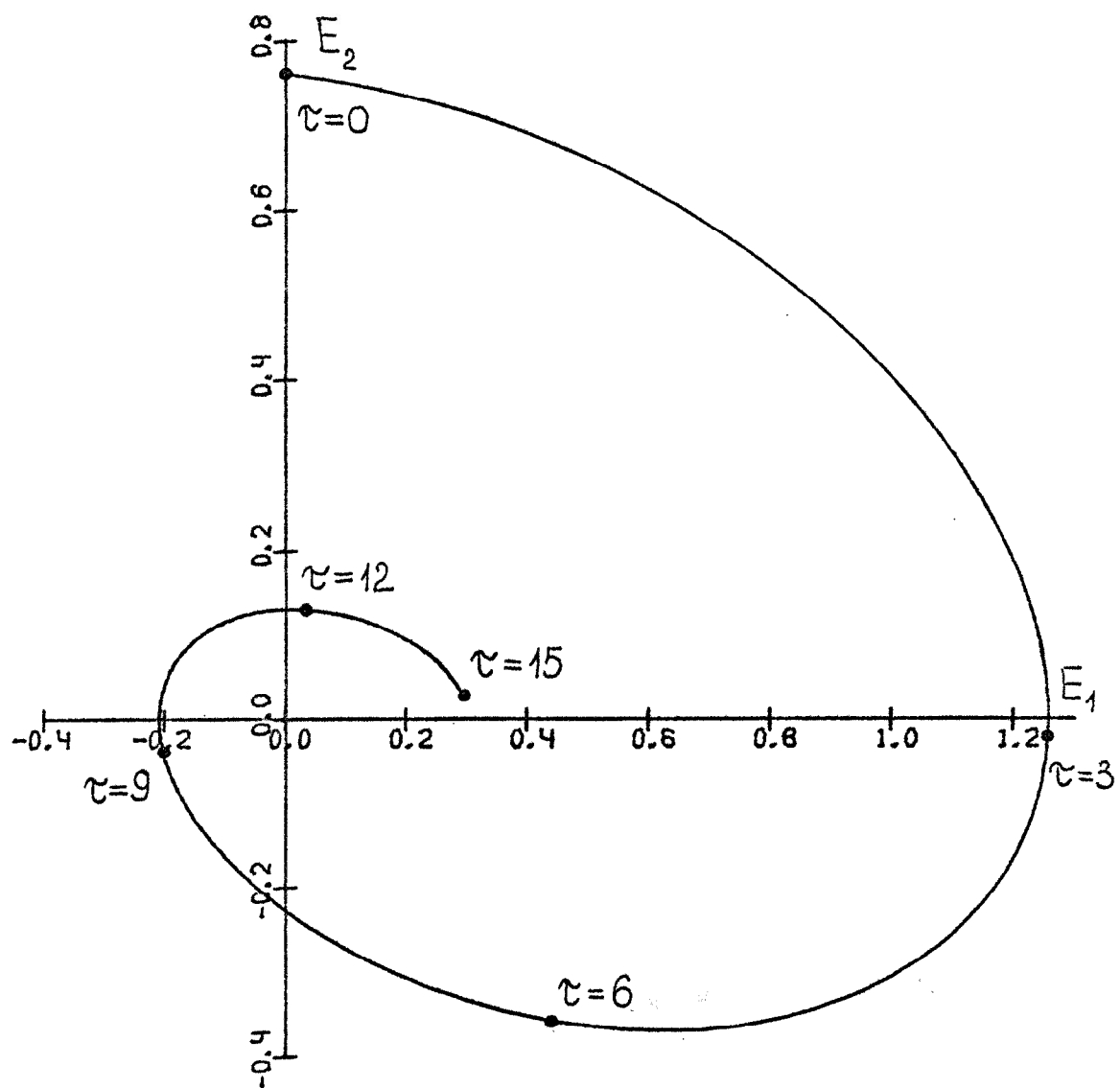


Рис. 2.3

3. ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ УРОВНЯ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ ИГРЫ

Опишем численную процедуру построения множества

$$\mathcal{W}_c = \{ (t, y) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2 : \Gamma(t, y) \leq c \}, \quad c \geq 0,$$

представляющего из себя множество уровня функции цены в игре (2.1). Множество \mathcal{W}_c называется также множеством позиционного поглощения для целевого множества $M_c = cM$. Еще одно эквивалентное название - максимальный стабильный мост, приводящий на M_c .

Справедливы следующие утверждения /8/. Если $(t_0, y_0) \in \mathcal{W}_c$, то существует стратегия первого игрока, гарантирующая перевод системы (2.1) из начальной позиции (t_0, y_0) на множество M_c в момент ϑ при любых действиях второго игрока. Если $(t_0, y_0) \notin \mathcal{W}_c$, то существует стратегия второго игрока, гарантирующая уклонение системы (2.1) от попадания на M_c в момент ϑ .

Положим $\mathcal{W}_c(t) = \{ y \in \mathbb{R}^2 : (t, y) \in \mathcal{W}_c \}$. Множество $\mathcal{W}_c(t)$ назовем сечением \mathcal{W}_c в момент t . Сечение $\mathcal{W}_c(t)$ связано с сечением $W_c(t)$ множества уровня $W_c = \{ (t, x) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^7 : \Gamma(t, x) \leq c \}$ функции цены в игре (1.5) соотношением

$$\mathcal{W}_c(t) = X_{1,2}(\vartheta, t) W_c(t).$$

Множества $\mathcal{W}_c(t)$, $W_c(t)$ выпуклы, поскольку выпукло M_c .

Для построения сечений $\mathcal{W}_c(t)$ использовались (независимо) две стандартные программы, разработанные в отделе динамических систем Института математики и механики. Программы

рассчитаны на случай произвольной линейной дифференциальной игры

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Cv, & x &\in R^n, \\ u &\in (a + bt)P, & v &\in (e + dt)Q \end{aligned} \quad (3.1)$$

с постоянными коэффициентами и фиксированным моментом окончания ϑ . Множители $a + bt$ перед P и $e + dt$ перед Q задают линейную зависимость от t ограничений на управляющие параметры. Предполагаются выделенными две координаты фазового вектора x с номерами i, j и выпуклый, замкнутый, ограниченный многоугольник M на плоскости, содержащий внутри себя начало координат. Зафиксировав число $c \geq 0$, считаем, что цель первого игрока — приведение вектора $(x_i(\vartheta), x_j(\vartheta))$ на множество $M_c = cM$, интересы второго игрока противоположны. Результатом работы программ являются сечения $\mathcal{W}_c(t)$ множества позиционного поглощения (максимального стабильного моста) \mathcal{W}_c , построенные для эквивалентной к (3.1) дифференциальной игре второго порядка при целевом множестве M_c .

Одна из программ предназначена для случая, когда P, Q — произвольные выпуклые многогранники из конечномерных пространств. Вторая программа рассчитана на случай скалярных управляющих параметров u, v , т.е. когда P, Q — отрезки на прямой, и учитывает специфику этого случая.

Поясним на содержательном уровне логику работы программ. Эквивалентную к (3.1) игру второго порядка запишем в виде

$$\dot{y} = D(t)u + E(t)v, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad (3.2)$$

$$D(t) = (a + bt)X_{i,j}(\vartheta, t)B, \quad E(t) = (e + dt)X_{i,j}(\vartheta, t)C.$$

Здесь $X_{i,j}(\vartheta, t)$ - матрица, составленная из i и j - ой строк фундаментальной матрицы Коши $X(\vartheta, t)$. Целевое множество для игры (3.2) есть множество M_c . На него следует привести вектор $y(\vartheta)$.

Пусть нас интересуют сечения $\mathcal{W}_c(t)$ множества позиционного поглощения \mathcal{W}_c для моментов t из промежутка $[\tilde{t}, \vartheta]$. Разобьем этот промежуток на m равных частей с шагом δ . Положим $s_n = \vartheta - n\delta$, $n = \overline{0, m}$. Вычислим значения матрицы $X_{i,j}(\vartheta, s_n)$ и затем значения матриц $D(s_n)$ и $E(s_n)$. Рассмотрим аппроксимирующую по отношению к (3.2) дифференциальную игру

$$\begin{aligned} \dot{y} &= D^*(t)u + E^*(t)v, \\ u &\in P, \quad v \in Q, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где матрицы $D^*(t)$, $E^*(t)$ кусочно-постоянны по t и заданы соотношениями

$$D^*(t) = D(s_n), \quad E^*(t) = E(s_n), \quad t \in (s_{n+1}, s_n], \quad n = \overline{0, m-1}.$$

Целевое множество для игры (3.3) будем считать прежним - выпуклый многоугольник M_c .

Обозначим через $\mathcal{W}_c^*(t)$ сечение множества позиционного поглощения для игры (3.3). При любом $t \in [\tilde{t}, \vartheta]$ множество $\mathcal{W}_c^*(t)$ есть выпуклый, замкнутый, ограниченный многоугольник. Для $t = s_n$, $n = \overline{1, m}$, его опорная функция

$$g_n(l) = \max_{y \in \mathcal{W}_c^*(s_n)} l'y, \quad l \in \mathbb{R}^2,$$

представляет из себя /8, 10/ выпуклую оболочку функции

$$\begin{aligned} \eta_n(l) &= g_{n-1}(l) + \delta \max_{p \in -P_{n-1}} l'p - \delta \max_{q \in Q_{n-1}} l'q = \\ &= \max_{y \in \mathcal{W}_c^*(s_{n-1})} l'y + \delta \max_{p \in -P_{n-1}} l'p - \delta \max_{q \in Q_{n-1}} l'q. \end{aligned}$$

Здесь

$$P_{n-1} = D^*(s_{n-1})P, \quad Q_{n-1} = E^*(s_{n-1})Q.$$

Поскольку $\mathcal{W}_c^*(s_{n-1})$, P_{n-1} , Q_{n-1} — выпуклые многоугольники, то функция η_n — кусочно-линейна. Ее выпуклая оболочка может быть получена путем конечного числа итераций. Нахождение выпуклой оболочки и составляет центральную операцию при построении сечений $\mathcal{W}_c^*(s_n)$, $n = \overline{1, m}$. Сечения строятся поэтапным образом: полагаем $\mathcal{W}_c^*(s_0) = M_c$, на основе $\mathcal{W}_c^*(s_0)$ строим $\mathcal{W}_c^*(s_1)$ и т.д. При каждом n множество $\mathcal{W}_c^*(s_n)$ является приближением к множеству $\mathcal{W}_c(s_n)$.

Отметим одно обстоятельство. Множество $\mathcal{W}_c^*(s_n)$ определяется своей опорной функцией g_n , являющейся в свою очередь выпуклой оболочкой функции η_n . Последняя есть разность двух выпуклых функций

$$l \rightarrow \max_{y \in \mathcal{W}_c^*(s_{n-1})} l'y + \delta \max_{p \in -P_{n-1}} l'p,$$

$$l \rightarrow \delta \max_{q \in Q_{n-1}} l' q .$$

Поэтому совокупность $N(\mathcal{W}_c^*(z_n))$ единичных нормалей к множеству $\mathcal{W}_c^*(z_n)$ (т.е. единичных нормалей к ребрам выпуклого многоугольника $\mathcal{W}_c^*(z_n)$) принадлежит совокупности $N(\mathcal{W}_c^*(z_{n-1})) \cup N(P_{n-1})$ единичных нормалей, снятых с многоугольников $\mathcal{W}_c^*(z_{n-1}), P_{n-1}$. Этим объясняется, что число нормалей, а стало быть и вершин выпуклого многоугольника $\mathcal{W}_c^*(z_n)$, может расти с увеличением n .

Опишем рисунки, на которых представлены результаты счета на ЭВМ сечений множеств позиционного поглощения для игры (2.1). Во всех случаях шаг δ поэтапного построения был равен 0.05, а множество M , определенное формулой (1.4), заменялось вписанным в него выпуклым 200-угольником. При такой аппроксимации построенные на ЭВМ множества $\mathcal{W}_c^*(t)$ практически совпадают с идеальными множествами $\mathcal{W}_c(t)$. Поэтому вместо $\mathcal{W}_c^*(t)$ будем писать $\mathcal{W}_c(t)$. Как и ранее, символ τ будет означать обратное время.

На рис. 3.1 - 3.5 параметр κ (в последней строке системы (1.1)) равен 1. На рис. 3.1 приведена общая картина изменения множеств $\mathcal{W}_c(\vartheta - \tau)$ при $c = 1$ в зависимости от τ . Множества $\mathcal{W}_c(\vartheta - \tau)$ показаны для $\tau = 0, 2, 5, 10, 15$. Более подробно множества $\mathcal{W}_c(\vartheta - \tau)$ даны на рис. 3.2, 3.3. На первом из них показано изменение $\mathcal{W}_c(\vartheta - \tau)$ на промежутке $[0, 5]$ обратного времени. На втором охвачен промежуток $[5, 15]$. Напомним, что $\mathcal{W}_c(\vartheta) = M_c$.

На рис. 3.4 (3.5) представлена зависимость множеств

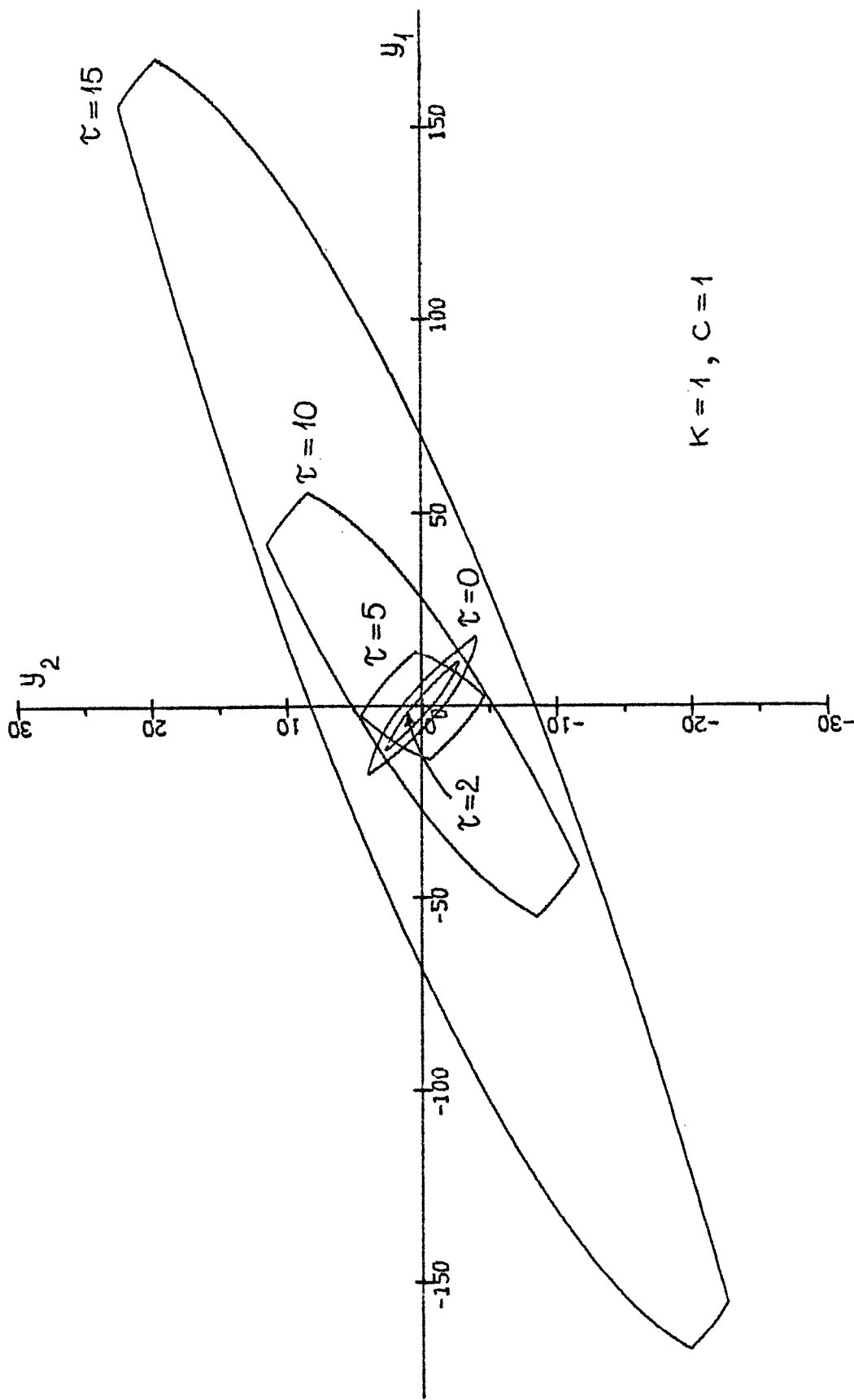


Рис. 3.1

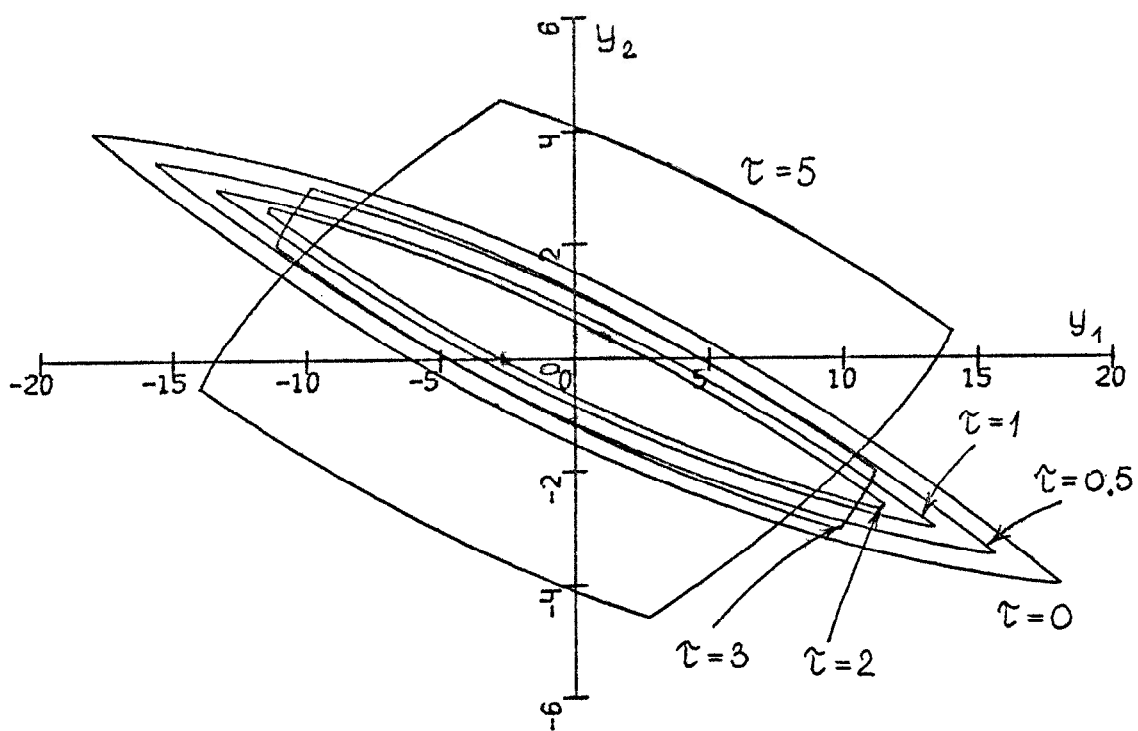


Рис. 3.2

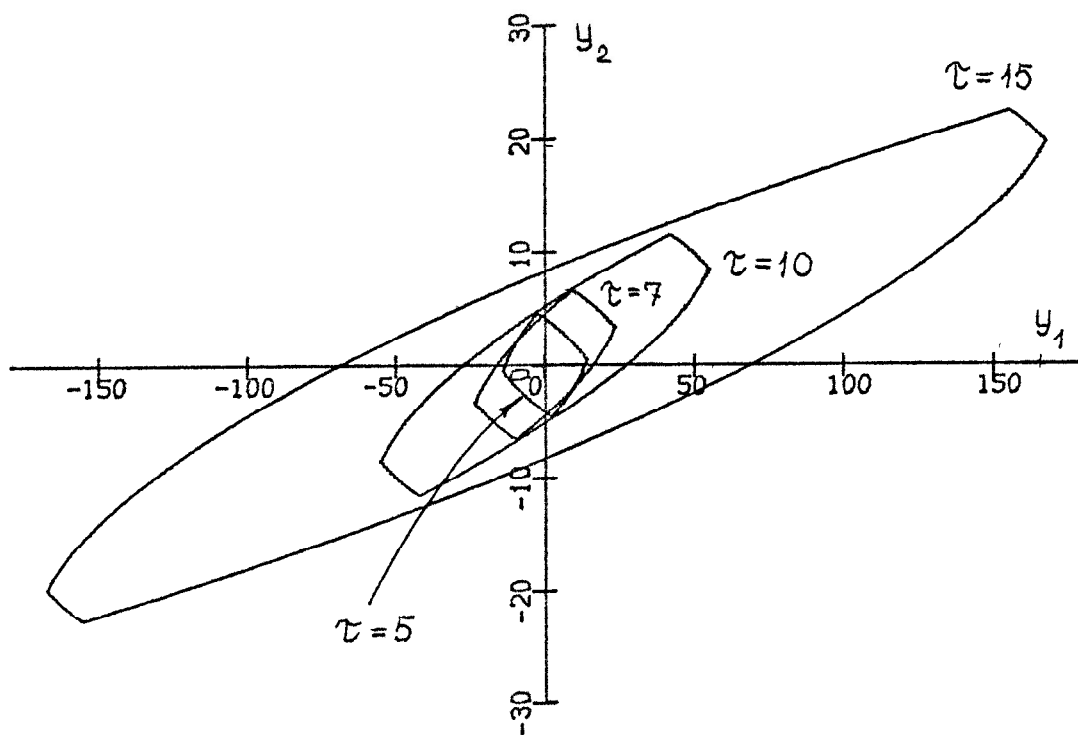


Рис. 3.3

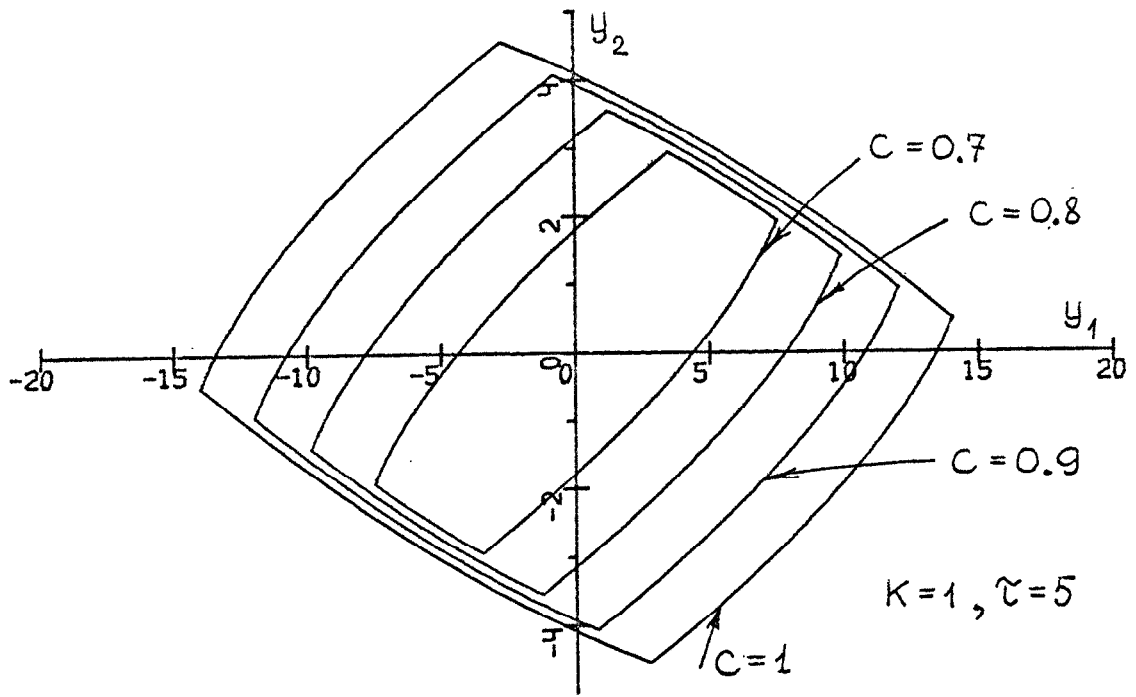


Рис. 3.4

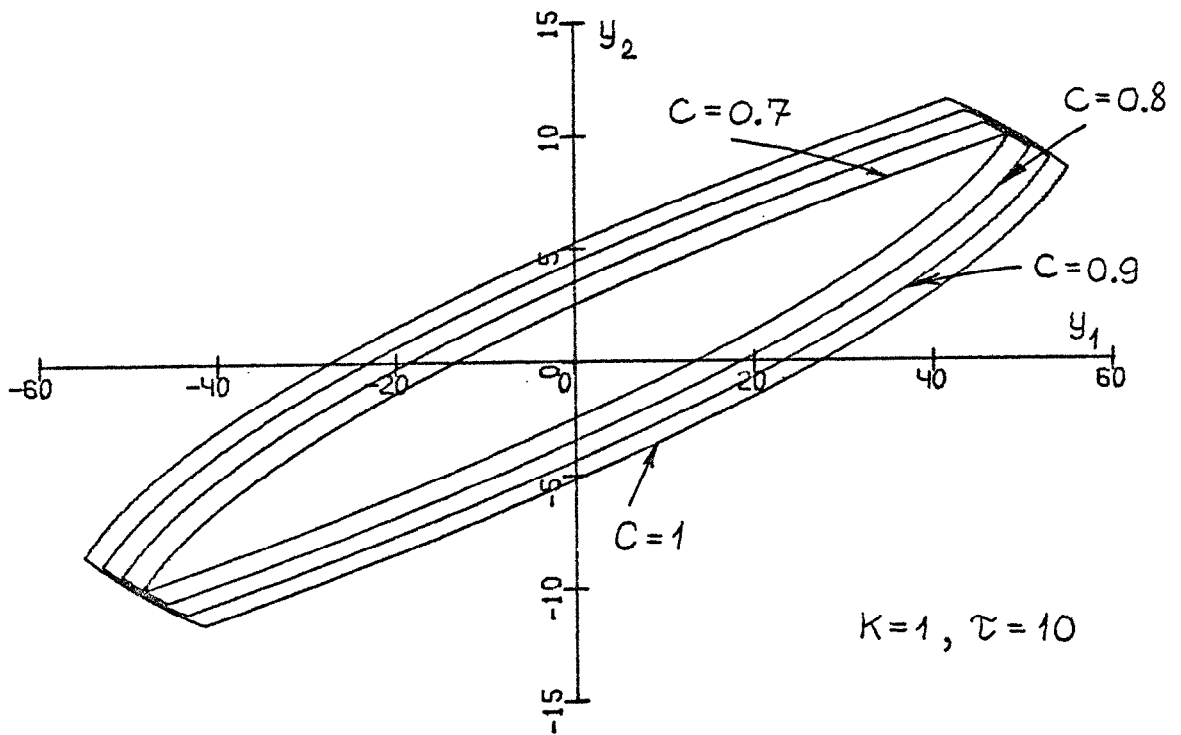


Рис. 3.5

$\mathcal{W}_c(\vartheta - \tau)$ от c при фиксированном $\tau = 5$ ($\tau = 10$). Параметр c принимает значения 0.7, 0.8, 0.9, 1.

Для рис. 3.6 зафиксированы $\tau = 10$, $c = 1$. Представлена зависимость $\mathcal{W}_c(\vartheta - \tau)$ от $\kappa = 0.5, 1, 2, 5, 10$.

Для рис. 3.7 $\kappa = 1$, $c = 1$, $\tau = 10$. Показано, как меняется $\mathcal{W}_c(\vartheta - \tau)$ при замене множества M на множества M_* и M_{**} (см. рис. 1.3, 1.4). Цифрой 1 обозначено множество $\mathcal{W}_c(\vartheta - \tau)$, построенное от M , цифрами 2, 3 - множества $\mathcal{W}_c(\vartheta - \tau)$, построенные соответственно от M_* и M_{**} .

Обозначим символом $c_{кр}$ наименьшее $c \geq 0$, при котором непусто множество $\mathcal{W}_c(\vartheta)$. Величина $c_{кр}$ (критическое значение параметра c) характеризует потенциальные возможности управления на промежутке времени $[0, \vartheta]$: при любом начальном состоянии x_0 в системе (1.5) в момент $t_0 = 0$ (или $y_0 = X_{1,2}(\vartheta, 0)x_0$ в системе (2.1)) первый игрок не может гарантировать попадание точки $(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta)) = y(\vartheta)$ на множество M_c , если $c < c_{кр}$. Другими словами, при любом начальном состоянии x_0 в момент $t_0 = 0$ первый игрок не может гарантировать значение целевой функции меньше $c_{кр}$.

На рис. 3.8 приведены графики зависимости $c_{кр}$ от параметра κ для случая основного множества M (кривая 1) и когда вместо M бралось множество M_{**} (кривая 2). При этом значения $c_{кр}$ были сосчитаны для $\kappa = 0.5, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$.

Нетрудно снять зависимость $c_{кр}$ и от какого-либо другого параметра системы (1.5), например, можно менять какой-либо коэффициент матрицы A . Такие зависимости могут быть полезны при обосновании выбора параметров системы (1.5).

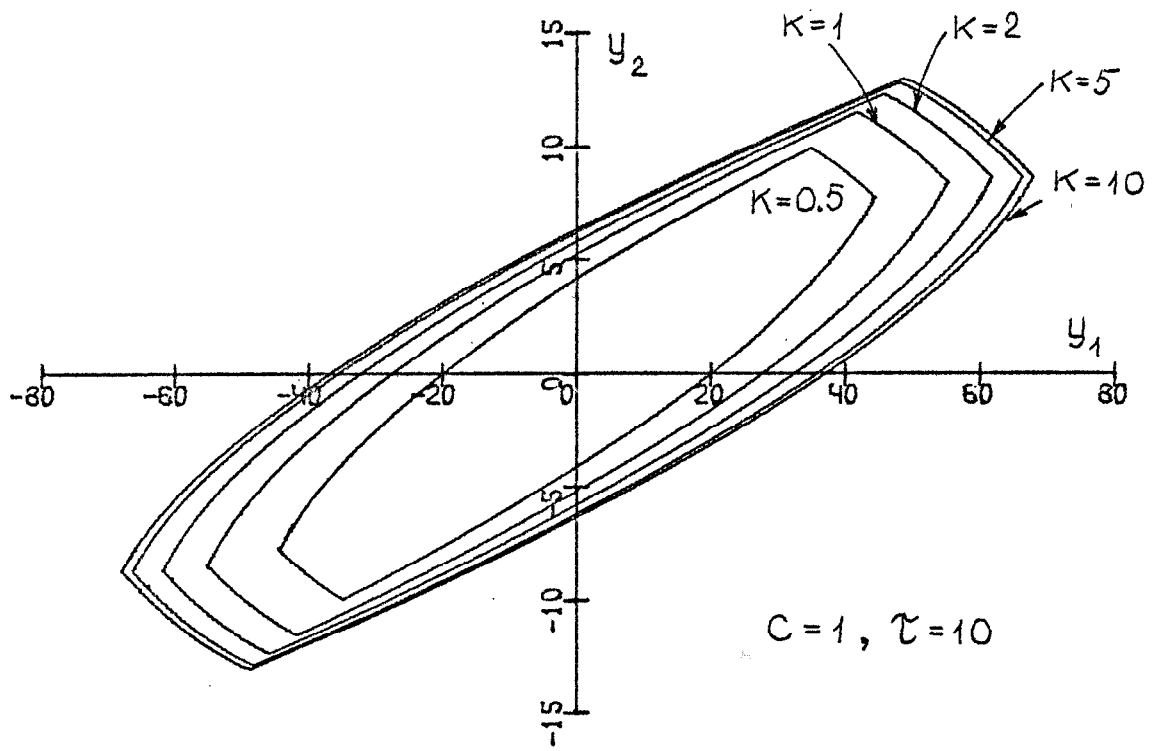


Рис. 3.6

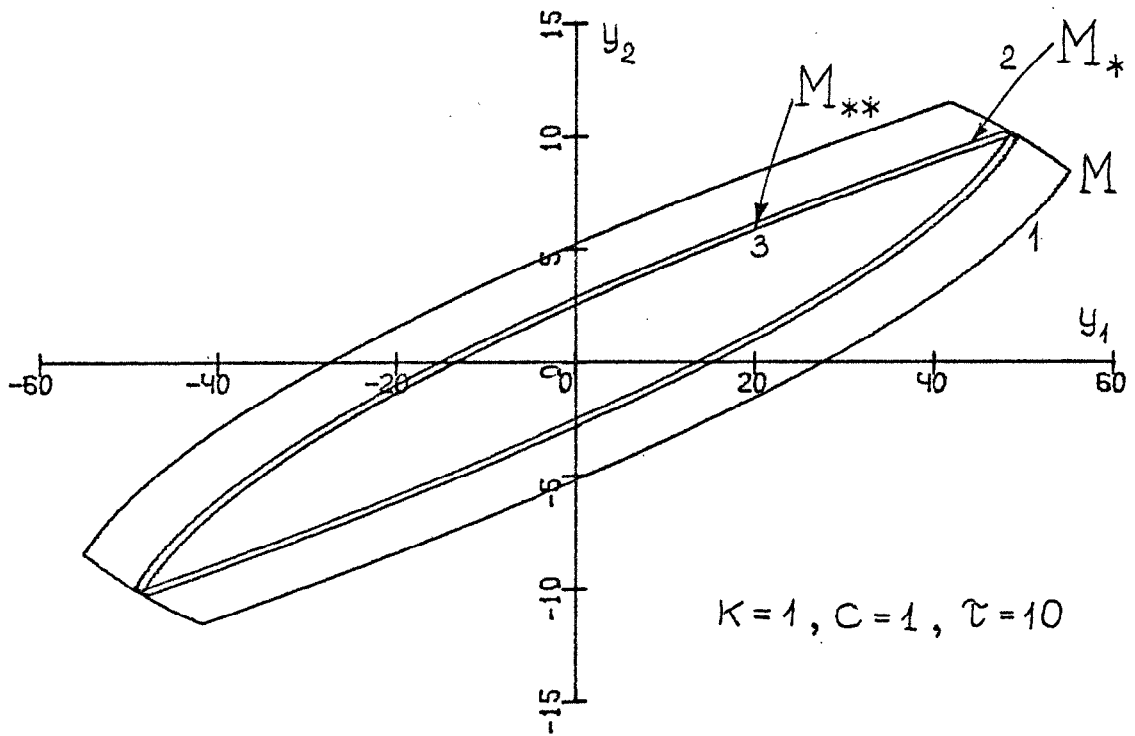


Рис. 3.7

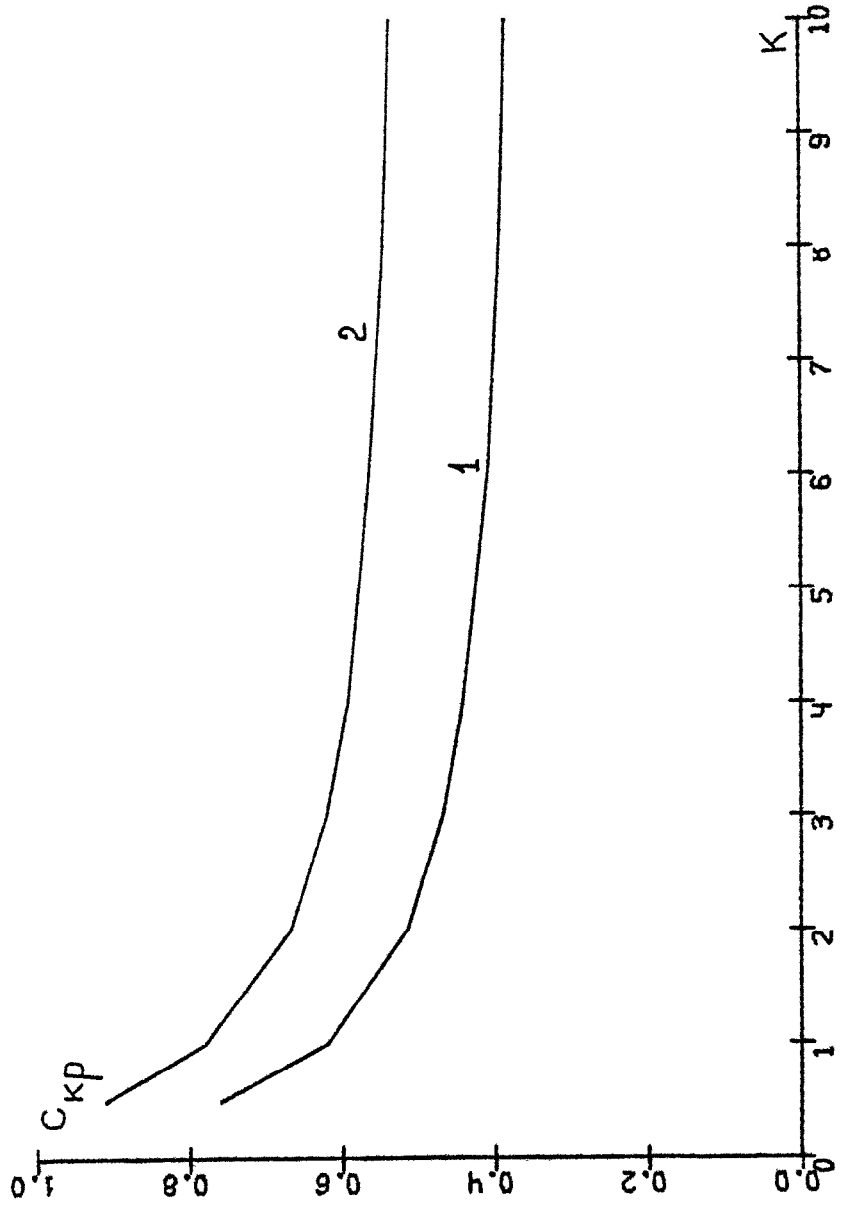


Рис. 3.8

4. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ ПЕРВОГО ИГРОКА

Рассматриваемая нами дифференциальная игра (I.5) есть линейная игра с фиксированным моментом окончания \mathcal{T} и выпуклой целевой функцией. Управляющий параметр первого (минимизирующего) игрока — скаляр. В этих условиях существует /II, I2/ универсальная оптимальная стратегия первого игрока, т.е. стратегия, оптимальная для всех начальных позиций (t_0, x_0) . Стратегия является устойчивой по отношению к погрешностям аппроксимации. Реализовать стратегию можно при помощи некоторой специальной поверхности S , разделяющей трехмерное пространство t, y_1, y_2 эквивалентной игры (2.I) на две части S_+ и S_- . Если в момент t состояние системы (I.5) есть $x(t)$ и точка $(t, y(t))$, где $y(t) = X_{1,2}(\mathcal{T}, t)x(t)$, принадлежит S_+ , то следует взять $U^\circ(t, x(t)) = \mu(t)$. Если $(t, y(t))$ принадлежит S_- , то $U^\circ(t, x(t)) = -\mu(t)$. В случае $(t, y(t)) \in S$ значение $U^\circ(t, x(t))$ можно брать произвольным из отрезка $[-\mu(t), \mu(t)]$. Для игры (2.I) универсальная оптимальная стратегия U° имеет вид: $U^\circ(t, y) = 1$, если $(t, y) \in S_+$; $U^\circ(t, y) = -1$, если $(t, y) \in S_-$; $U^\circ(t, y)$ — любое из $[-1, 1]$, если $(t, y) \in S$. Таким образом, поверхность S есть поверхность переключения.

Опишем схематично алгоритм численного построения сечений поверхности переключения. Поскольку реализация во времени стратегии первого игрока происходит в дискретной схеме управления, то сечения поверхности переключения достаточно построить лишь для моментов выбранного в дискретной схеме разби-

ния промежутка времени игры. Условимся, что это разбиение принадлежит разбиению, используемому в поэтапной процедуре построения сечений $\mathcal{W}_c^*(t)$ множеств позиционного поглощения в аппроксимирующей игре вида (3.3). $\dot{y} = D^*(t)u + E^*(t)v$
 $|u| \leq M(t)$

Пусть t - произвольный момент, для которого нужно построить сечение поверхности переключения. Символом c_t обозначим наименьшее $c \geq 0$, при котором $\mathcal{W}_c^*(t) \neq \emptyset$. Выбрав достаточно близкое к c_t число $\bar{c} \geq c_t$, и достаточно большое число $\bar{c} > \bar{c}$, $\bar{c} \geq 1$, зададим на $[\bar{c}, \bar{c}]$ упорядоченный по возрастанию набор чисел $c_1 = \bar{c}$, c_2, \dots , $c_z = \bar{c}$. Для каждого из них построим множество $\mathcal{W}_{c_i}^*(t)$. При любом i множество $\mathcal{W}_{c_i}^*(t)$ - выпуклый многоугольник, причем $\mathcal{W}_{c_{i_1}}^*(t)$ строго вложено в $\mathcal{W}_{c_{i_2}}^*(t)$, если $i_2 > i_1$.

Зафиксировав номер i , будем обходить границу многоугольника $\mathcal{W}_{c_i}^*$ по часовой стрелке. Пусть α_i (соответственно α_i) - вершина, где скалярное произведение вектора $D^*(t)$ на вектор внешней нормали к $\mathcal{W}_{c_i}^*(t)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс). Если смена знака происходит на ребре многоугольника, в качестве точки α_i (соответственно α_i) можно взять любую точку этого ребра.

Перебирая i от 1 до z , получим набор точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_z$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_z$. Соединяя отрезками последовательно точки этих наборов, а также α_1 с α_1 (рис.4.I), получим ломаную линию. Обозначим ее $S^*(t)$. Пусть $\Lambda^*(t)$ - полоса, состоящая из прямых, проходящих через множество $\mathcal{W}_{\bar{c}}^*(t)$ параллельно вектору $D^*(t)$. Ломаная $S^*(t)$ при достаточно хорошей аппроксимации игры (2.I) игрой вида (3.3) и достаточно большом z близка в

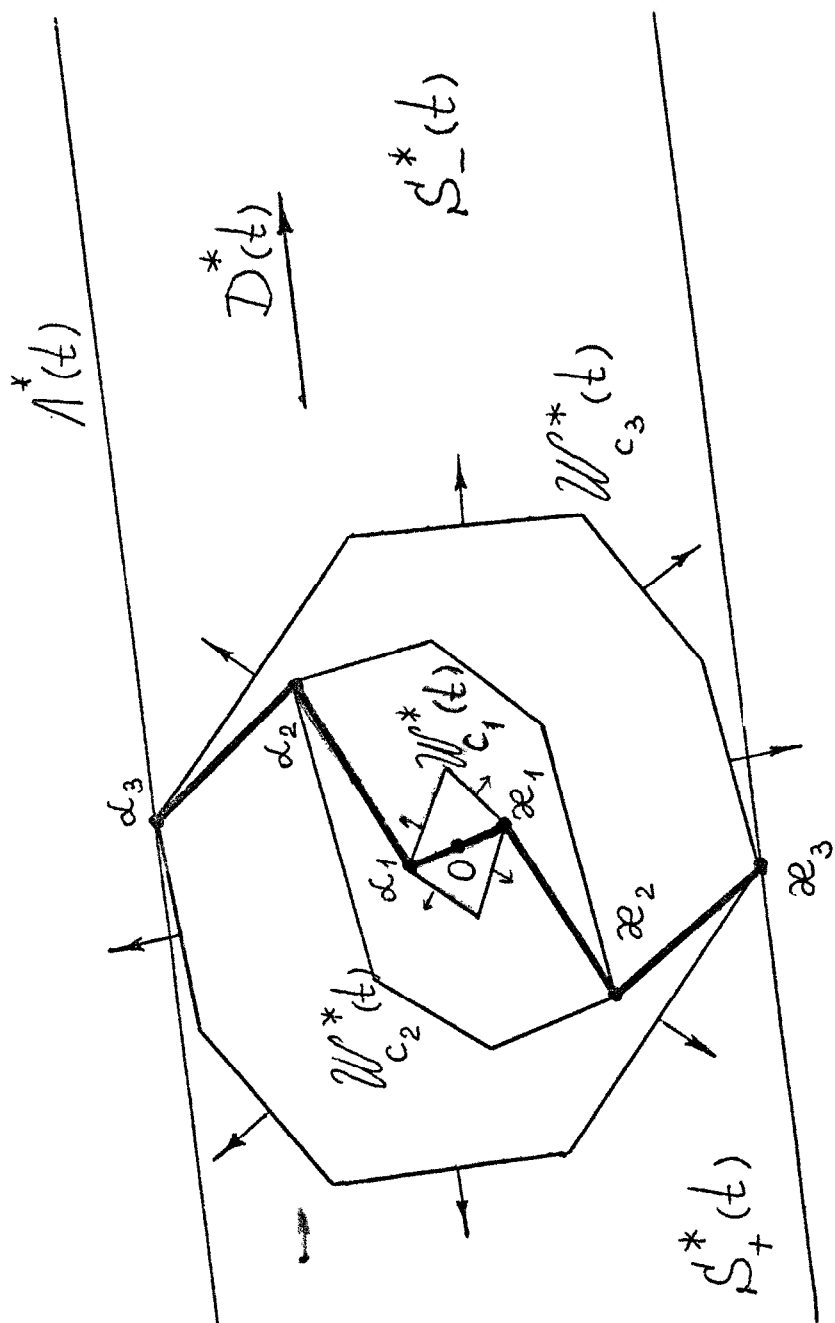


Рис. 4.1

пределах полосы $\Lambda^*(t)$ к линии $S(t)$ – сечению идеальной поверхности переключения для игры (2.1). Ломаная $S^*(t)$ делит полосу $\Lambda^*(t)$ на две части. Ту, куда направлен вектор $D^*(t)$, обозначим $S_-^*(t)$, противоположную – через $S_+^*(t)$ (рис. 4.1). Если точка $y(t)$ попадает в $S_+^*(t)$, то управление первого игрока в системе (2.1) в момент t следует взять равным 1, если $y(t)$ принадлежит $S_-^*(t)$, то равным -1 . На линии $S^*(t)$ можно брать любое $u \in [-1, 1]$.

Размер полосы $\Lambda^*(t)$ зависит от выбора числа \bar{c} . Это число следует выбрать так, чтобы любое движение системы (2.1) из ограниченной области реально возможных начальных позиций находилось в момент t в полосе $\Lambda^*(t)$.

На рис. 4.2 показан качественный характер линий переключения (т.е. сечений поверхности переключения) первого игрока для игры (2.1). Линии симметричны относительно нуля. Каждая имеет две явно выраженные (симметричные друг другу) угловые точки, разделяющие линию на три участка. Графики крайних участков близки к линейным. Символ "минус" на рис. 4.2 означает ту часть плоскости (а точнее полосы $\Lambda^*(\vartheta - \tau)$), где оптимальное управление первого игрока равно -1 , знак "плюс" – часть плоскости, где оно равно 1.

Просчитанные на ЭВМ линии переключения первого игрока при $\kappa = 1$ представлены на рис. 4.3. Показаны лишь верхние части линий. Нижние симметричны. При просчете линий для каждого $\tau = \vartheta - t$ использовалось от 17 до 30 значений параметра c . Наибольшее $c = \bar{c}$ было выбрано равным 1. Наименьшее $c = \underline{c}$ менялось в зависимости от τ . С увеличением τ оно росло от 0.5 до 0.63. Значение c , соответствующее угловой точке графиков, не превышает 0.73 и

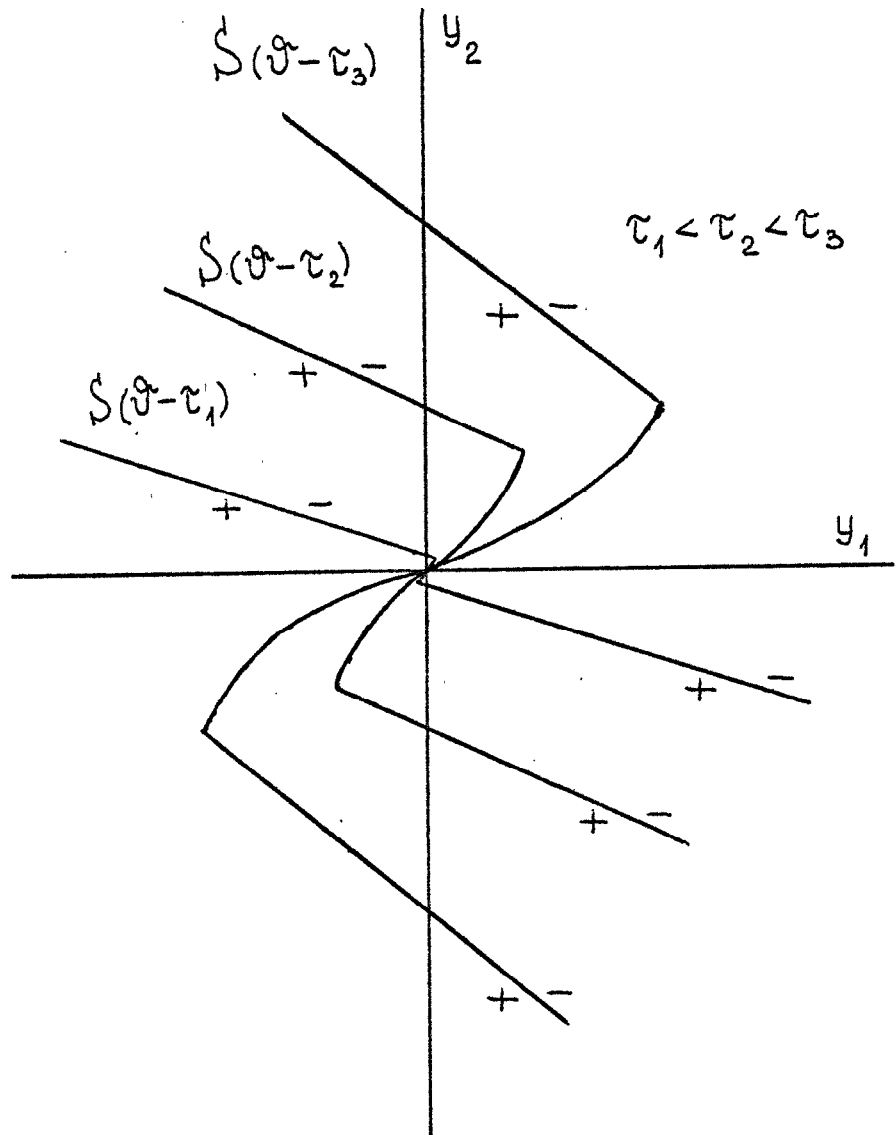


Рис. 4.2

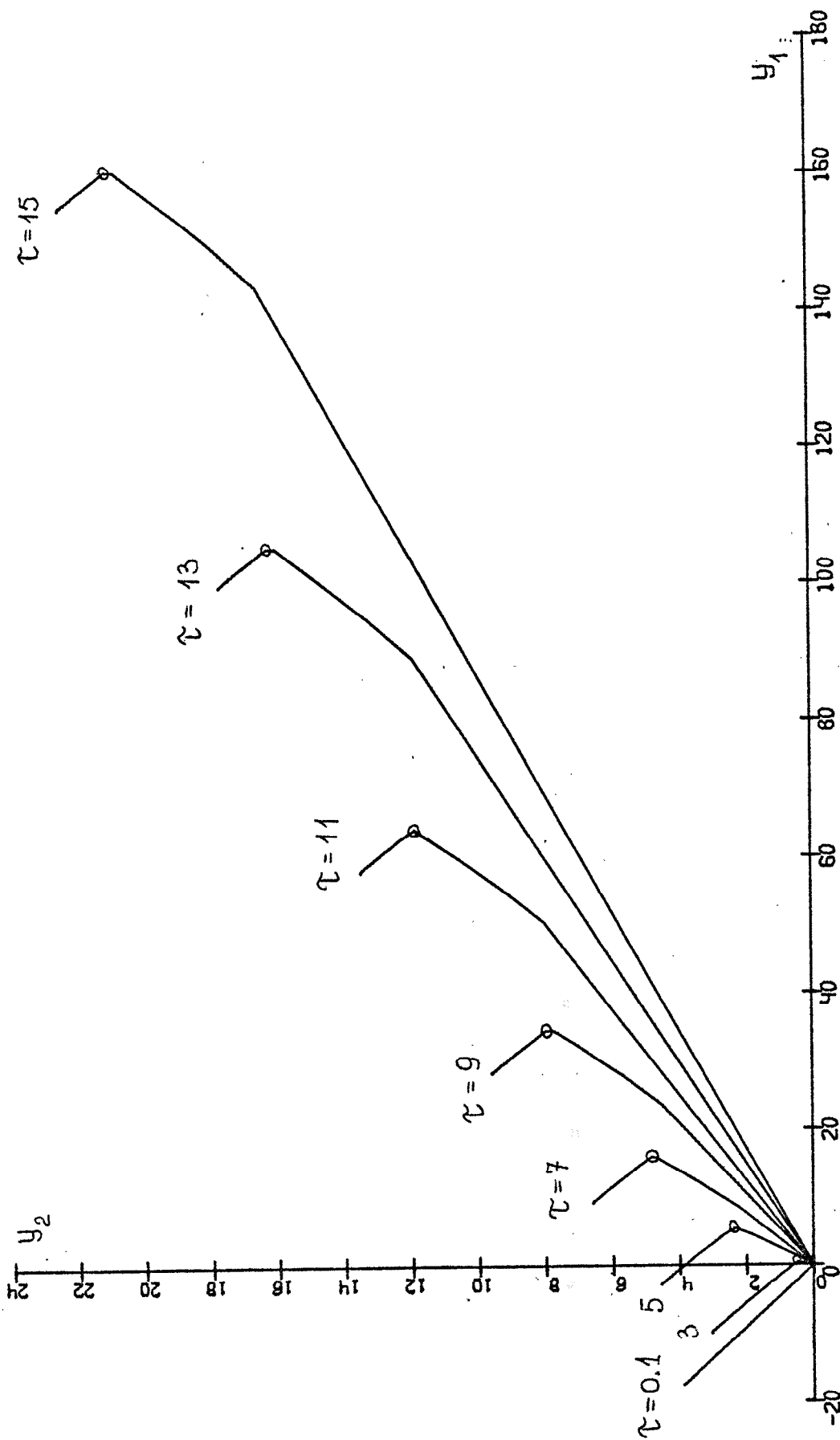


Рис. 4.3

максимально при $\tau = 15$. Угловая точка отмечена на рис. 4.3 кружком. Более подробно линии переключения первого игрока даны на рис. 6.I-6.IO в разделе 6.

5. КОМБИНИРОВАННАЯ СТРАТЕГИЯ ПЕРВОГО ИГРОКА

Из определения в разделе 3 числа $c_{кр}$ следует, что для любой начальной позиции (t_0, x_0) в игре (I.5) при $t_0 = 0$ оптимальная гарантия первого игрока (а она совпадает с ценой игры) не меньше $c_{кр}$. Поэтому, если вне "трубки" $\mathcal{W}_{c_{кр}}$ (т.е. когда $(t, X_{1,2}(\vartheta, t)x(t)) \notin \mathcal{W}_{c_{кр}}$) первый игрок будет применять управление, основанное на описанной в разделе 4 универсальной оптимальной стратегии, а в "трубке" $\mathcal{W}_{c_{кр}}$ будет использовать какой-либо другой способ управления, то его гарантия для любой начальной позиции (t_0, x_0) при $t_0 = 0$ останется равной оптимальной гарантии. Используя этот факт, введем комбинированную стратегию первого игрока.

Обозначим через $G(t)$ круг максимального радиуса, вписанный в $\mathcal{W}_{c_{кр}}(t)$. Пусть $G = \{(t, y) : t \in [0, \vartheta], y \in G(t)\}$. Рассмотрим линейную функцию

$$f(x) = (-0.1x_1 - 1.5x_2 + 5x_4) / 57.3 \quad (5.1)$$

и функцию

$$U_{лин}(t, x) = \begin{cases} \mu(t), & f(x) > \mu(t), \\ f(x), & |f(x)| \leq \mu(t), \\ -\mu(t), & f(x) < -\mu(t). \end{cases} \quad (5.2)$$

Комбинированную стратегию $U_{лин}^{пов}$ первого игрока для игры (I.5) зададим следующим образом: если позиция (t, x) такова, что $X_{1,2}(\vartheta, t)x \notin G(t)$, положим $U_{лин}^{пов}(t, x) = U^0(t, x)$; если (t, x) удовлетворяет условию $X_{1,2}(\vartheta, t)x \in G(t)$, примем $U_{лин}^{пов}(t, x) = U_{лин}(t, x)$.

На рис. 5.1 схематично показано разбиение пространства t , U_1 , U_2 , используемое при определении стратегии $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}$.

Подобные $U_{\text{лин}}$ законы используются в настоящее время для стабилизации бокового отклонения на этапе посадки / 2, 3 /. В комбинированной стратегии $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}$ управление $U_{\text{лин}}$ применяется не для всех позиций (t, x) , а лишь для тех, что после преобразования при помощи матрицы $X_{1,2}(\mathcal{T}, t)$ попадают в "трубку" G . Таким образом, в "трубке" G действует плавный линейный способ управления, а вне "трубки" - жесткий игровой способ, основанный на поверхности переключения.

Комбинированная стратегия $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}$ гарантирует первому игроку для любого начального состояния x_0 в момент $t_0 = 0$ результат, равный оптимальному, т.е. цену игры. Если $t_0 > 0$, то такое свойство верно для x_0 , удовлетворяющих условию $X_{1,2}(\mathcal{T}, t_0)x_0 \notin \mathcal{W}_{c_{\text{кр}}}(t_0)$. При $x_0 \in \mathcal{W}_{c_{\text{кр}}}(t_0)$ стратегия $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}$ гарантирует в момент \mathcal{T} значение целевой функции, не превышающее числа $c_{\text{кр}}$.

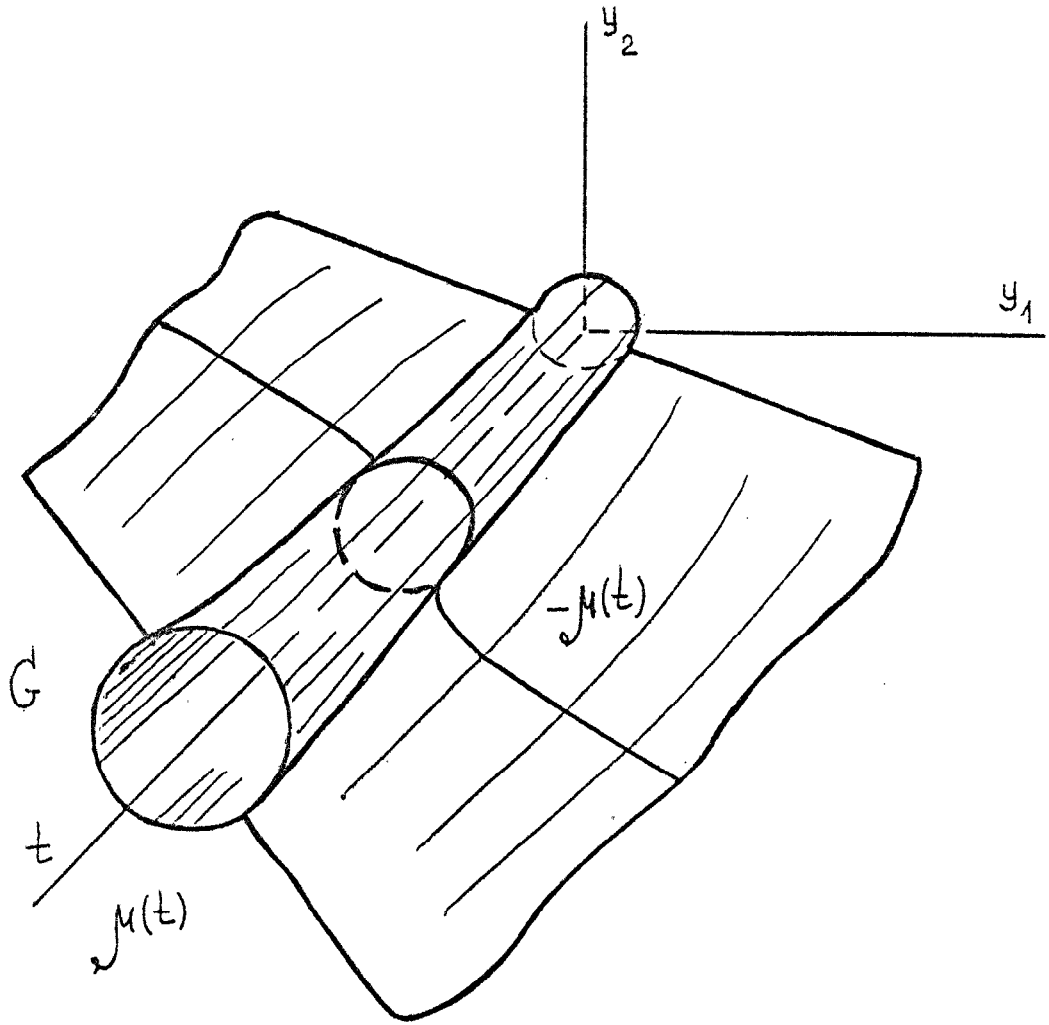


Рис. 5.1

6. КВАЗИОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ ВТОРОГО ИГРОКА

Управляющий параметр второго игрока в системе (I.5), как и управляющий параметр первого, является скалярным. Аналогично поверхности переключения первого игрока, описанной в разделе 4, можно численно построить поверхность переключения для второго игрока. Следует лишь вместо вектора $D^*(t)$ из аппроксимирующей игры вида (3.3) использовать вектор $E^*(t)$. Аналогично универсальной стратегии U^0 можно определить и стратегию второго игрока, связанную с поверхностью переключения. Однако такая стратегия не будет, вообще говоря, оптимальной: при произвольном поведении второго игрока на поверхности переключения первый так может подобрать свое управление, чтобы вести точку $(t, y(t)) = (t, X_{1,2}(\vartheta, t) \propto(t))$ по поверхности и добиться при этом уменьшения цены игры вдоль движения. Очевидно, что такое "изоэренное" поведение первого игрока вряд ли возможно в реальной ситуации. Мы будем использовать стратегию второго игрока, основанную на поверхности переключения, как практически оптимальную. Обозначим ее $V^{пов}$ и назовем квазиоптимальной. Сечение поверхности переключения второго игрока при фиксированном t будем называть, как и раньше, линией переключения.

Опишем в сравнении с линиями переключения первого игрока характер изменения линий переключения второго игрока. Соответствующие графики, просчитанные на ЭВМ, представлены на рис. 6.I - 6.IO. Для каждой линии переключения показана лишь одна часть, вторая - симметрична. При построении линий использовались значения параметра c , равные 0.5, 0.5I, 0.52,

0.53, 0.54, 0.55, 0.56, 0.57, 0.58, 0.59, 0.6, 0.61, 0.62, 0.63, 0.64, 0.65, 0.66, 0.67, 0.68, 0.7, 0.73, 0.76, 0.79, 0.82, 0.85, 0.88, 0.91, 0.94, 0.97, 1. Минимальное значение параметра c менялось от 0.5 при $\tau = 0.1$ до 0.61 при $\tau = 4.6$. Для $\tau > 4.6$ минимальное значение равно 0.63. Максимальное значение одинаково для всех τ и равно 1.

Зависимость линий переключения второго игрока от времени более сложная, чем у первого игрока. Это связано с наличием "колебательности" в изменении вектора $E(t)$ (см. рис. 2.3).

На промежутке $[0, 3.6]$ обратного времени τ линии переключения первого и второго игроков совпадают (рис. 6.1). Рис. 6.2 соответствует промежутку $[3.6, 4.6]$. На этом промежутке линии второго игрока меняются быстро, происходит отход их от линий первого игрока. На промежутке $[4.6, 8.4]$ линии переключения второго игрока имеют характерную угловую точку (как и линии первого игрока). Значение параметра c , ей соответствующее, равно приблизительно 0.63-0.7. До этой точки линии первого и второго игроков совпадают, при больших c они расходятся в противоположные стороны (рис. 6.3). При $\tau \in [8.4, 9.2]$ происходит быстрое изменение линий второго игрока (рис. 6.4). На промежутке $[9.2, 9.6]$ линии переключения совпадают (рис. 6.5). Дальнейшее (при $\tau \in [9.6, 15]$) изменение линий переключения второго игрока (рис. 6.6-6.10) повторяет в качественном отношении описанное изменение.

Приведем перечень характерных промежутков изменения линий переключения второго игрока:

1. $\tau \in [0, 3.6]$ - совпадение линий первого и второго игроков,

2. [3.6, 4.6] - переход к расхождению,
3. [4.6, 8.4] - расхождение линий переключения,
4. [8.4, 9.2] - переход к совпадению линий,
5. [9.2, 9.6] - совпадение линий,
6. [9.6, 10] - переход к расхождению,
7. [10, 13.3] - расхождение линий,
8. [13.3, 15] - переход к совпадению.

Нестационарными в качественном отношении являются промежутки 2, 4, 6, 8.

Для пояснения выбора знака управления второго игрока при использовании линий переключения служит рис. 6.II, где качественно показаны полные линии переключения, характерные для промежутков I-8. На линиях кружком отмечена одна из двух крайних точек. Если идти от этой точки к нулю, то справа всегда выбирается в системе (2.I) управление $\vartheta = -1$, а слева - управление $\vartheta = 1$. Для системы (I.5) следует брать $\vartheta = -\delta$, если $X_{1,2}(\vartheta, t) \propto(t)$ лежит справа, и $\vartheta = \delta$, если слева.

Отметим, что при практической реализации квазиоптимальной стратегии второго игрока, основанной на линиях переключения, нет необходимости в точном построении линий для $\tau > 7 \div 8$, ибо модуль вектора $E(\vartheta - \tau)$ в правой части (2.I) при таких τ "мал", а значит "мало" и влияние второго игрока на динамику игры.

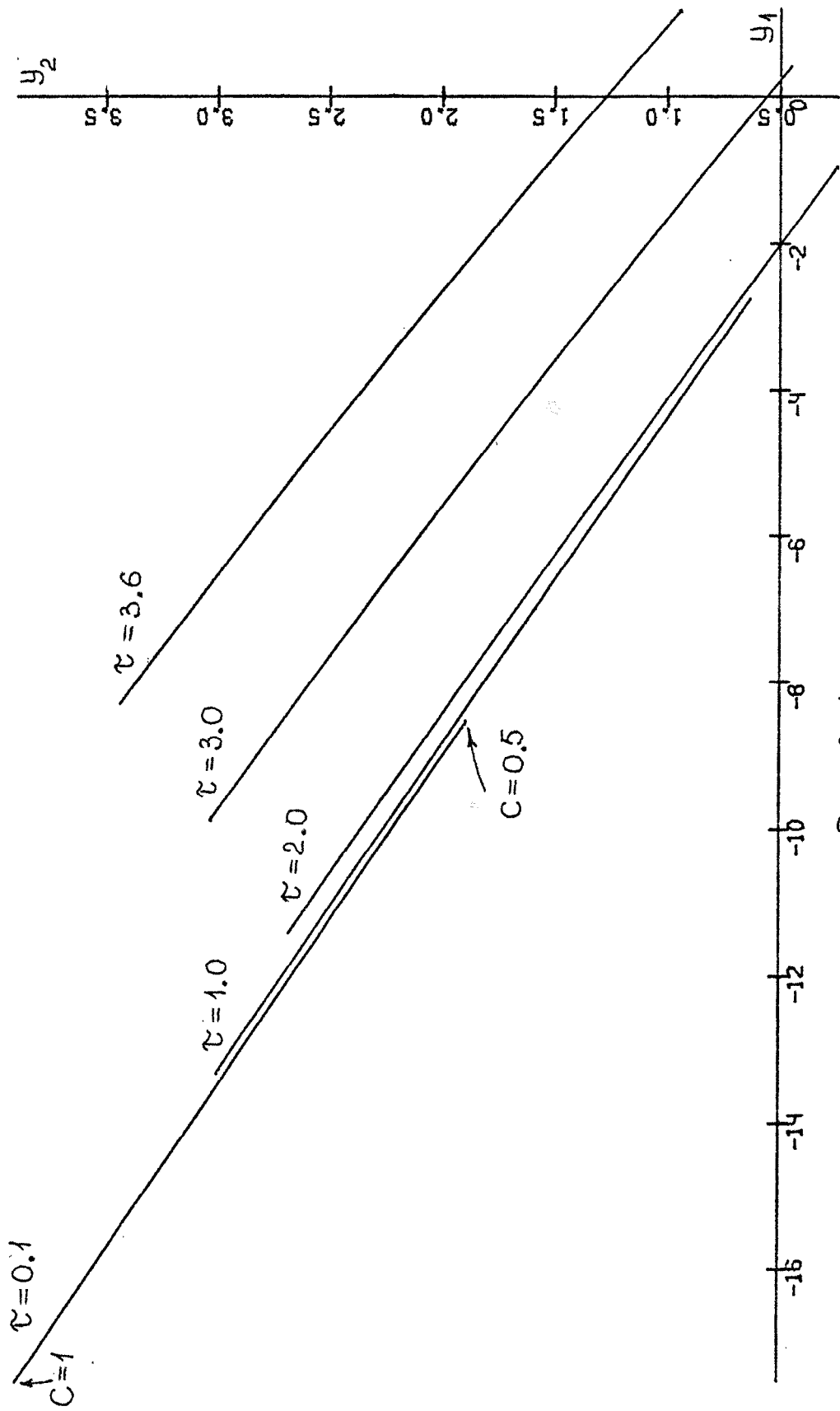


Рис. 6.1

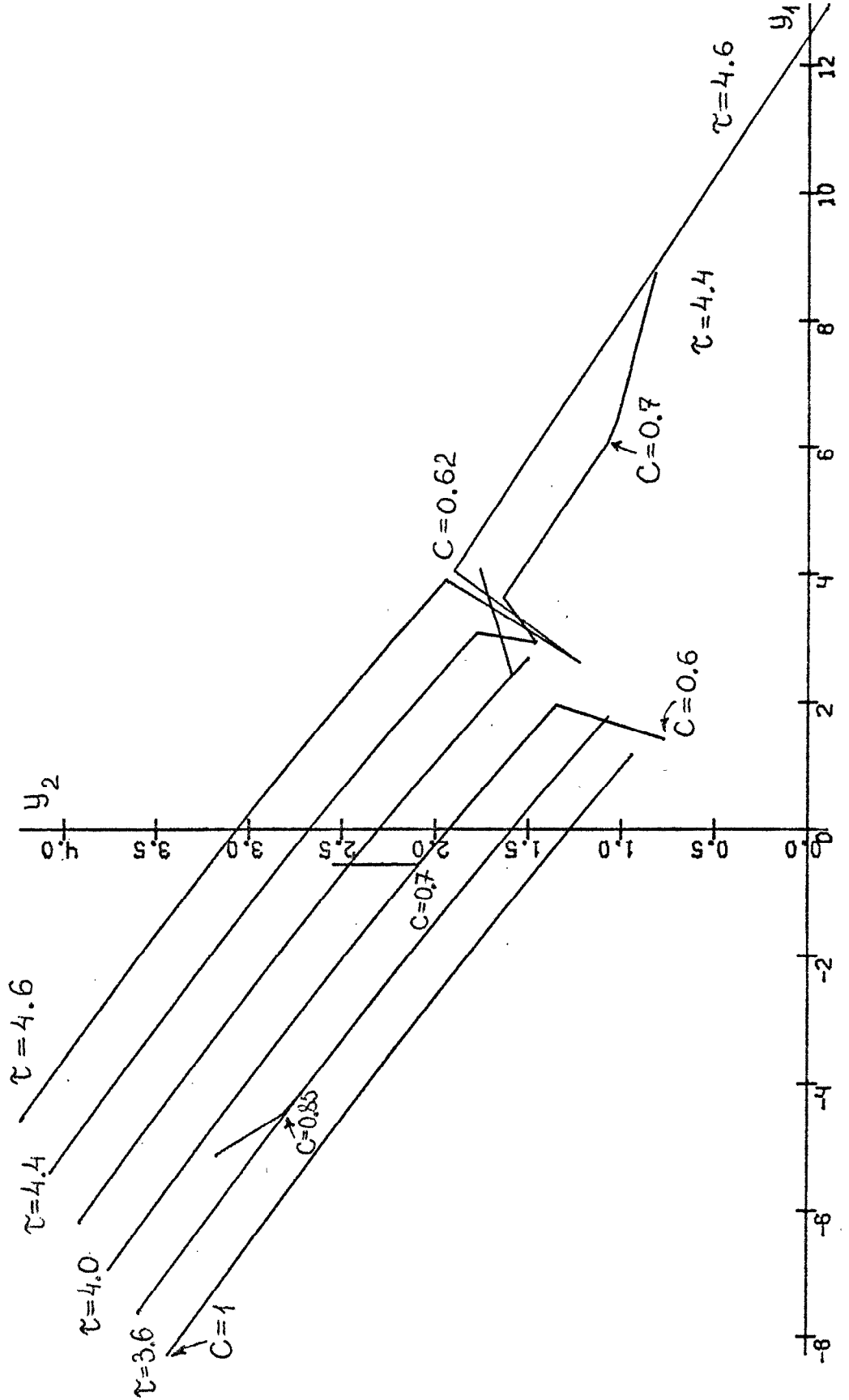


Рис. 6.2

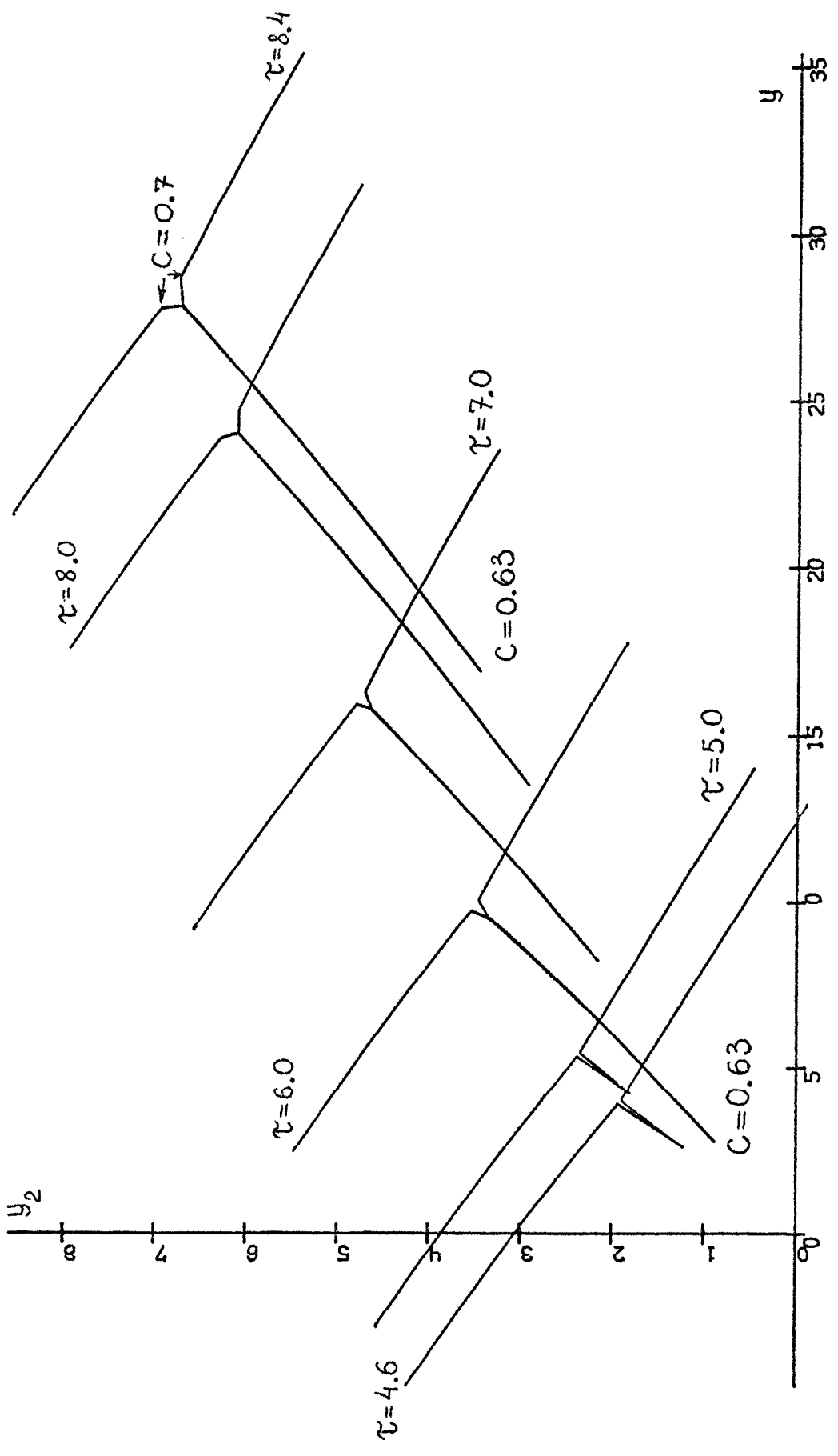


Рис. 6.3

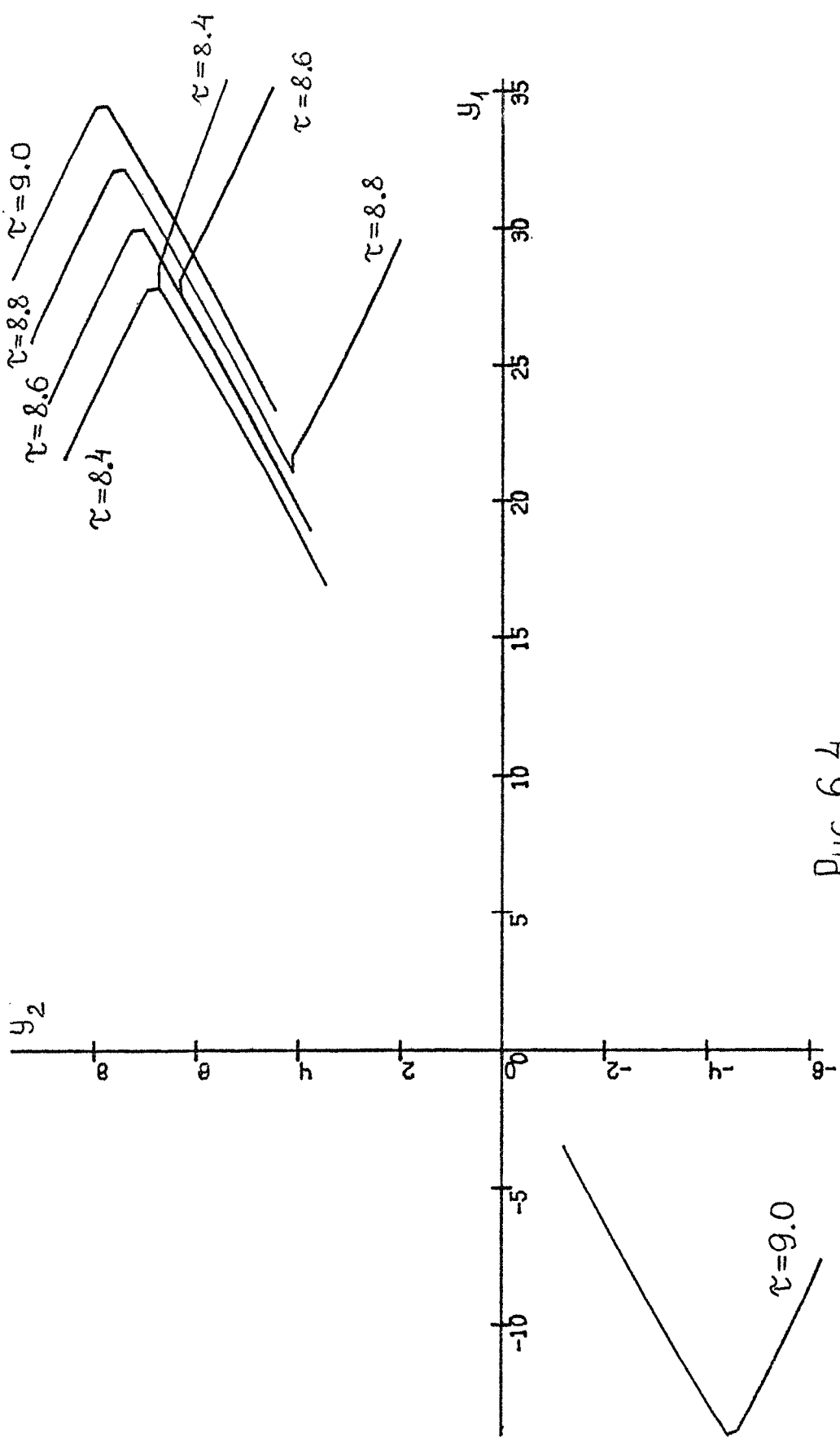


Рис. 6.4

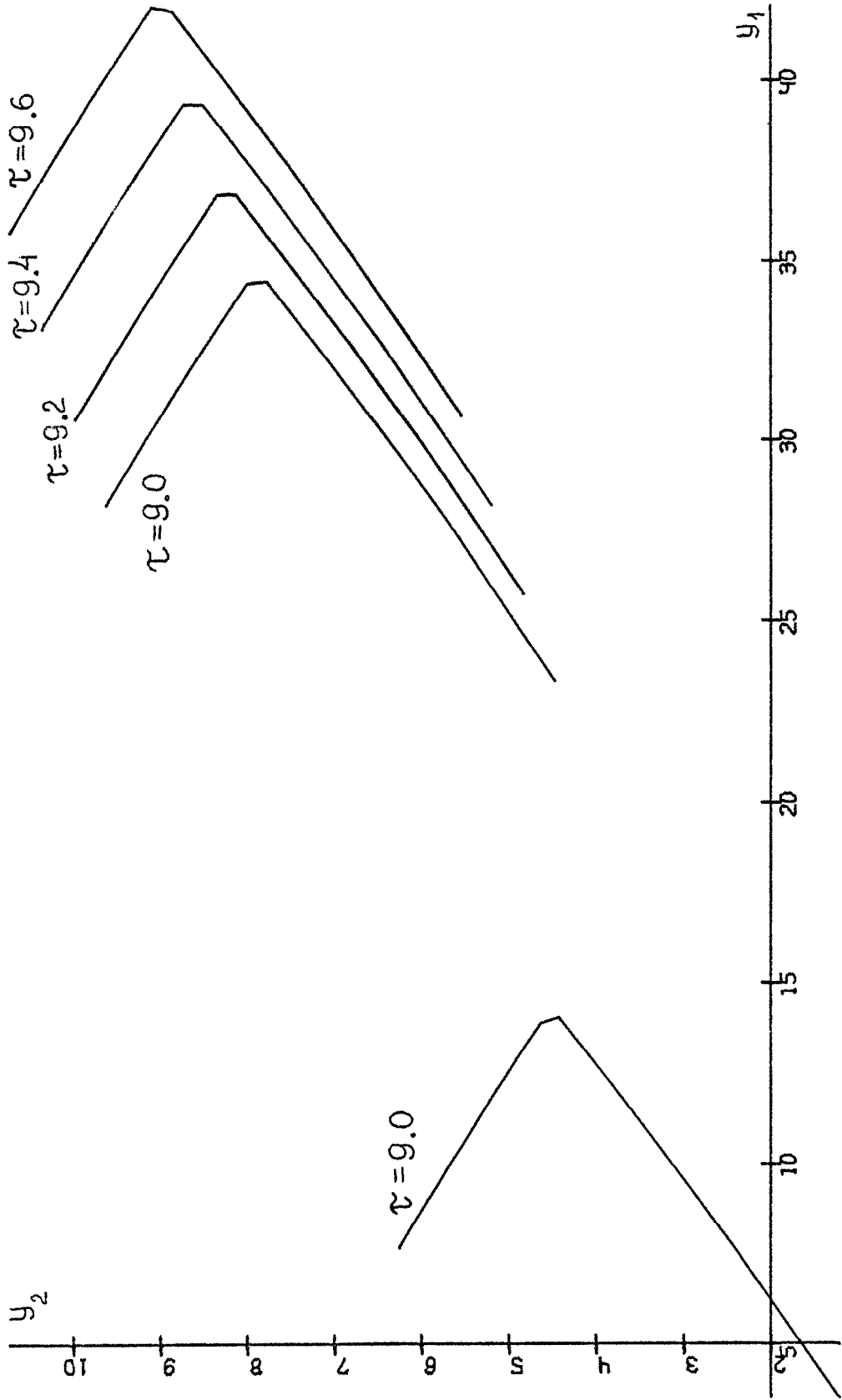


Рис. 6.5

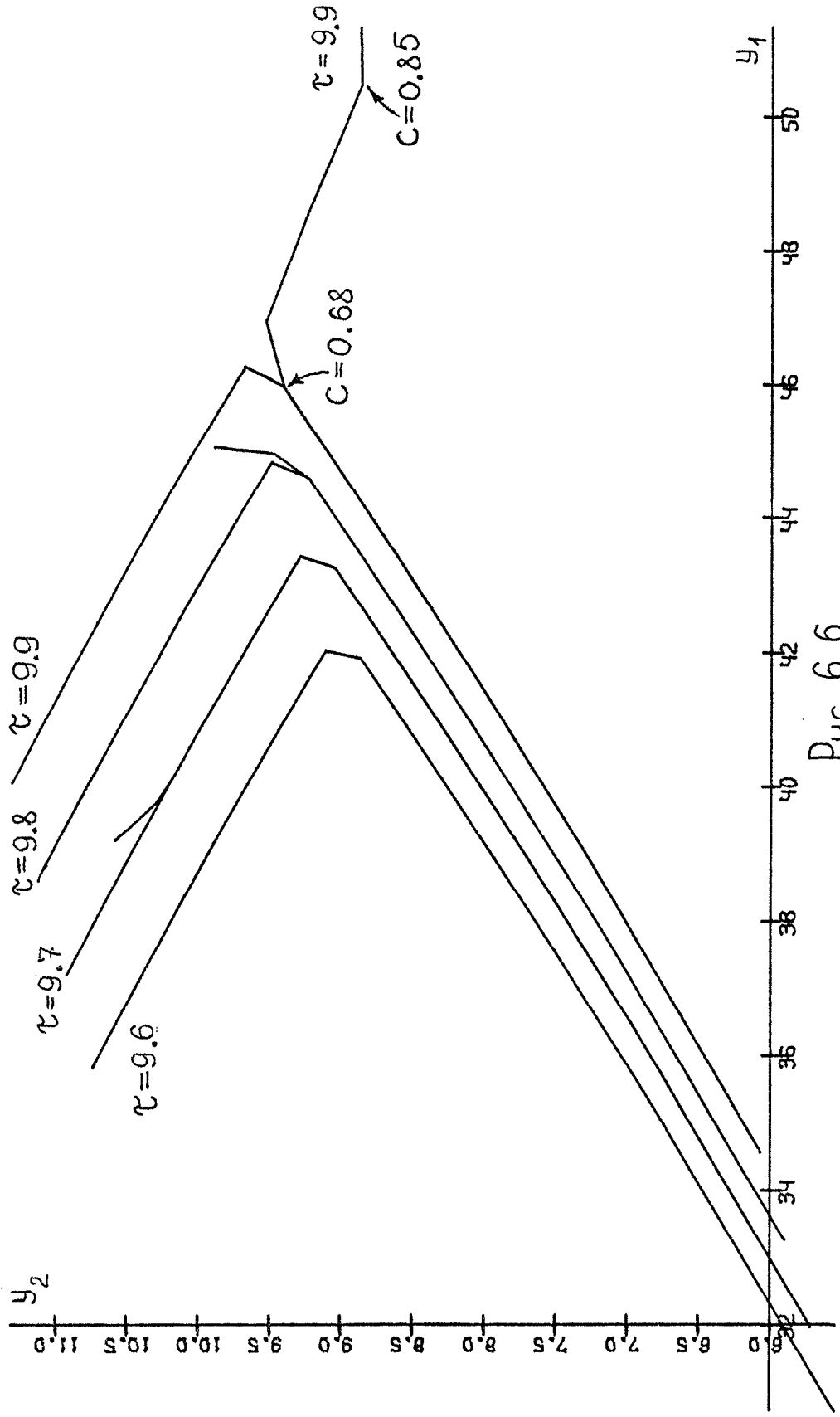


Рис. 6.6

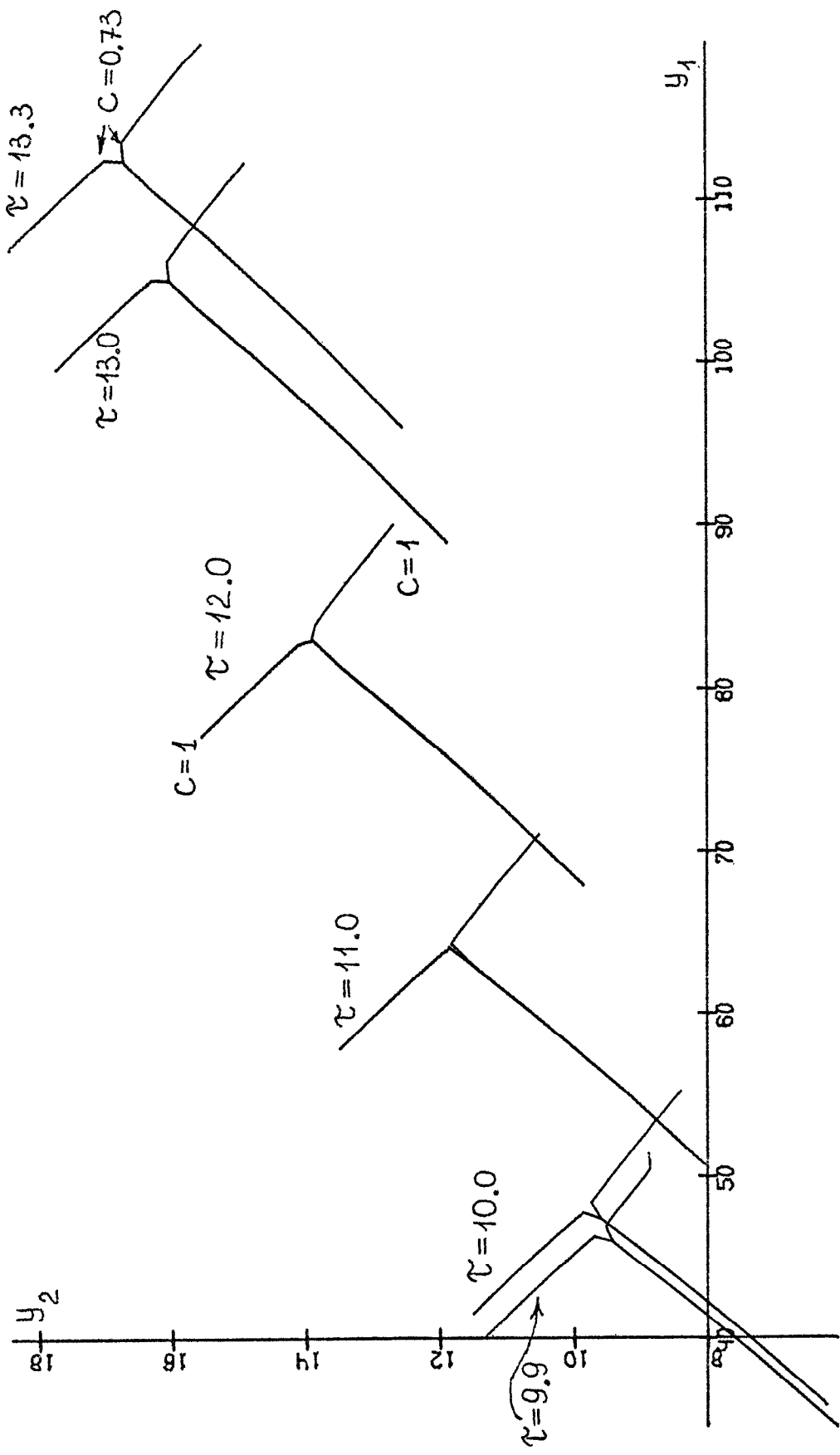


Рис. 6.7

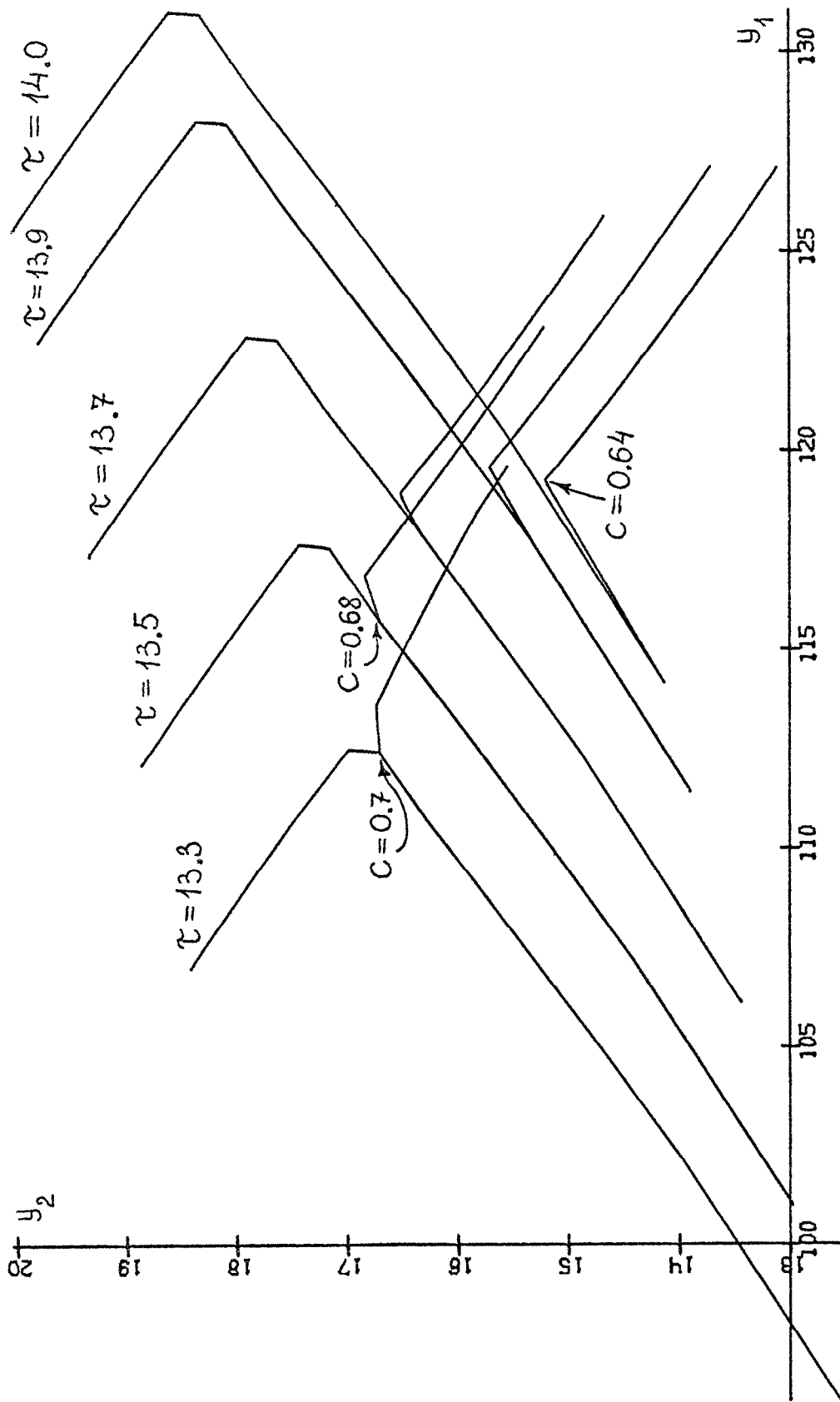


Рис. 6.8

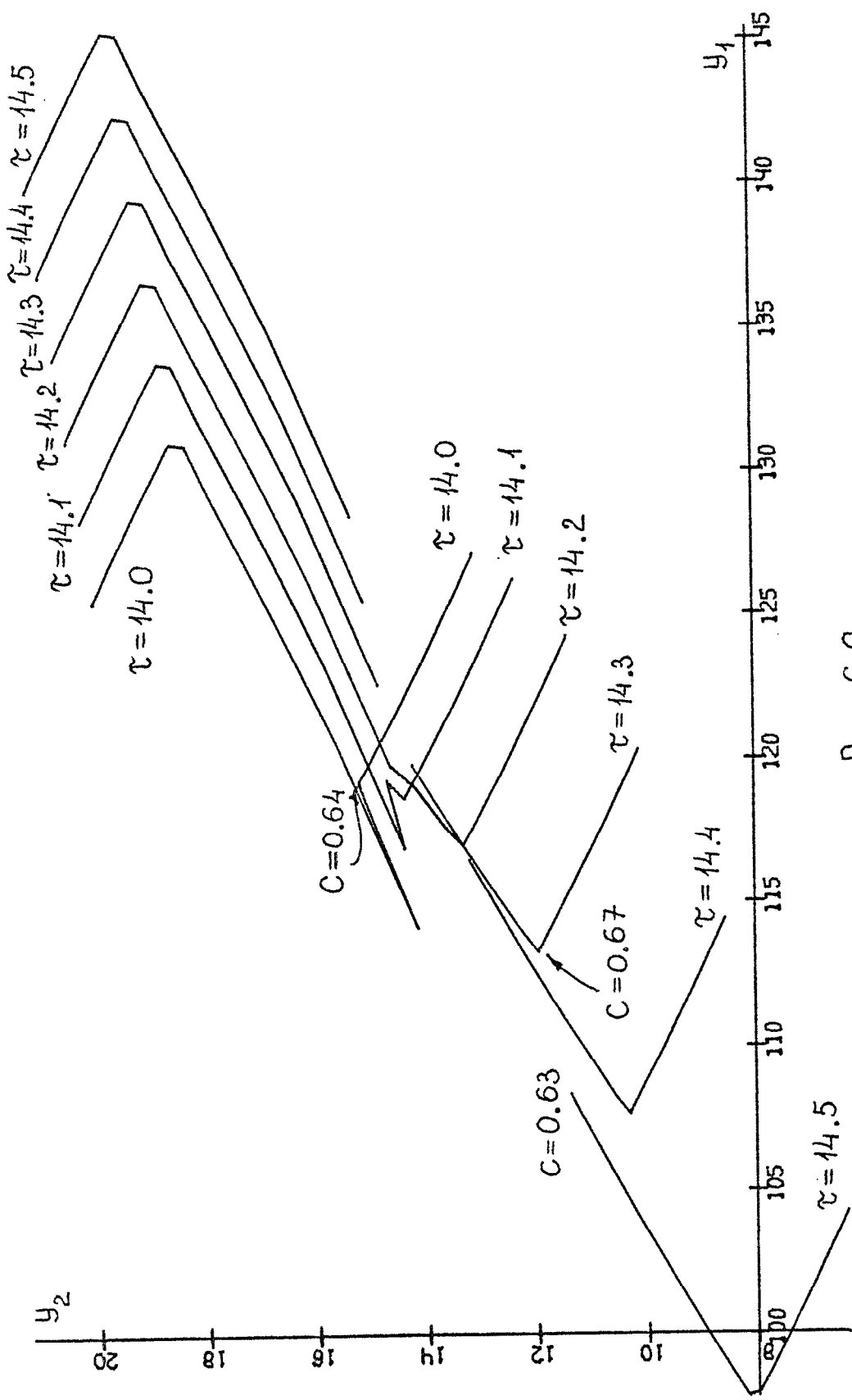


Рис. 6.9

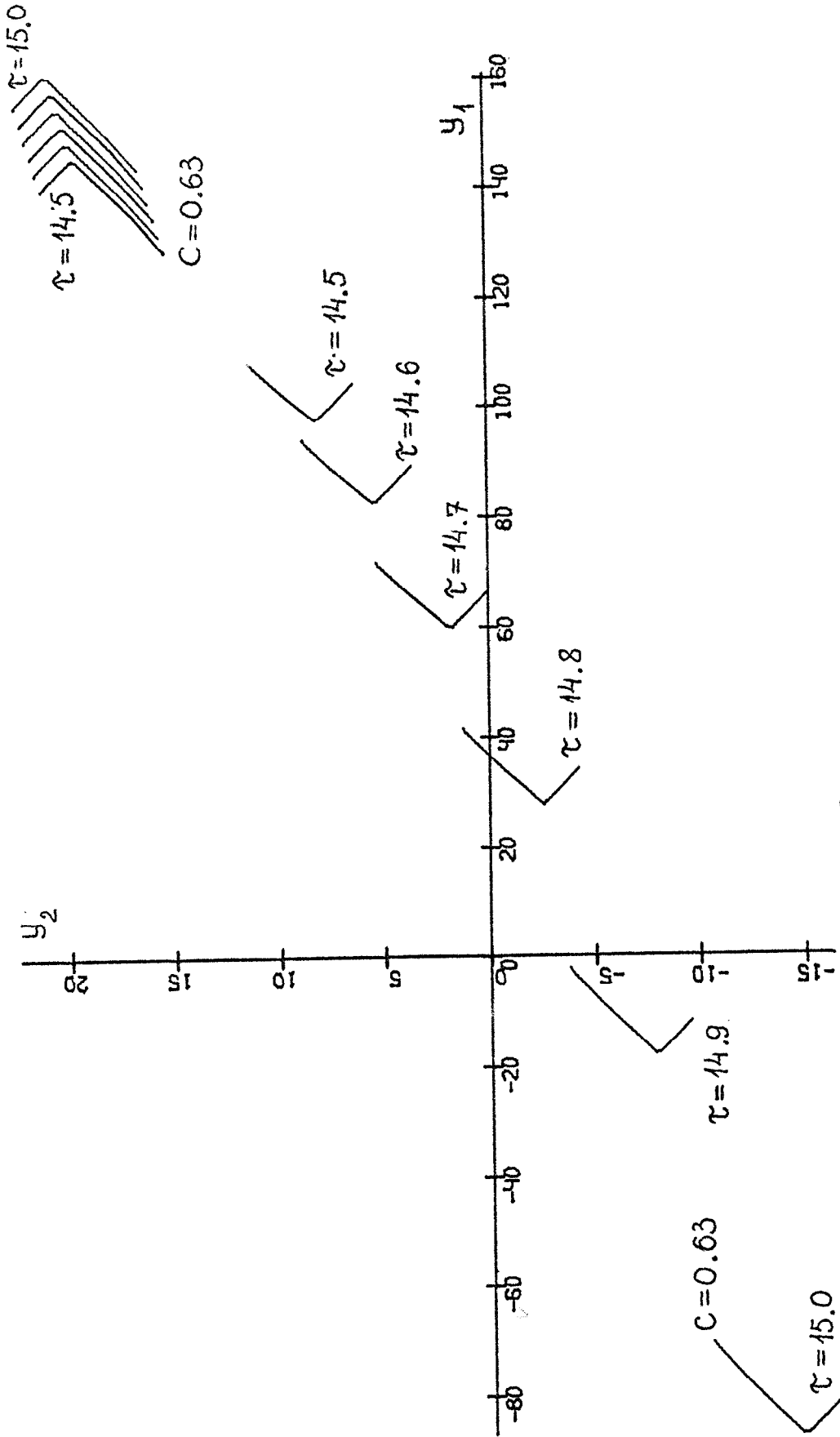


Рис. 6.10

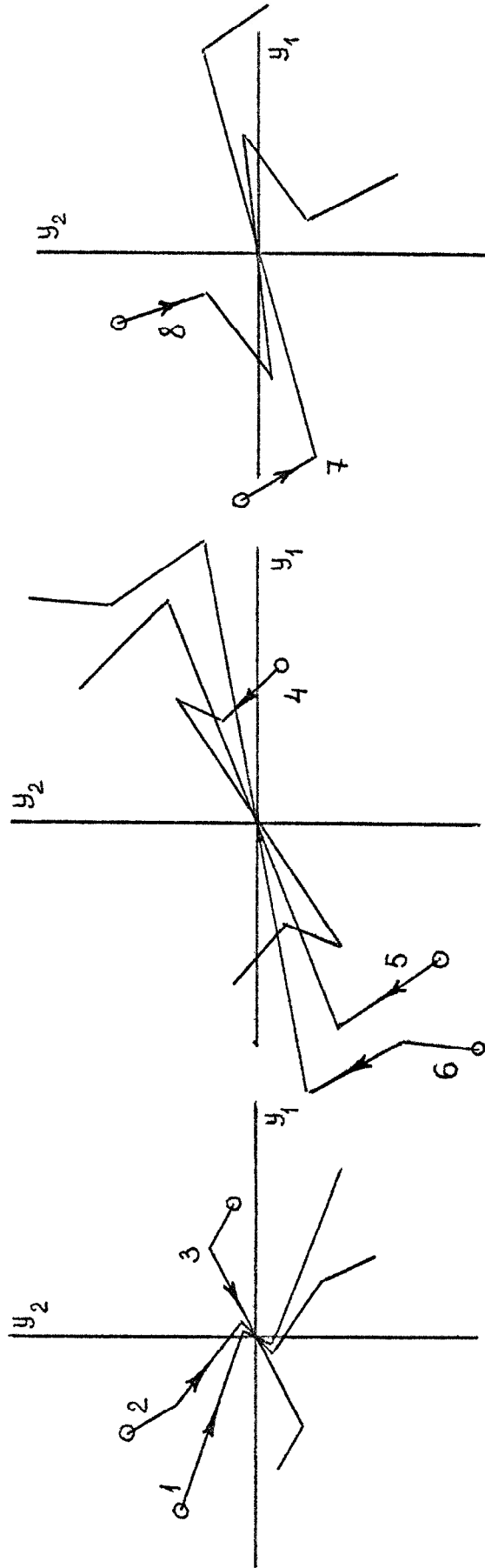


Рис. 6.11

7. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для численного моделирования движений системы (I.5) были выбраны два начальных состояния x_0 в момент $t_0 = 0$. Первое из них (точка a) характеризуется боковым отклонением $z_0 = x_{01} = 50$ м, остальные координаты x_{02}, \dots, x_{07} фазового вектора равны нулю. Второе начальное состояние — точка b с нулевыми координатами. Коэффициент k в правой части (I.5) был взят равным 1.

Для начальной позиции $(0, a)$ цена игры $\Gamma(0, a)$ равна 0.69. Это значение установлено подбором числа c , для которого точка $X_{1,2}(\psi, 0)a$ лежит на границе множества $W_c(0)$. Для начальной позиции $(0, b)$ цена $\Gamma(0, b)$ совпадает с $c_{кр} = 0.62$.

На рис. 7.1 – 7.20 приведены просчитанные на ЭВМ графики изменения по t бокового отклонения $z(t) = x_1(t)$ (в метрах), угла рыскания $\psi(t) = x_3(t)$ и угла крена $\gamma(t) = x_5(t)$ (в градусах), а также реализации управлений $u(t)$ (в градусах) и $v(t)$ (в м/сек) для начальных позиций $(0, a)$, $(0, b)$ при различных способах управления первого и второго игроков. Символ $U_{лин}^{пов}$ означает комбинированную стратегию первого игрока, описанную в разделе 5, символ $U_{лин}$ — стратегию (5.2) первого игрока, основанную на линейной функции (5.1). Квазиоптимальная стратегия второго игрока из раздела 6 обозначена через $V^{пов}$. Запись $v \equiv 0$, $v \equiv \pm 10$ означает постоянное управление второго игрока, равное 0 и соответственно ± 10 . Символ $v_{сл}$ показывает, что управление второго игрока формировалось во времени случайным образом. Функция $v_{сл}$ была кусочно-постоянной

по t с шагом 1 сек, значение функции на каждом промежутке постоянства выбиралось при помощи датчика случайных чисел, реализующего равномерное распределение на отрезке $[-10, 10]$.

При использовании стратегий $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}$ и $V^{\text{пов}}$ применялись линии переключения, построенные по 9 значениям параметра $c : 0.64, 0.70, 0.76, 0.82, 0.88, 0.94, 1, 3, 5$. Шаг Δ дискретных схем управления был равен 0.05. Такой же шаг выбирался при реализации стратегии $U_{\text{лин}}$.

В таблице приведены значения целевой функции $\varphi(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))$, получающиеся в конце игры в момент ϑ . Отметим, что при столкновении стратегии $U_{\text{лин}}$ первого игрока со стратегией $V^{\text{пов}}$ второго значение целевой функции равно 2.20 при $x_0 = a$ и 2.88 при $x_0 = b$. Таким образом, стратегия $U_{\text{лин}}$ не обеспечивает первому игроку попадание точки $(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))$ на множество M даже при "идеальном" начальном состоянии $x_0 = b = 0$ в момент $t_0 = 0$. Рис. 7.21 показывает, как на плоскости x_1, x_2 расположены точки $(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))$ при $x_0 = a$. Кружком отмечены точки, полученные при использовании первым игроком стратегии $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}$, крестиком - стратегии $U_{\text{лин}}$. Номер каждой точки совпадает с номером строки таблицы, в которой указан соответствующий этой точке способ действия второго игрока. Расположение точек $(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))$ при $x_0 = b$ дано на рис. 7.22.

Графики на рис. 7.23, 7.24 характеризуют чувствительность дискретных схем управления игроков, основанных на стратегиях $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}$ и $V^{\text{пов}}$, от величины дискрета Δ . В качестве начальных состояний в момент $t_0 = 0$, помимо точек a и b , выбирались точки $d = (30, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ и $e =$

$= (-20, -1,5, -0.0349, 0, 0, 0, 0)$ (третья координата в рад.).

Зависимость значений $\varphi(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))$ от шага Δ_{ϑ} дискретной схемы второго игрока, основанной на стратегии $V^{\text{пов}}$, представлена на рис. 7.23. За первого игрока применялась универсальная оптимальная стратегия U° с шагом $\Delta_{\mu} = 0.05$ (т.е. первый действовал оптимально с мелким шагом). Каждая из четырех кривых рис. 7.23 соответствует своей начальной точке. Обозначение точки проставлено рядом с кривой.

Аналогичная зависимость значений $\varphi(x_1(\vartheta), x_2(\vartheta))$ от шага Δ_{μ} дискретной схемы первого игрока, основанной на стратегии $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}$, дана на рис. 7.24. Здесь за второго игрока использовалась стратегия $V^{\text{пов}}$ с шагом $\Delta_{\vartheta} = 0.05$.

Эффект неправильного вычисления первым игроком времени, оставшегося до момента окончания игры ϑ , демонстрируется на рис. 7.25. За первого игрока использовалась стратегия $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}$ с шагом $\Delta_{\mu} = 0.05$, однако в каждый момент разбиения дискретной схемы в систему (I.5) подавалось не $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}(t_i, x(t_i))$, а $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}(t_i - \delta_{\mu}, x(t_i))$. При $t_i - \delta_{\mu} \leq 0$ полагалось $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}(t_i - \delta_{\mu}, x(t_i)) = U_{\text{лин}}^{\text{пов}}(0, x(t_i))$, при $t_i - \delta_{\mu} \geq \vartheta$ считалось $U_{\text{лин}}^{\text{пов}}(t_i - \delta_{\mu}, x(t_i)) = U_{\text{лин}}^{\text{пов}}(\vartheta, x(t_i))$. Управление второго игрока вырабатывалось при помощи стратегии $V^{\text{пов}}$ в дискретной схеме с шагом $\Delta_{\vartheta} = 0.05$ (без какой-либо задержки или опережения). Кривые на рис. 7.25 просчитаны для точек a, b, d .

В расчетах, относящихся к рис. 7.23 - 7.25, коэффициент K был равен 1.

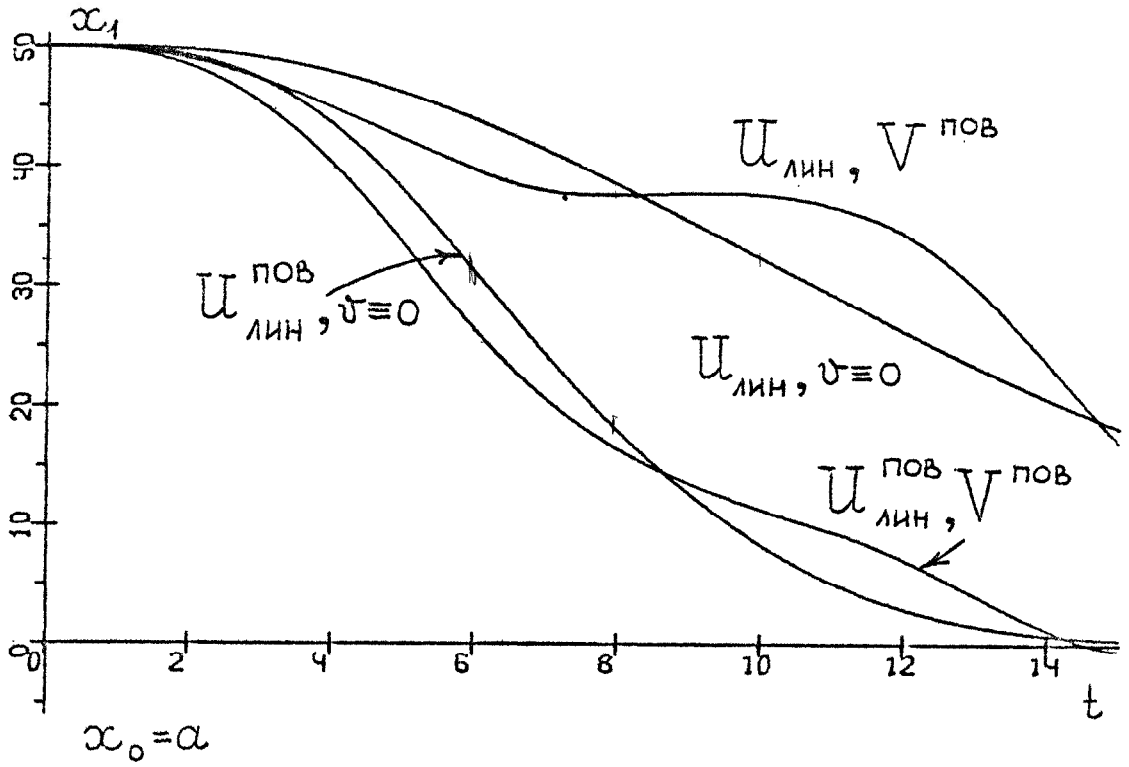


Рис. 7.1

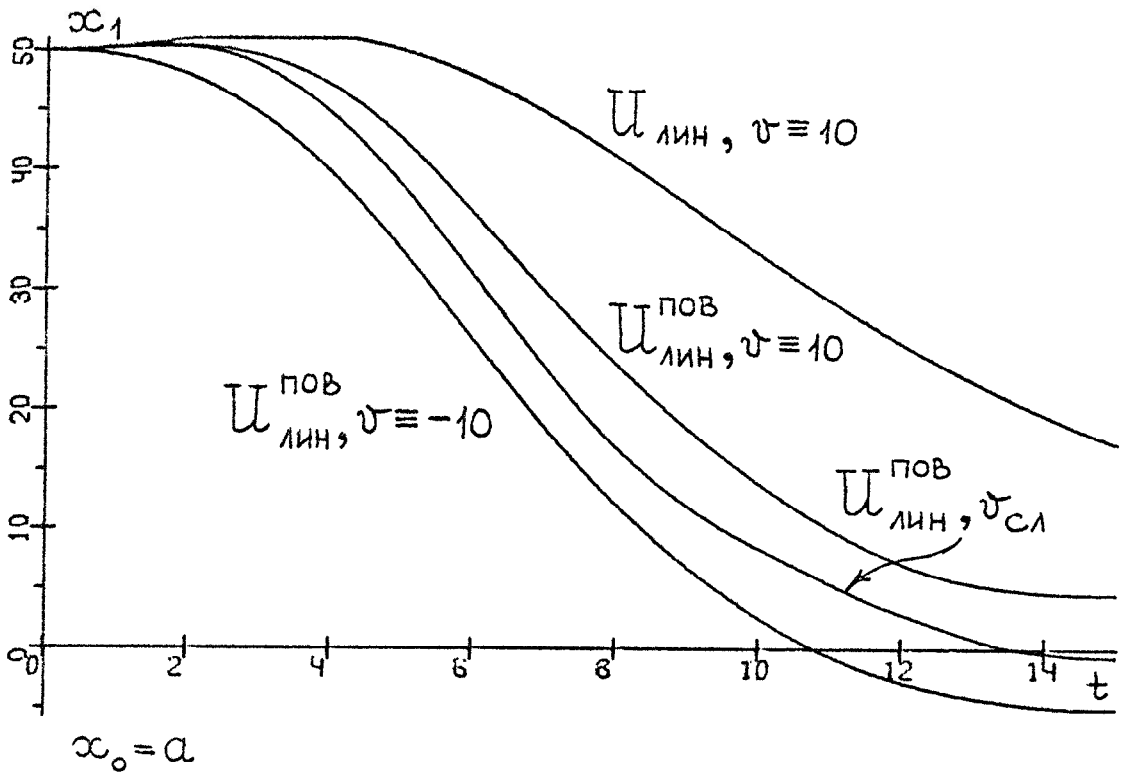


Рис. 7.2

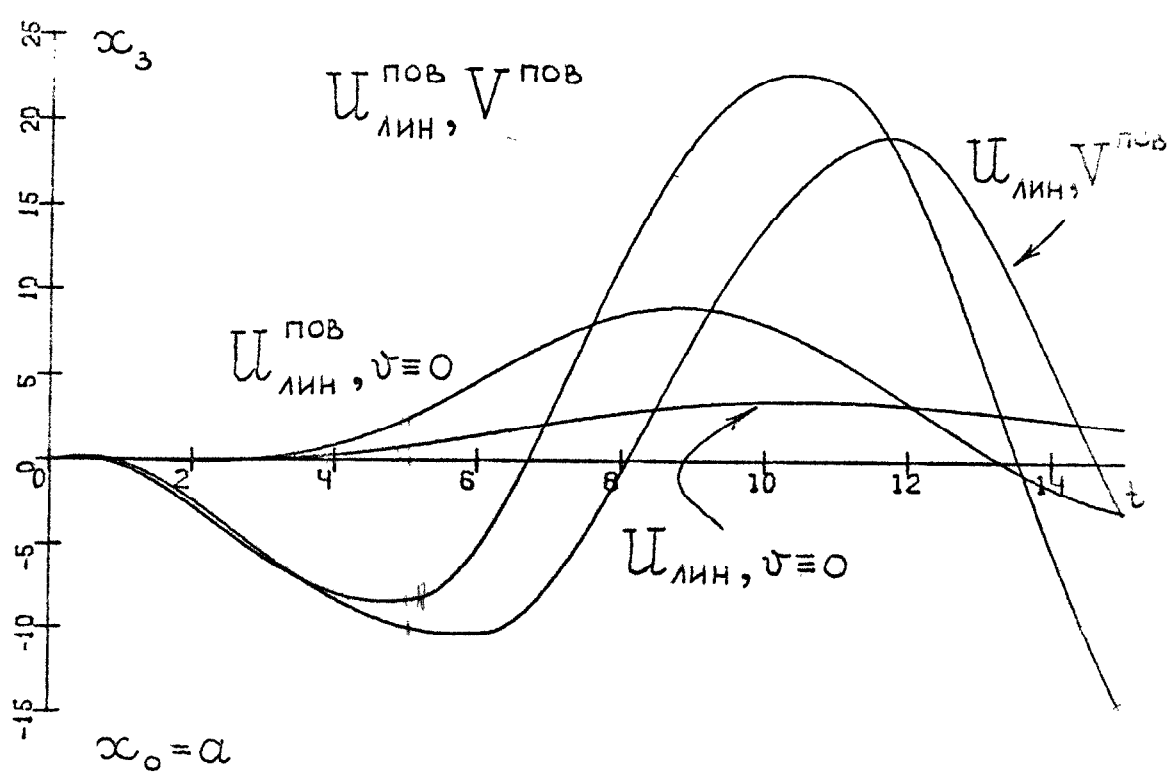


Рис. 7.3

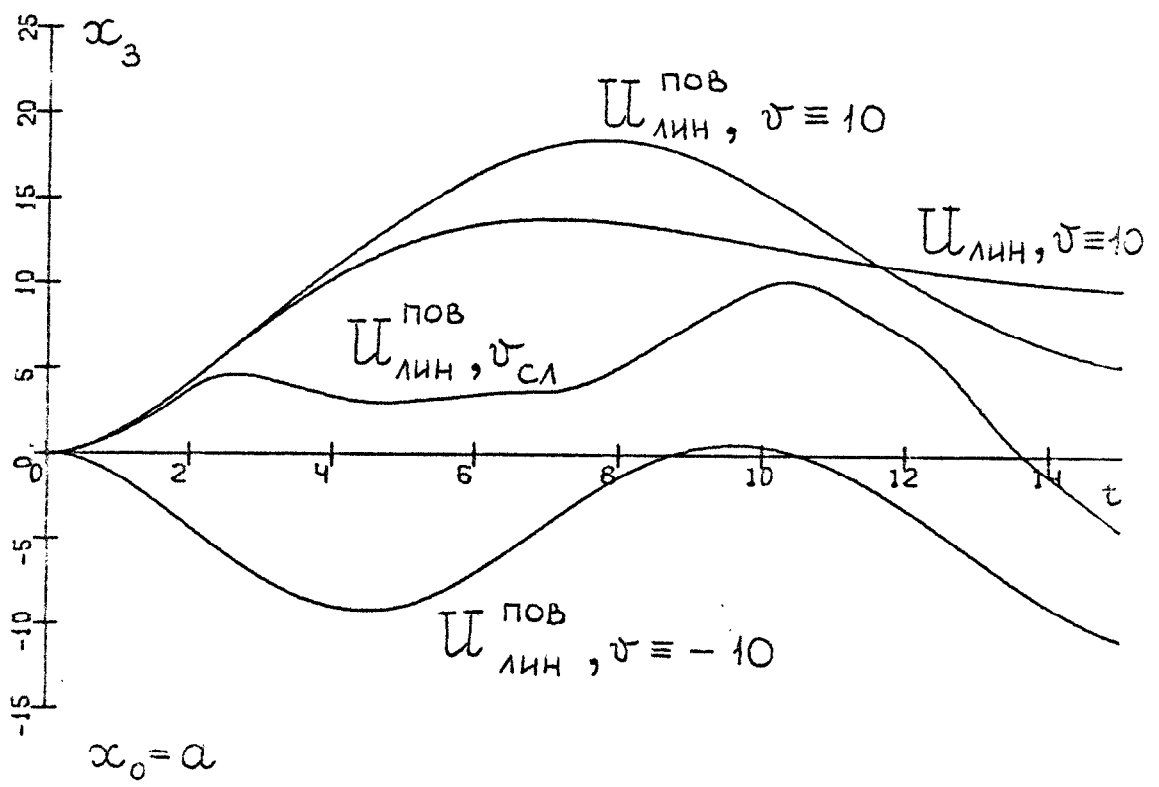


Рис. 7.4

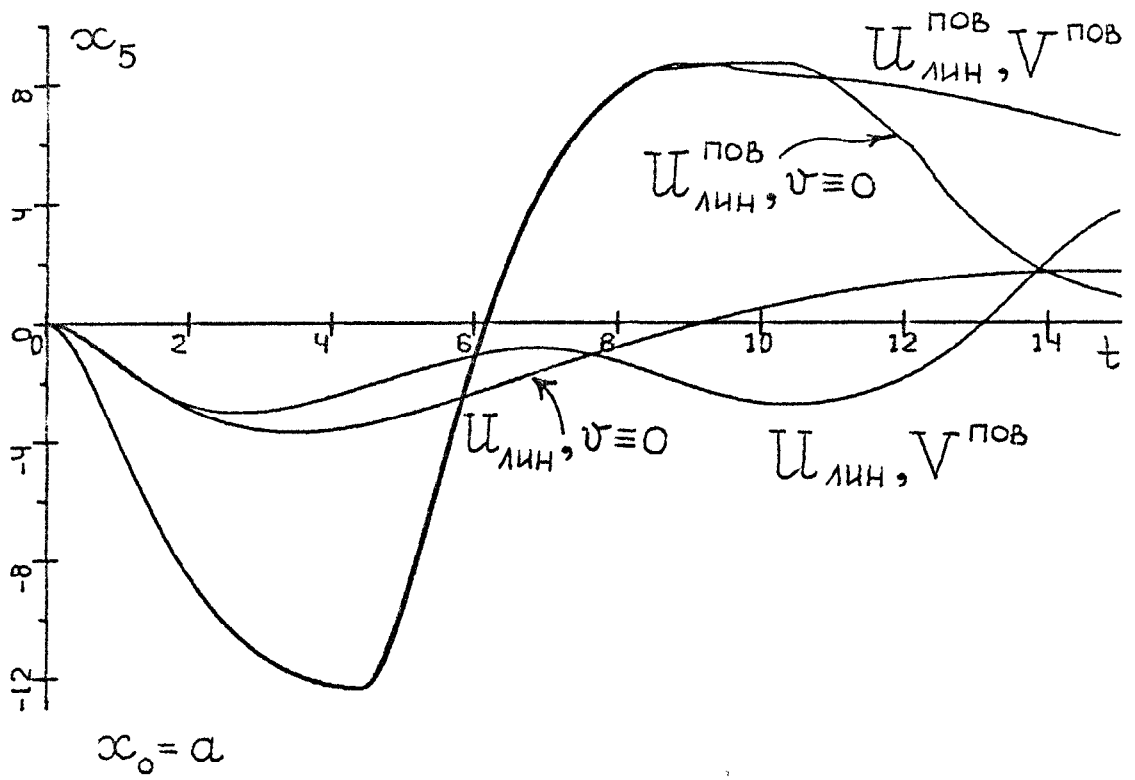


Рис. 7.5

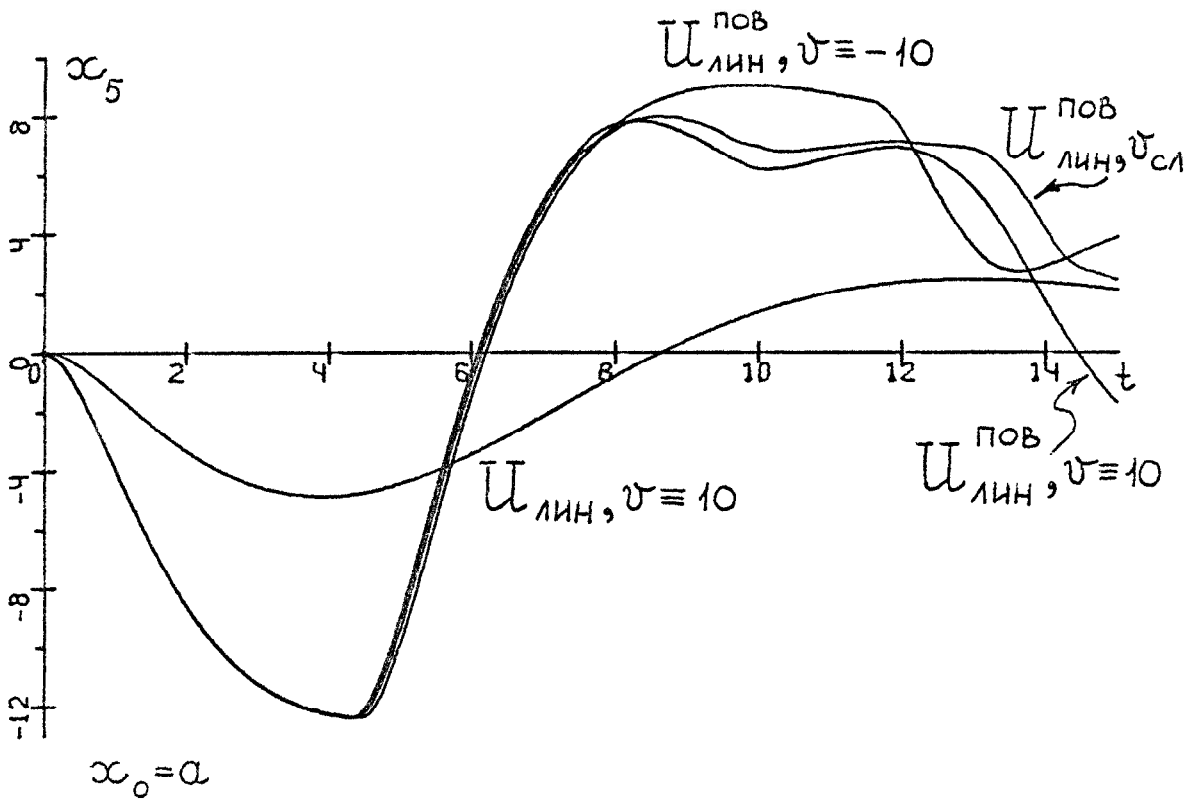


Рис. 7.6

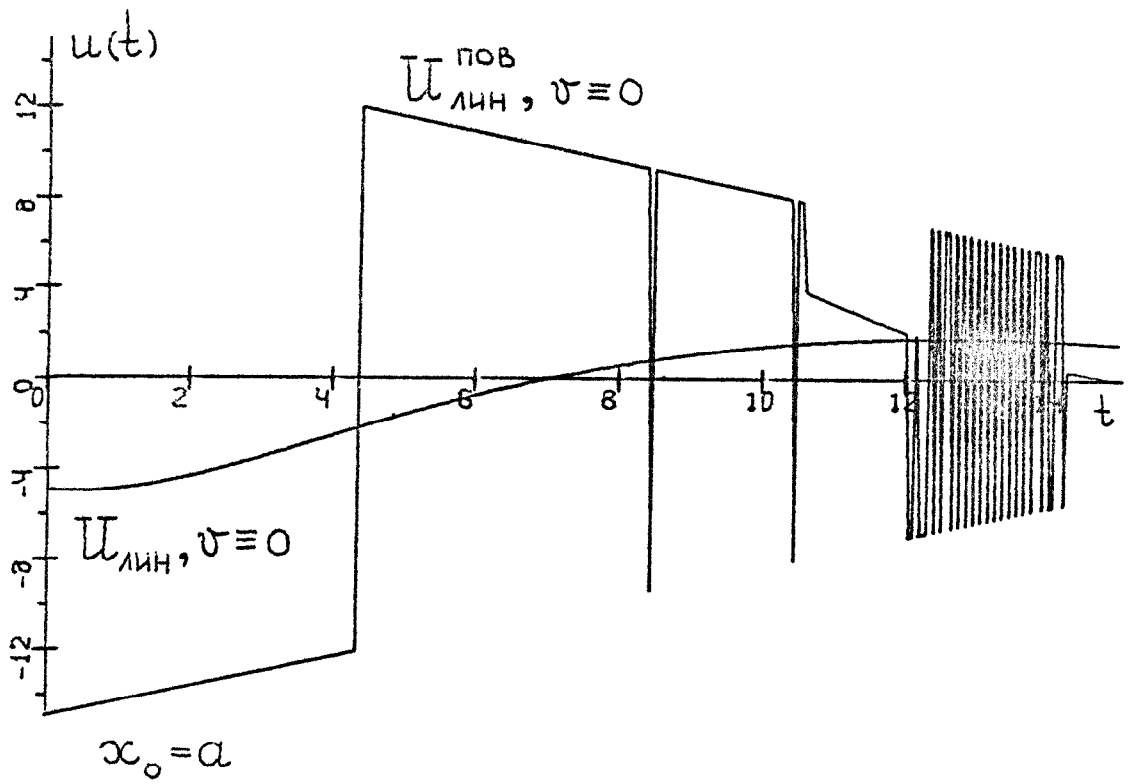


Рис. 7.7

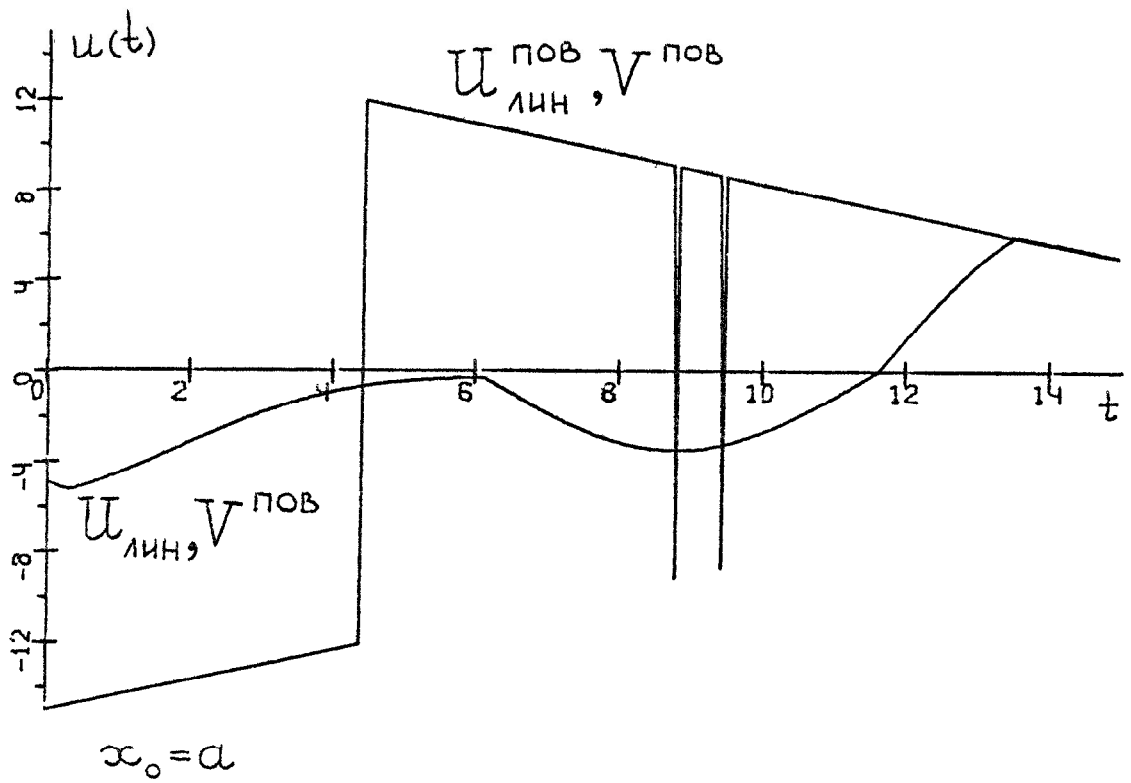


Рис. 7.8

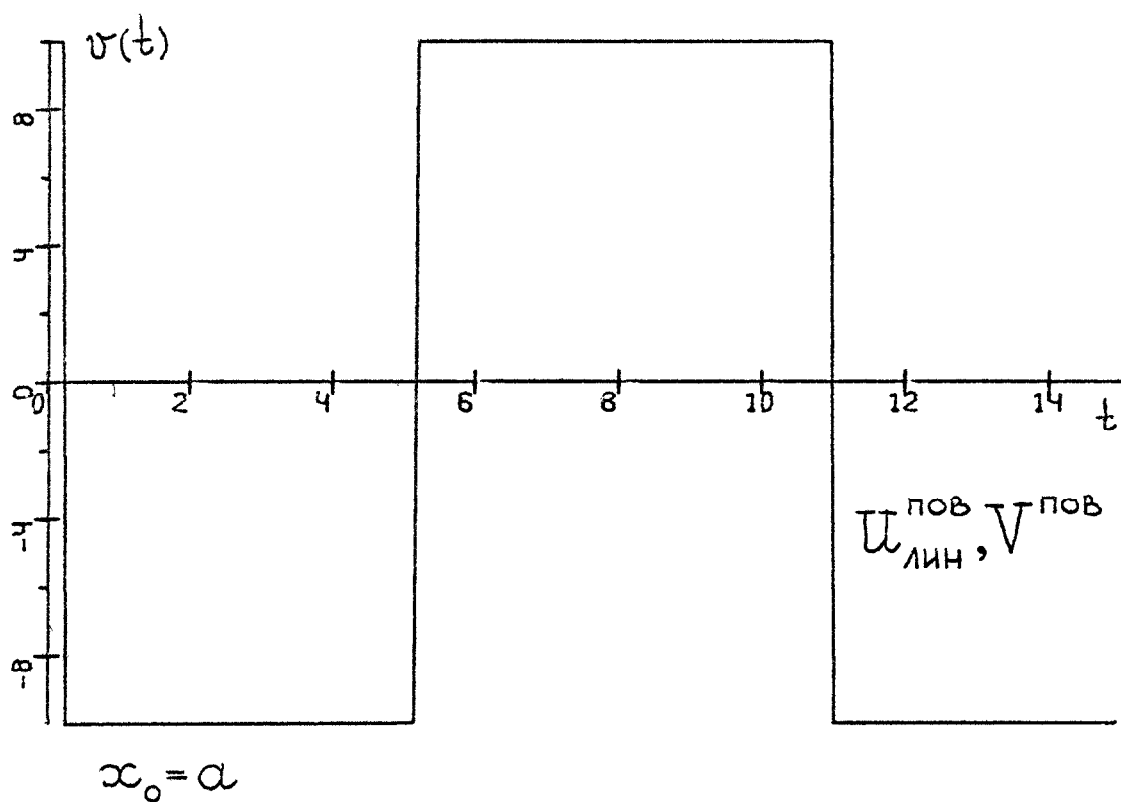


Рис. 7.9

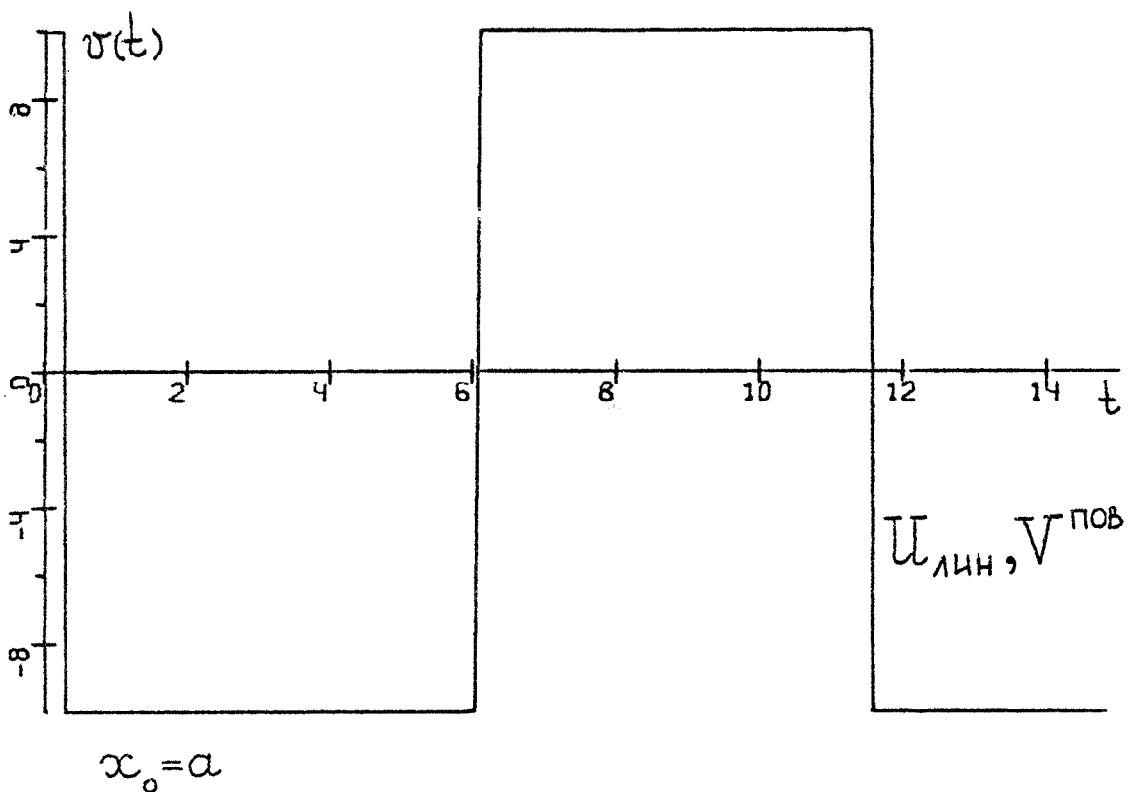


Рис. 7.10

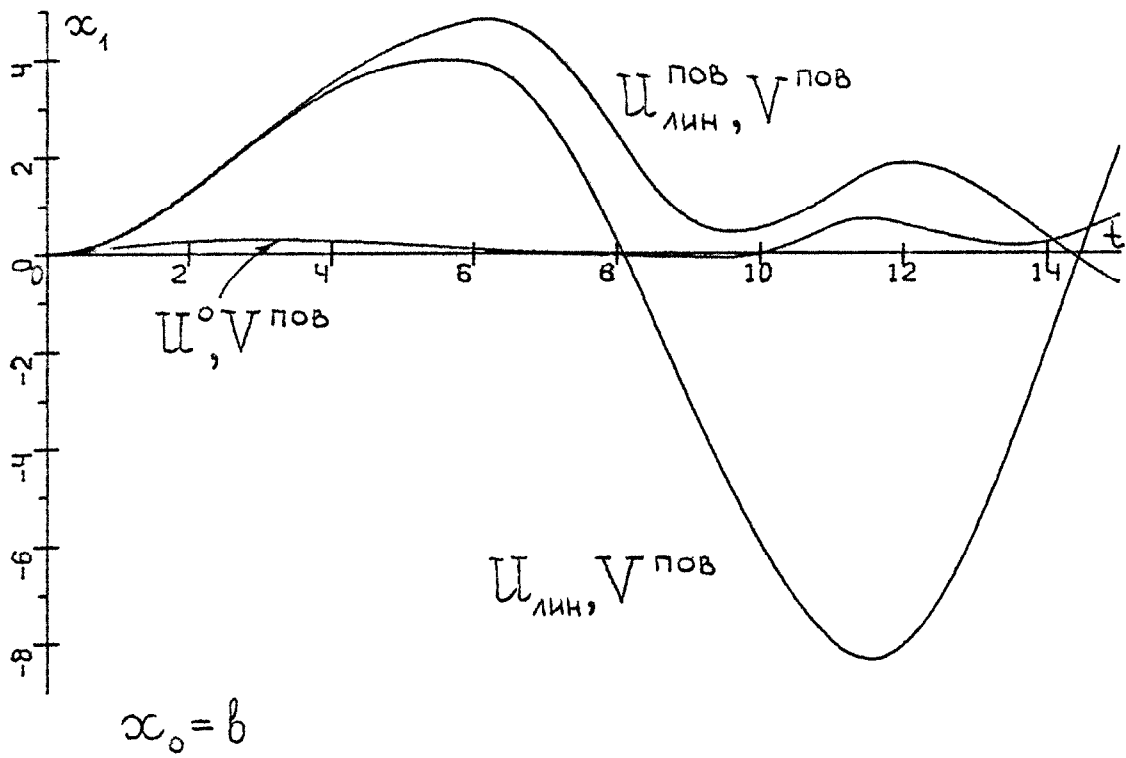


Рис. 7.11

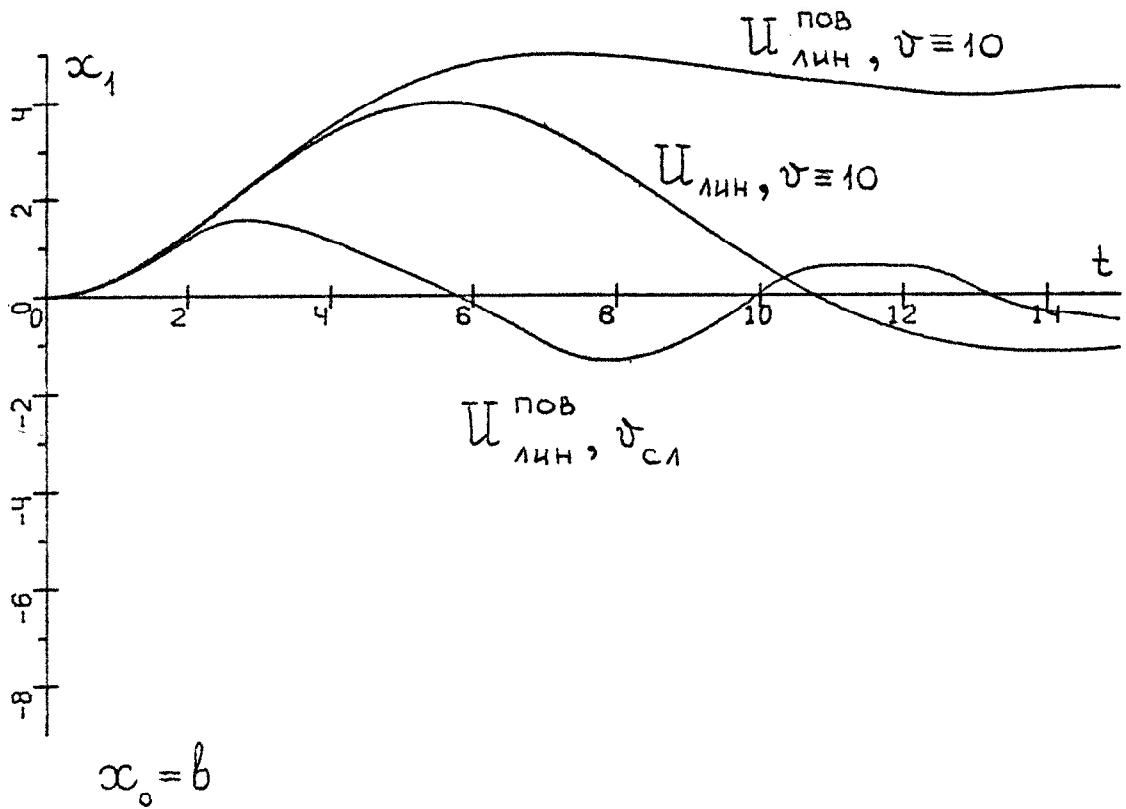


Рис. 7.12

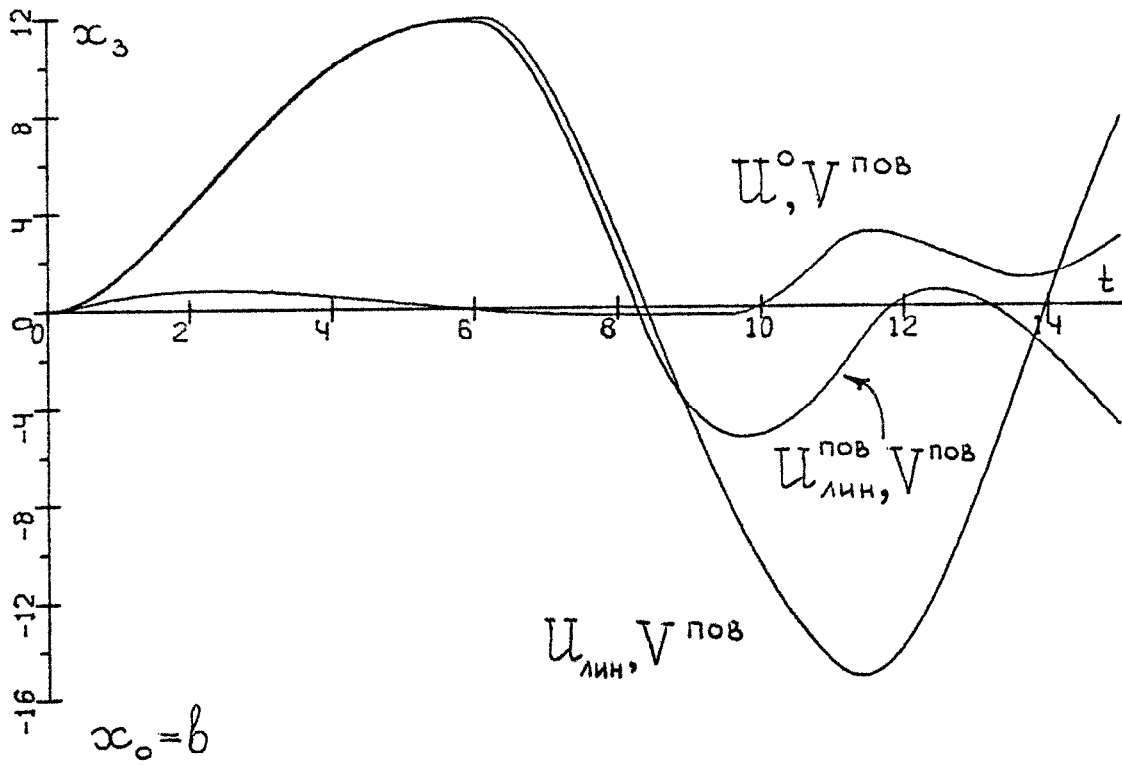


Рис. 7.13

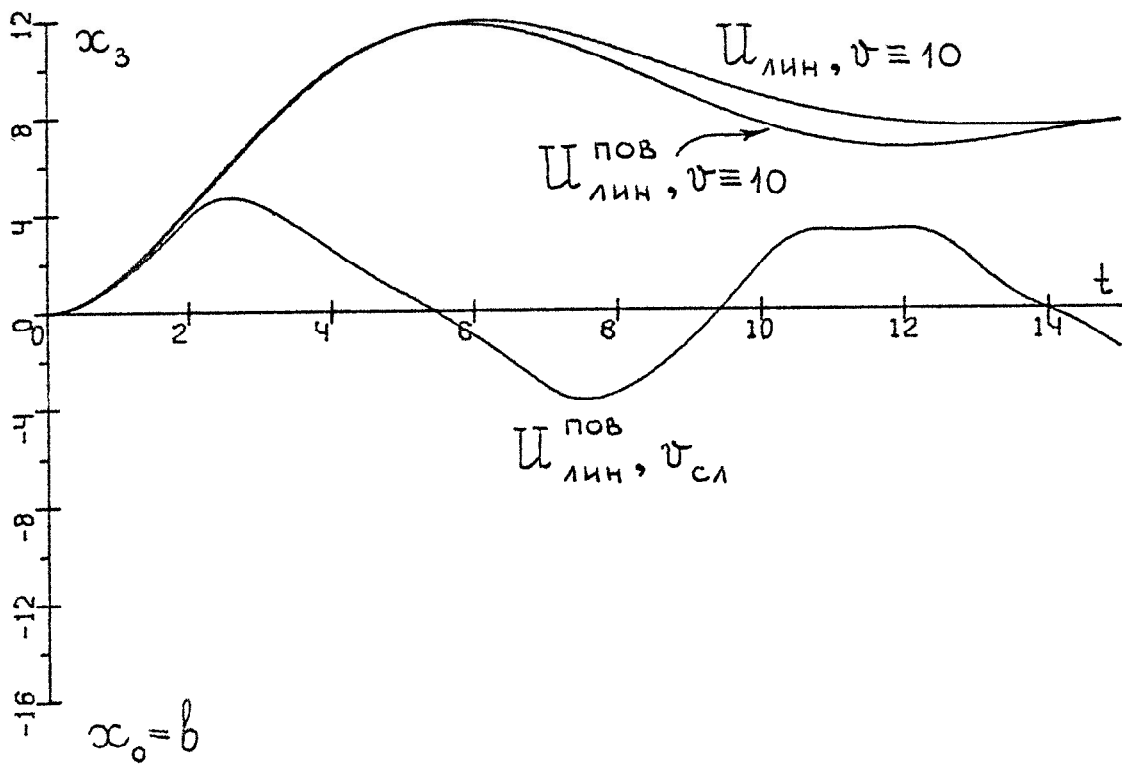


Рис. 7.14

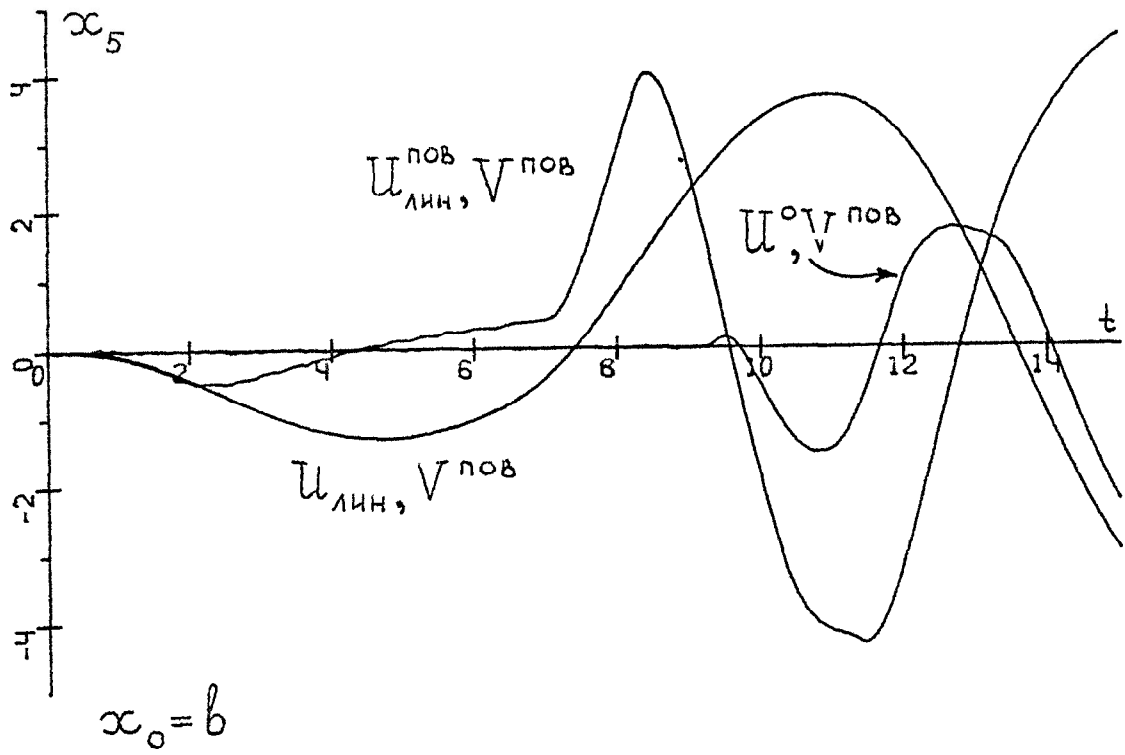


Рис. 7.15

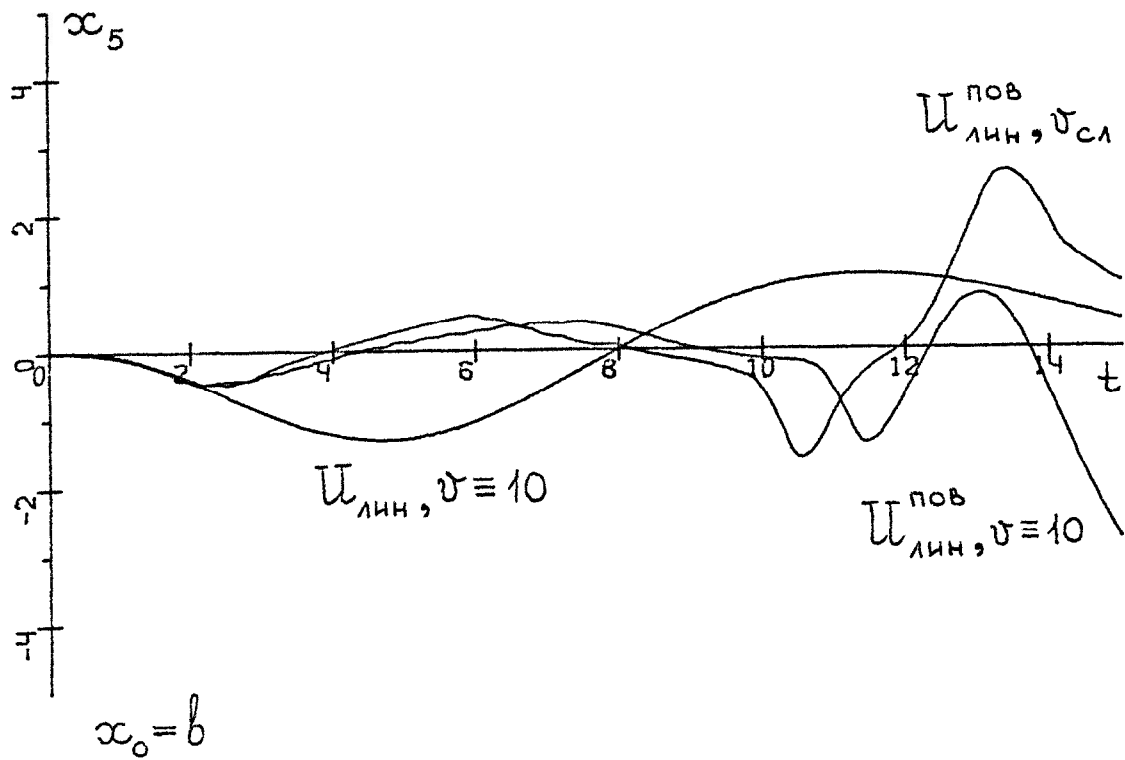


Рис. 7.16

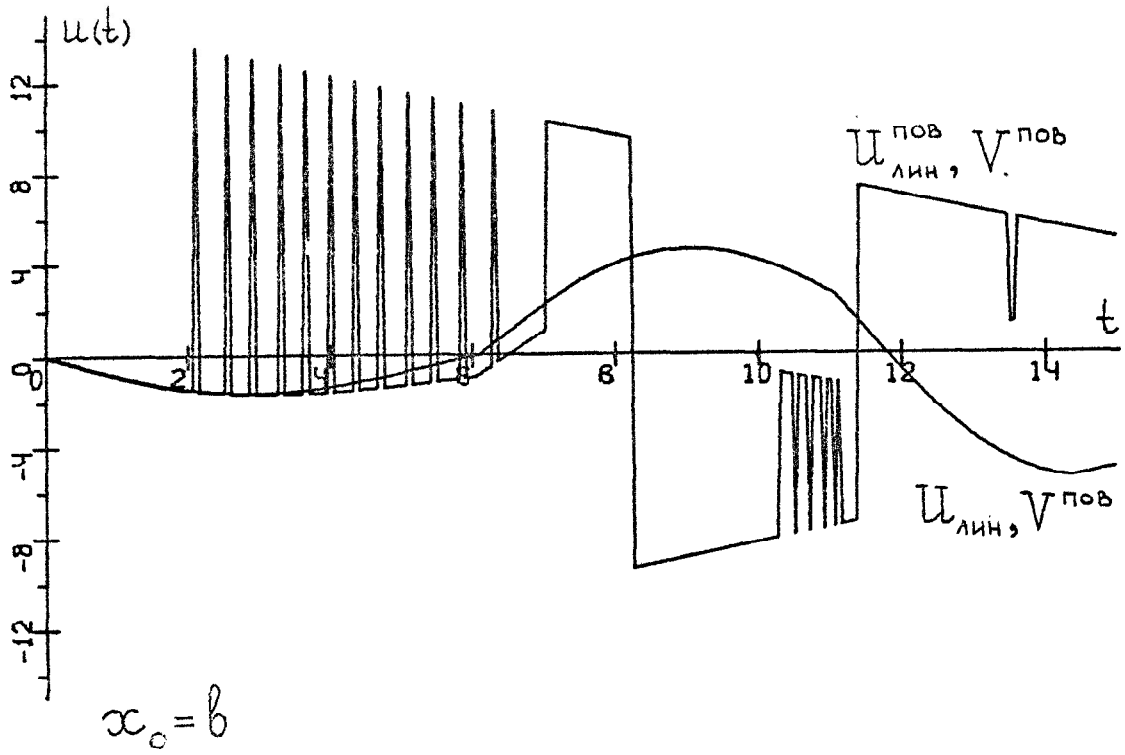


Рис. 7.17

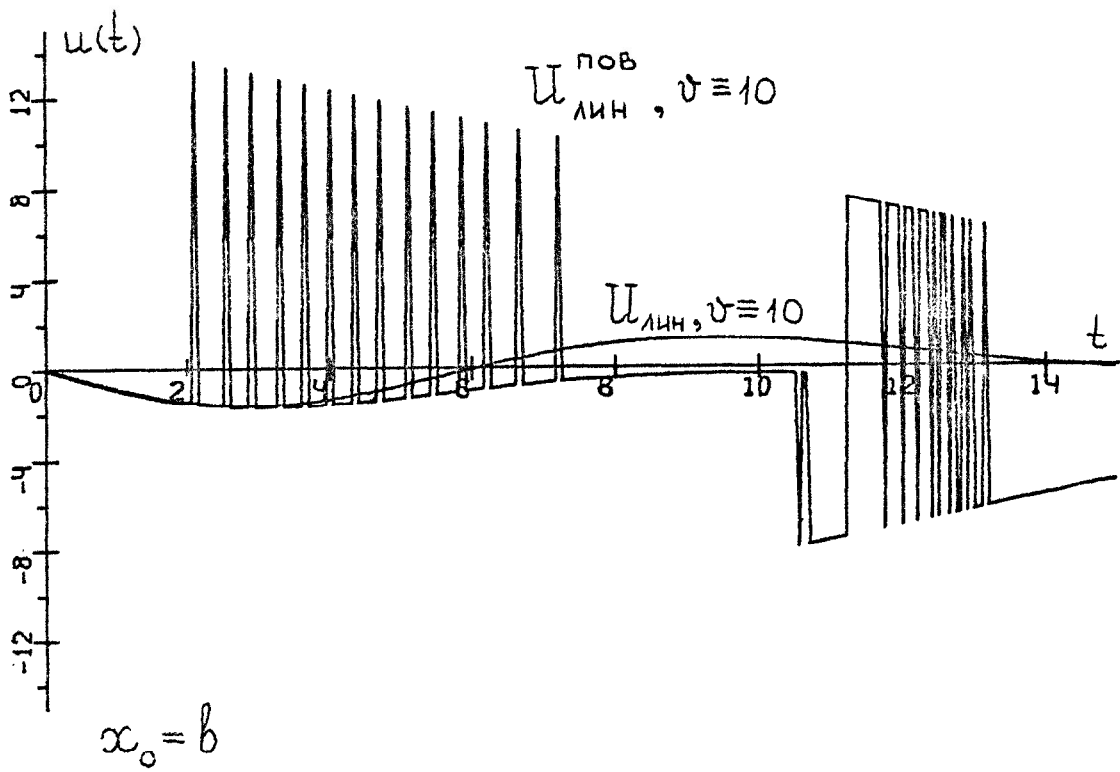


Рис. 7.18

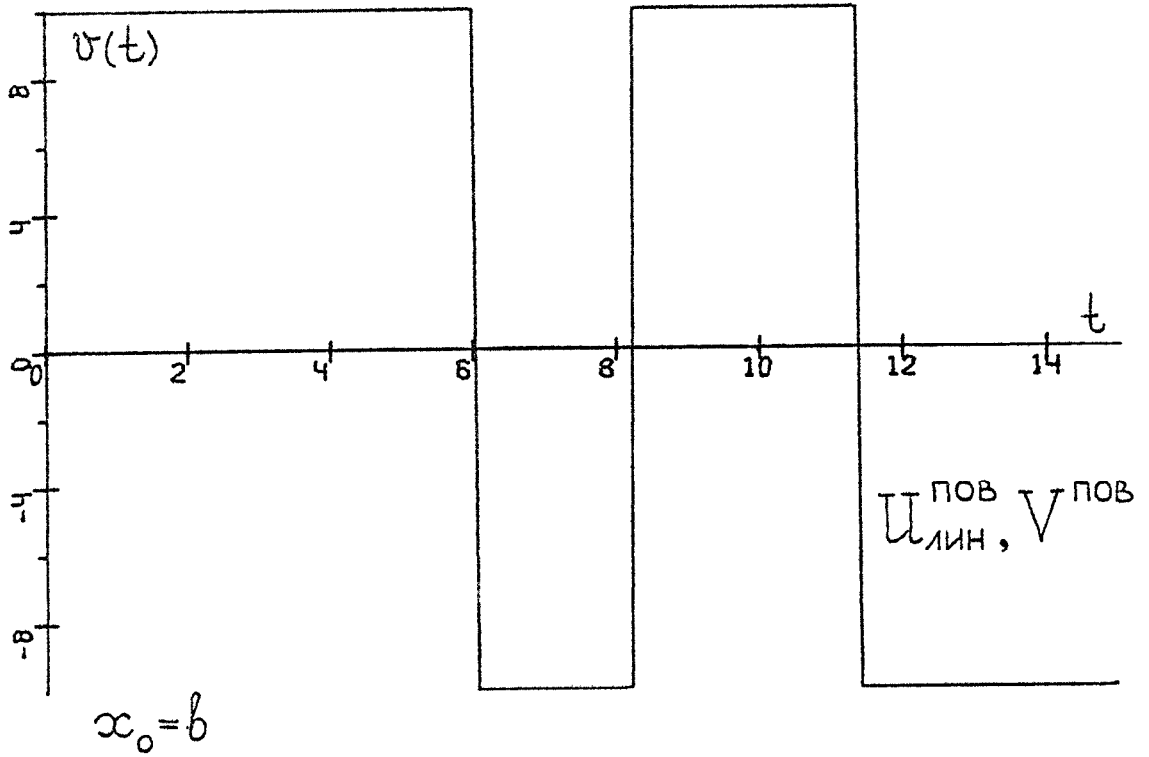


Рис. 7.19

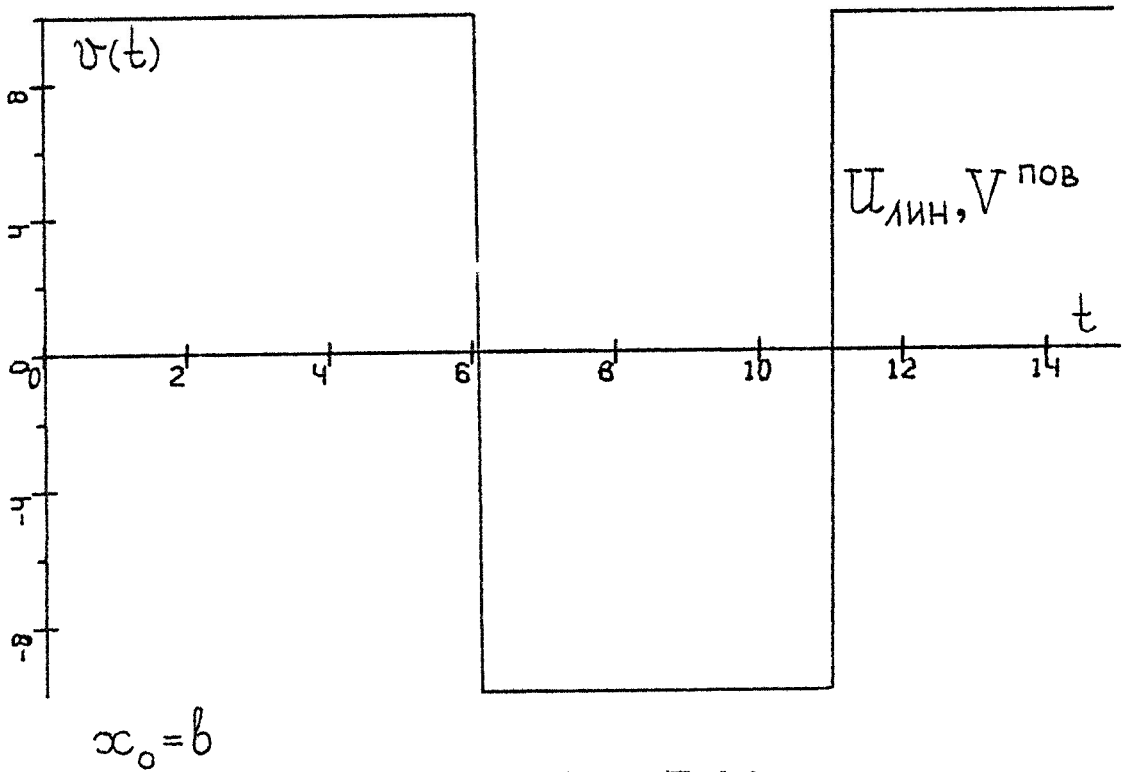


Рис. 7.20

Результаты численного моделирования

	$x_0 = a = (50, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$		$x_0 = b = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	
	$U_{\text{лин}}^{\text{пов}}$	$U_{\text{лин}}$	$U_{\text{лин}}^{\text{пов}}$	$U_{\text{лин}}$
$V^{\text{пов}}$	0.75	2.20	0.63	2.88
$U \equiv 0$	0.02	1.76	0	0
$U \equiv 10$	0.65	1.66	0.66	0.10
$U_{\text{сл}}$	0.23	1.32	0.24	0.38

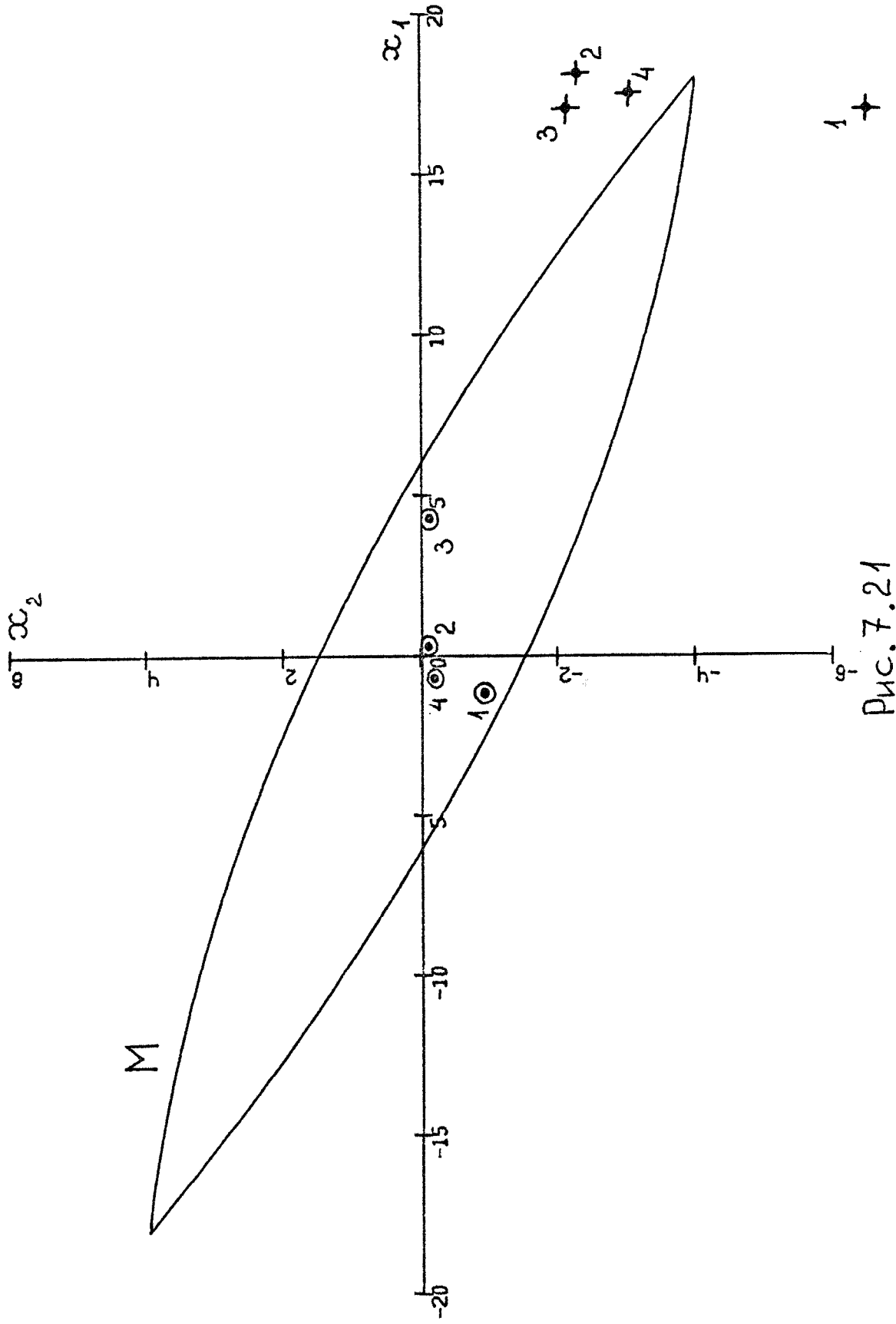


Рис. 7.21

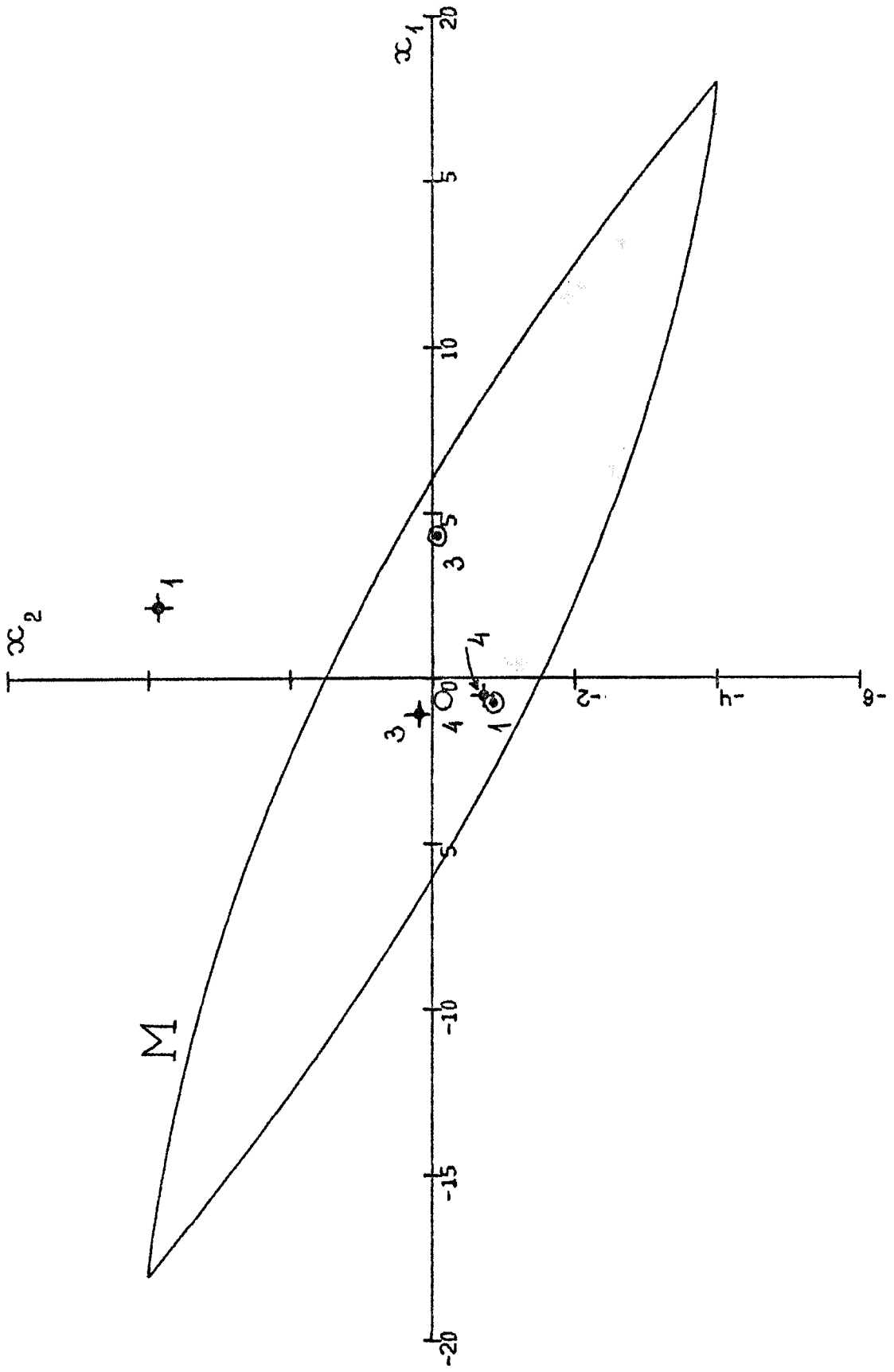


Рис. 7.22

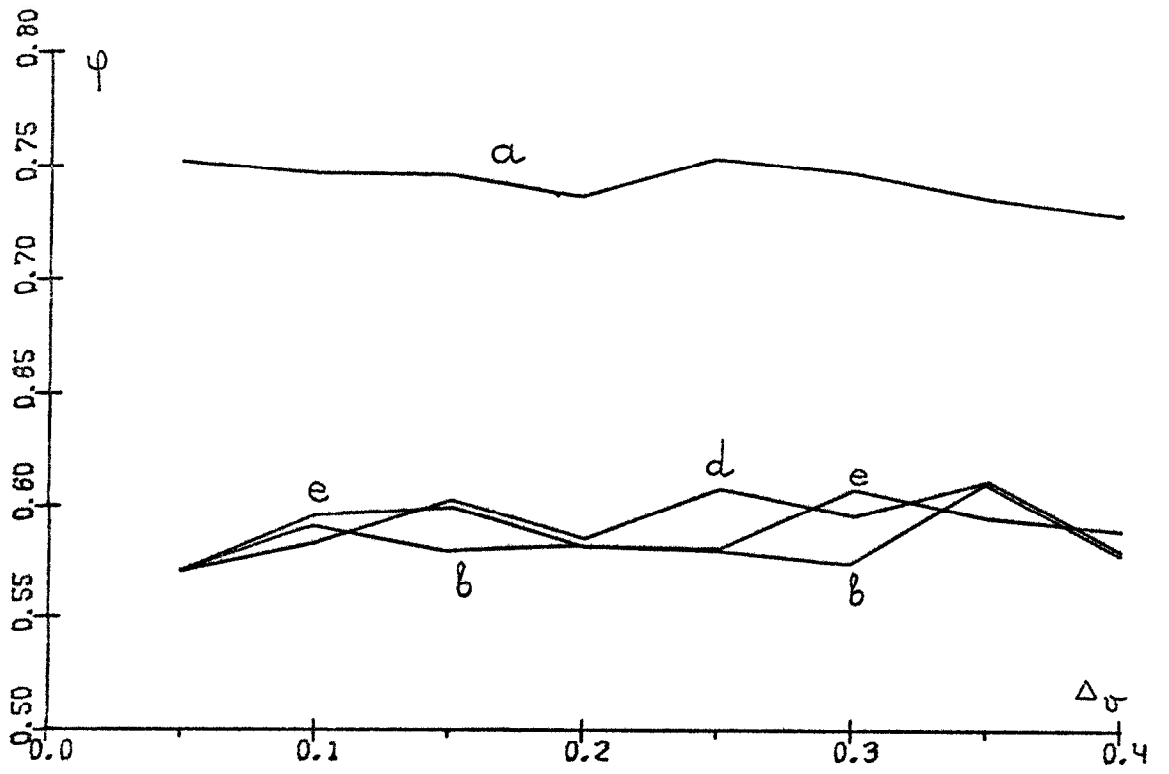


Рис.7.23

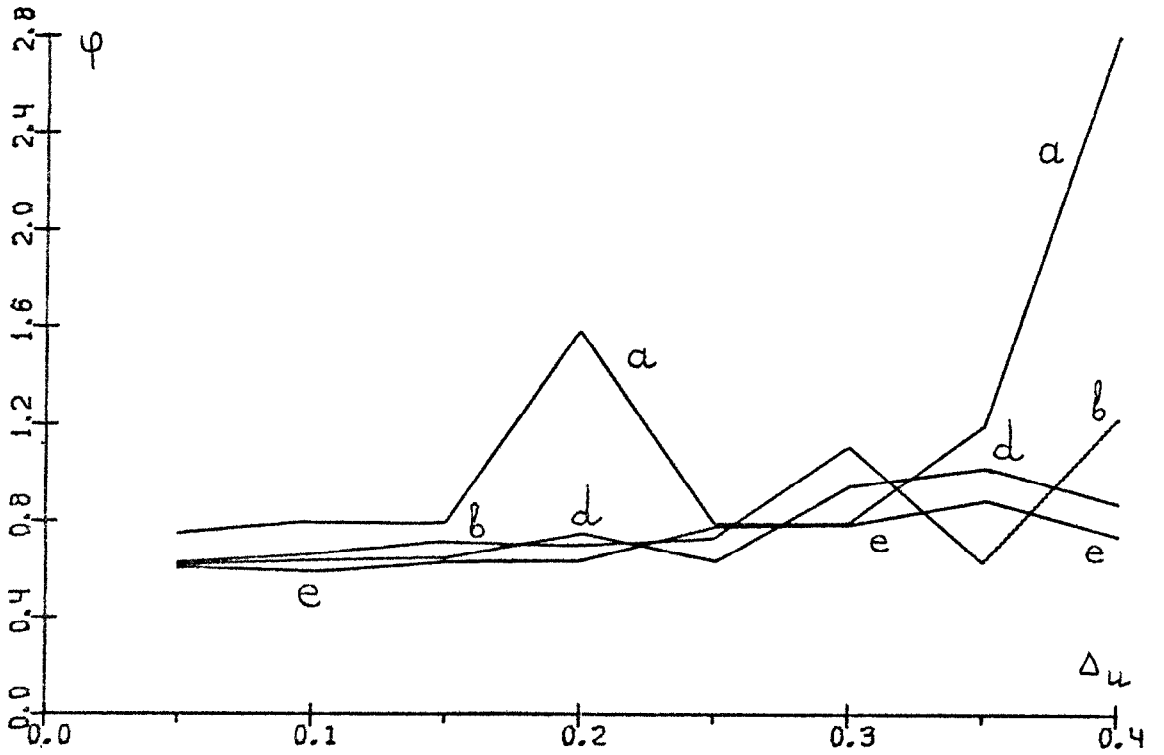


Рис.7.24

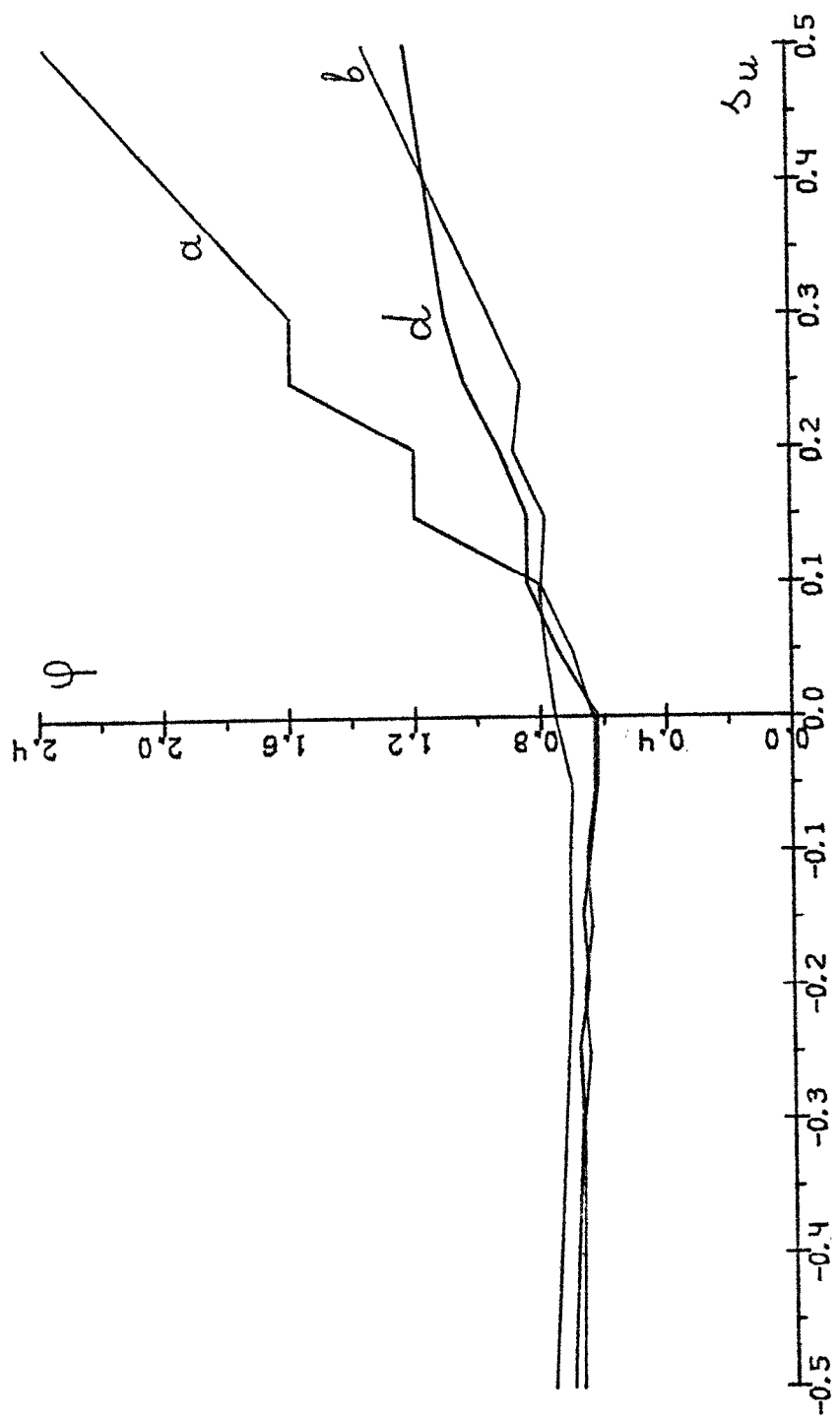


Рис. 7.25

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное в отчете решение модельной задачи об управлении боковым движением самолета может быть полезно при разработке методов и алгоритмов автоматической посадки в условиях ветрового возмущения. Как описано, реализация во времени оптимального и комбинированного способов управления (стратегий первого игрока) происходит при помощи линий переключения. Эти линии могут быть просчитаны заранее и заложены в бортовую вычислительную машину. Найденную область начальных состояний ("трубку" W_c при $c = 1$), откуда гарантируется успешное завершение посадки, можно учитывать при решении вопроса о прекращении посадки и уходе на второй круг. Описанный "наихудший" способ формирования помехи (квазиоптимальную стратегию второго игрока) можно использовать в имитаторах ветрового возмущения.

Одно из основных предположений, принятое в постановке модельной задачи и облегчающее ее решение, заключалось в том, что целевая функция (функция платы) зависела только от значений двух координат фазового вектора в момент пролета торца взлетно-посадочной полосы. В качестве таких координат были взяты боковое отклонение и его скорость. Целесообразно исследовать более сложную задачу, в которой функция платы зависит от трех координат фазового вектора.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Системы цифрового управления самолётом/ А.Д.Александров, В.П.Андреев, В.М.Кейн и др.; под ред. А.Д.Александрова, С.М.Фёдорова. – М.: Машиностроение, 1983. 223 с.
2. Белогородский С.Л. Автоматизация управления посадкой самолёта. – М.: Транспорт, 1972. 352 с.
3. Фёдоров С.М., Драбкин В.В., Кейн В.М., Михайлов О.И. Автоматическое управление самолётами и вертолётами/ Под ред. С.М.Фёдорова. – М.: Транспорт, 1977. 246 с.
4. Кейн В.М., Париков А.Н., Смуров М.Ю. Об одном способе оптимального управления по методу экстремального прицеливания. – Прикл. математика и механика, 1980, т.44, вып. 3, с.434–440.
5. Доброленский Ю.П. Динамика полёта в неспокойной атмосфере. – М.: Машиностроение, 1969. 226 с.
6. Борисенко М.М. Вертикальные профили ветра и температуры в нижних слоях атмосферы. – Сб. науч. тр. ГГО, 1974, вып. 320. 204 с.
7. Смуров М.Ю. Об одном методе построения области допустимых отклонений самолёта в момент приземления. – В кн.: Автоматизированные системы УВД в ГА. Л.: Изд-во ОЛАГА, 1978, с.76–79.
8. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. 456 с.
9. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. – М.: Наука, 1981. 288 с.
10. Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И. О дифференциальных играх с фиксированным временем. – Кибернетика, 1970, № 2, с.54–63.

11. Боткин Н.Д., Пацко В.С. Универсальная стратегия в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. - Пробл. управления и теории информ., 1982, т. II, № 6, с. 419-432.
12. Боткин Н.Д., Пацко В.С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре. - Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1983, № 4, с. 78-85.